## Zadatak 241 (4A, TUPŠ)

U javnoj garaži parkiranje se naplaćuje prema sljedećoj tarifi: prvih pola sata 5 kn, drugih pola sata 4 kn i svaki sljedeći započeti sat po 7 kn. Vozilo je bilo parkirano od 10:35 do 15:50 sati. Koliko je kuna platio parkiranje njegov vlasnik?

### Rješenje 241

Ponovimo!

$$1\ h = 60\ \text{min}.$$


Računamo koliko je vremena automobil bio parkiran.

$$\begin{array}{r} 15\ h\ \ 50\ \text{min} \\ -\,10\ h\ \ 35\ \text{min} \\ \hline 5\ h\ \ 15\ \text{min} \end{array}$$

Automobil je bio parkiran 5 sati i 15 minuta.

$$\text{Prvi sat}\} \Rightarrow \begin{bmatrix} prvih\ \ pola\ \ sata\ .....\ 5\ kn \\ drugih\ \ pola\ \ sata\ ...\ 4\ kn \end{bmatrix} \Rightarrow 9\ kn.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Drugi sat} \ \ ..................\ 7\ \text{kn} \\ \text{Treći sat} \ \ .................\ 7\ \text{kn} \\ \text{Četvrti sat}\ .................\ 7\ \text{kn} \\ \text{Peti sat} \ \ ..................\ 7\ \text{kn} \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot 7\ kn = 28\ kn.$$

Petnaest minuta je početak šestog sata pa je to isto 7 kn.
Cijena parkiranja je iznosila:

$$9\ kn + 28\ kn + 7\ kn = 44\ kn.$$



### Vježba 241

U javnoj garaži parkiranje se naplaćuje prema sljedećoj tarifi: prvih pola sata 4 kn, drugih pola sata 5 kn i svaki sljedeći započeti sat po 7 kn. Vozilo je bilo parkirano od 10:35 do 15:55 sati. Koliko je kuna platio parkiranje njegov vlasnik?

**Rezultat:** 44 kn.

## Zadatak 242 (4A, TUPŠ)

Svjetlost prijeđe udaljenost od zvijezde Alpha Centauri do Zemlje za 4.3 godine. Brzina svjetlosti je 300 milijuna metara u sekundi. Kolika je udaljenost u kilometrima između Alpha Centauri i Zemlje?

### Rješenje 242

Ponovimo!

$$1\ km = 10^3\ m \quad , \quad 1\ god = 365.25\ dana \quad , \quad 1\ dan = 24\ h \quad , \quad 1\ h = 60\ \text{min} \quad , \quad 1\ \text{min} = 60\ s.$$

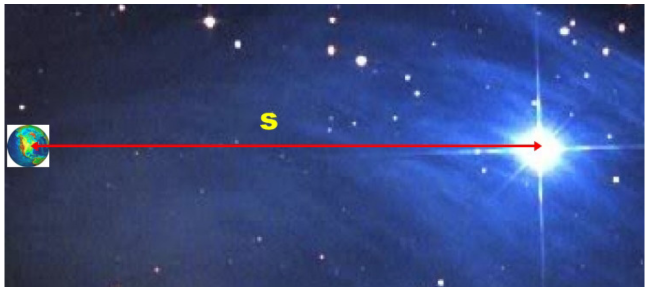
Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = v \cdot t,$$

gdje su s i v put, odnosno brzina za tijelo koje se giba stalnom brzinom v za vrijeme t.

Svaki realan broj možemo napisati u tzv. standardnom obliku, tj. kao umnožak broja iz intervala $[1, 10\rangle$ i potencije broja 10. Na primjer,

$$325 = 3.25 \cdot 10^2 \quad , \quad 41700 = 4.17 \cdot 10^4 \quad , \quad 0.0457 = 4.57 \cdot 10^{-2} \quad , \quad 0.00053 = 5.3 \cdot 10^{-4}.$$




Računamo udaljenost u kilometrima između Alpha Centauri i Zemlje.

$$\left.\begin{array}{l} v = 300\,000\,000 \ \frac{m}{s} \\ t = 4.3 \ god \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 300\,000\,000 \ \frac{m}{s} \\ t = 4.3 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \ s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 3 \cdot 10^{8} \ \frac{m}{s} \\ t = 1.357 \cdot 10^{8} \ s \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ s = v \cdot t \right] \Rightarrow s = 3 \cdot 10^{8} \ \frac{m}{s} \cdot 1.357 \cdot 10^{8} \ s \Rightarrow s = 4.071 \cdot 10^{16} \ m \Rightarrow s = 4.071 \cdot 10^{13} \ km.$$

**Vježba 242**

Svjetlost prijeđe udaljenost od zvijezde Alpha Centauri do Zemlje za 4.3 godine. Brzina svjetlosti je 300 milijuna metara u sekundi. Kolika je udaljenost u kilometrima između Alpha Centauri i Zemlje?

**Rezultat:** $4.071 \cdot 10^{13}$ km.

**Zadatak 243 (Anamaria, gimnazija)**

Izračunaj: $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^2$.

**Rješenje 243**

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$



Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Skup svih neparnih prirodnih brojeva označavamo sa $N_1$ i pišemo:

$$N_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2 \cdot n - 1, 2 \cdot n + 1, \ldots\}.$$

Skup svih parnih prirodnih brojeva označavamo sa $N_2$ i pišemo:

$$N_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2 \cdot n, 2 \cdot n + 2, \ldots\}.$$

Svaki se parni prirodni broj može prikazati u obliku $2 \cdot n$, a neparni broj u obliku $2 \cdot n - 1$, gdje je n prirodan broj, tj. $n \in N$.

Zbroj

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

možemo uporabom znaka sumacije zapisati u obliku

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

gdje je k indeks sumacije koji se mijenja u granicama od 1 do n povećavajući se u svakom pribrojniku za 1.

Svojstva:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + a + a + \ldots + a}_{\text{n - pribrojnika}} = n \cdot a.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+5+\ldots+n \quad , \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

U skupu prirodnih brojeva točne su sljedeće jednakosti:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}.$$

Za zbroj prvih n kvadrata neparnih prirodnih brojeva vrijedi:

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2\cdot n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(4\cdot k^2-4\cdot k+1\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(4\cdot k^2\right)-\sum_{k=1}^{n}(4\cdot k)+\sum_{k=1}^{n}1=4\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2-4\cdot\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=$$

$$=4\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}-4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n=4\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}-4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n=$$

$$=\frac{2\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{3}-\frac{2\cdot n\cdot(n+1)}{1}+\frac{n}{1}=\frac{2\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)-6\cdot n\cdot(n+1)+3\cdot n}{3}=$$

$$=\frac{n\cdot\left(2\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)-6\cdot(n+1)+3\right)}{3}=\frac{n\cdot\left(2\cdot\left(2\cdot n^2+n+2\cdot n+1\right)-6\cdot n-6+3\right)}{3}=$$

$$=\frac{n\cdot\left(2\cdot\left(2\cdot n^2+3\cdot n+1\right)-6\cdot n-3\right)}{3}=\frac{n\cdot\left(4\cdot n^2+6\cdot n+2-6\cdot n-3\right)}{3}=\frac{n\cdot\left(4\cdot n^2+6\cdot n+2-6\cdot n-3\right)}{3}=$$

$$=\frac{n\cdot\left(4\cdot n^2+2-3\right)}{3}=\frac{n\cdot\left(4\cdot n^2-1\right)}{3}=\frac{n}{3}\cdot\left(4\cdot n^2-1\right).$$

**Vježba 243**

Izračunaj: $1+3+5+7+\ldots+(2\cdot n-1)$.

**Rezultat:** $\sum_{k=1}^{n}(2\cdot k-1)=\ldots=2\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=\ldots=n^2.$

**Zadatak 244 (Helena, pedagoški fakultet)**

Matematičkom indukcijom pokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

$$2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1).$$

**Rješenje 244**

Ponovimo!

$$a^0=1 \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^1=a.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$2\cdot 1^2=(-1)^{1-1}\cdot 1\cdot(1+1)$$
$$2\cdot 1=(-1)^0\cdot 1\cdot 2$$
$$2=1\cdot 1\cdot 2$$
$$2=2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1) \; - \; \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2+(-1)^n\cdot 2\cdot(n+1)^2=$$
$$=2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2+(-1)^n\cdot 2\cdot(n+1)^2=$$
$$=\underbrace{2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2}_{\text{induktivna pretpostavka}}+(-1)^n\cdot 2\cdot(n+1)^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^n\cdot 2\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^n\cdot 2\cdot(n+1)^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^{n-1}(-1)^1\cdot 2\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^{n-1}\cdot(-1)\cdot 2\cdot(n+1)^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^{n-1}\cdot(-1)\cdot 2\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)+(-1)^{n-1}\cdot(-2)\cdot(n+1)^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot[n+(-2)\cdot(n+1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot[n-2\cdot(n+1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot[n-2\cdot n-2]=$$
$$=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot(-n-2)=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot(-1)\cdot(n+2)=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)\cdot(-1)^1\cdot(n+2)=$$
$$=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

**Vježba 244**

Matematičkom indukcijom pokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

**Rezultat:** Tvrdnja je istinita. Naputak: baza indukcije n = 1

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Korak indukcije:

n

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^{2}}=1-\frac{1}{(n+1)^{2}}.$$

n + 1

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^{2}}+\frac{2\cdot(n+1)+1}{(n+1)^{2}\cdot(n+1+1)^{2}}=\ldots=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^{2}}+\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}=$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^{2}}+\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}=1-\left(\frac{1}{(n+1)^{2}}-\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}\right)=$$

$$=1-\frac{(n+2)^{2}-(2\cdot n+3)}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}=\ldots=1-\frac{n^{2}+2\cdot n+1}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}=1-\frac{(n+1)^{2}}{(n+1)^{2}\cdot(n+2)^{2}}=1-\frac{1}{(n+2)^{2}}.$$

**Zadatak 245 (Max, gimnazija)**

Izračunaj zbroj $S=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}.$

**Rješenje 245**

Ponovimo!

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k}.$$



Svojstva:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad,\quad\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

Budući da vrijedi $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, dobije se:

$$S=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}\ \Rightarrow\ S=\binom{5}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}\ \Rightarrow\ S=2\cdot\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S=2\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\ \Rightarrow\ S=2\cdot\frac{20}{2}+\frac{30}{2}+\frac{42}{2}+\frac{56}{2}\ \Rightarrow\ S=2\cdot\frac{20}{2}+\frac{30}{2}+\frac{42}{2}+\frac{56}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S=20+15+21+28\ \Rightarrow\ S=84.$$

2.inačica

Budući da vrijedi $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, dobije se:

$$S=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow S=\left(\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\right)+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow S=\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right)+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow S=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow S=\left(\binom{7}{4}+\binom{7}{5}\right)+\binom{8}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\binom{8}{5}+\binom{8}{6} \Rightarrow S=\binom{9}{6} \Rightarrow S=\binom{9}{3} \Rightarrow S=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \Rightarrow S=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \Rightarrow S=3\cdot 4\cdot 7 \Rightarrow S=84.$$

**Vježba 245**

Izračunaj zbroj $S=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}+\binom{10}{8}$.

**Rezultat:** 165.

**Zadatak 246 (4A, 4B, TUPŠ)**

Zaokružite broj 0.236743 na:

a) jednu decimalu
b) dvije decimale
c) tri decimale
d) četiri decimale.

**Rješenje 246**

Ponovimo!

Pravilo zaokruživanja

Ako je prva znamenka iza znamenaka koje ostaju u zapisu broj 5 ili veći broj (6, 7, 8 ili 9), tada se posljednjoj znamenci zapisa dodaje 1. Ako je prva znamenka iza znamenaka koje ostaju u zapisu broj manji od 5 (4, 3, 2, 1 ili 0), posljednja znamenka zapisa samo se prepisuje.

Svaki decimalni broj sastoji se od dekadskih jedinica, decimalne točke i decimalnih jedinica (decimala).

a) Zaokružujemo decimalni broj na jednu decimalu.

$$0.236743=0.2\underline{36743}\approx 0.2$$

b) Zaokružujemo decimalni broj na dvije decimale.

$$0.236743=0.23\underline{6743}\approx 0.24$$

c) Zaokružujemo decimalni broj na tri decimale.

$$0.236743=0.236\underline{743}\approx 0.237$$

d) Zaokružujemo decimalni broj na četiri decimale.

$$0.236743=0.2367\underline{43}\approx 0.2367.$$

**Vježba 246**

Zaokružite broj 0.138753 na:

a) dvije decimale
b) pet decimala.

**Rezultat:** a) 0.14 b) 0.13875.

**Zadatak 247 (Valerija, srednja škola)**

Kojim najmanjim brojem treba pomnožiti broj 2700 da bi se dobio kub nekog prirodnog broja?

**Rješenje 247**

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Prost broj (prim broj) je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv jedino brojem 1 i samim sobom.
Prost broj ima točno dva djelitelja.
Prosti brojevi su: 2, 3, 5, 7 ... . Ima ih beskonačno mnogo.

Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. Složeni brojevi imaju više od dva djelitelja. Složeni brojevi su: 4, 6, 8, 10, … . Ima ih beskonačno mnogo.
Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.
Broj 1 nije ni složen ni prost broj.
Neka je x traženi broj koji se može napisati kao umnožak prostih brojeva.

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Kubiranjem dobije se:

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \Rightarrow x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n \ /^3 \Rightarrow x^3 = \left(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = p_1^3 \cdot p_2^3 \cdot p_3^3 \cdot \dots \cdot p_n^3.$$

Broj 2700 rastavimo na proste faktore.

| | |
|---|---|
| **2700** | $= 2 \cdot 1350 =$ |
| | $= 2 \cdot 2 \cdot 675 =$ |
| | $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 225 =$ |
| | $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 75 =$ |
| | $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25 =$ |
| | $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$ |
| | $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$ |

Dakle,

$$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Vidimo da broj 2700 treba pomnožiti sa 2 · 5 kako bi se dobio kub prirodnog broja.

$$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \Rightarrow 2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \ / \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow 2700 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2700 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^1 \cdot 5^1 \Rightarrow 27\,000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow 27000 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 \Rightarrow 27\,000 = 30^3.$$

**Vježba 247**

Kojim najmanjim brojem treba pomnožiti broj 1260 da bi se dobio kvadrat nekog prirodnog broja?

**Rezultat:** 35, $210^2$.



**Zadatak 248 (4A, TUPŠ)**

Koji realni broj ima za binarni zapis broj $1100.011_{(2)}$?

**Rješenje 248**

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od 1. U sustavu s bazom b prirodni broj N zapisujemo kao

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_{0(b)}$$

pri čemu brojevi $a_i$, i = 0, 1, 2, 3, …, n mogu poprimati vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$. Vrijednost prirodnog broja N zapisanog u sustavu s bazom b je

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_{0(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 =$$

$$= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0.$$

U binarnom sustavu (sustavu s bazom 2) postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. U njemu također vrijedi zakon pozicije (mjesne vrijednosti!).
Zadani binarni broj napisat ćemo pomoću potencija broja 2 pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$1100.011_{(2)} = \overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{0}.\overset{-1}{0}\ \overset{-2}{1}\ \overset{-3}{1}_{(2)} = 1\cdot 2^{3} + 1\cdot 2^{2} + 0\cdot 2^{1} + 0\cdot 2^{0} + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} =$$

$$= 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot \frac{1}{2^{1}} + 1\cdot \frac{1}{2^{2}} + 1\cdot \frac{1}{2^{3}} = 8 + 4 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 8 + 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$= 12 + 0.25 + 0.125 = 12.375.$$

**Vježba 248**

Koji realni broj ima za binarni zapis broj $1100.111_{(2)}$?

**Rezultat:** 12.875.

**Zadatak 249 (Iva, gimnazija)**

Koja je posljednja znamenka umnoška prvih 50 prostih brojeva?

**Rješenje 249**

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Dekadske jedinice

$10^0$ = 1, dekadska jedinica koju nazivamo jedinica
$10^1$ = 10, dekadska jedinica koju nazivamo desetica
$10^2$ = 100, dekadska jedinica koju nazivamo stotica
$10^3$ = 1000, dekadska jedinica koju nazivamo tisućica
Itd.

Umnožak prostih brojeva 5 i 2 daje rezultat kojemu je posljednja znamenka 0.

$$5\cdot 2 = 10.$$

Promatramo li niz prvih nekoliko prostih brojeva

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

uočit ćemo da su među njima i brojevi 2 i 5. Budući da je umnožak faktora 2 i 5 dekadska jedinica 10, tada je i posljednja znamenka umnoška prvih 50 prostih brojeva nula.

**Vježba 249**

Koja je posljednja znamenka umnoška prvih 100 prostih brojeva?

**Rezultat:** Analogno zaključivanje, 0.

**Zadatak 250 (Sanja, gimnazija)**

Razlika kvadrata dvaju uzastopnih cijelih brojeva neparan je broj. Dokaži!

**Rješenje 250**

Ponovimo!

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Sljedbenik cijelog broja je broj koji se nalazi iza zadanog broja. Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi s 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi s 2.
Da je neki cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2\cdot k + 1\ ,\ k \in Z.$$

Neparni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2\cdot n + 1,$$

gdje n pripada skupu cijelih brojeva. Uoči da neparni brojevi rastu za 2.
Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$a : b = k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b} = k.$$

Djeljenik je broj koji se dijeli. Djelitelj je broj kojim dijelimo
Neka su zadana dva uzastopna cijela broj n i n + 1. Tada je:

1.inačica

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = 2 \cdot n + 1 \;\rightarrow\; \text{neparan broj}.$$

Dokaz gotov.

2.inačica

$$(n+1)^2 - n^2 = ((n+1) - n) \cdot ((n+1) + n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot n + 1 \;\rightarrow\; \text{neparan broj}.$$

Dokaz gotov.

**Vježba 250**

Razlika kvadrata dvaju uzastopnih neparnih cijelih brojeva djeljiva je brojem 8. Dokaži!

**Rezultat:** Dokaz analogan: $(2 \cdot n + 3)^2 - (2 \cdot n + 1) = \; ... \; = 8 \cdot (n+1)$.

**Zadatak 251 (Maturant, gimnazija)**

Aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka je 10. Ako se iz skupa izostavi broj 24, tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 1. Broj n je jednak:

$A.\; n = 26$ $\quad B.\; n = 15$ $\quad C.\; n = 23$ $\quad D.\; n = 8$



**Rješenje 251**

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \; ... \; , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina $A_n$ brojeva $a_1$, $a_2$, $a_3$, … , $a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \; ... \; + a_n}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Postavimo dvije jednadžbe prema uvjetima iz zadatka.

- Aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka je 10.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1} + 24}{n} = 10.$$

- Ako se iz skupa izostavi broj 24, tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 1.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1}}{n-1} = 9.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se broj n.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1} + 24}{n} = 10 \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1}}{n-1} = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1} + 24}{n} = 10 \;/ \cdot n \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \; ... \; + x_{n-2} + x_{n-1}}{n-1} = 9 \;/ \cdot (n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1+x_2+x_3+\ \dots\ +x_{n-2}+x_{n-1}+24=10\cdot n \\ x_1+x_2+x_3+\ \dots\ +x_{n-2}+x_{n-1}=9\cdot(n-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1+x_2+x_3+\ \dots\ +x_{n-2}+x_{n-1}=10\cdot n-24 \\ x_1+x_2+x_3+\ \dots\ +x_{n-2}+x_{n-1}=9\cdot n-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 10\cdot n-24=9\cdot n-9 \Rightarrow 10\cdot n-9\cdot n=-9+24 \Rightarrow n=15.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 251**

Aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka je 10. Ako se iz skupa izostavi broj 24, tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 2. Broj n je jednak:

$A.\ n=26 \qquad B.\ n=15 \qquad C.\ n=23 \qquad D.\ n=8$

**Rezultat:** D.

**Zadatak 252 (Ana, gimnazija)**

Zadani su realni brojevi $K=\overline{ab}\cdot 10^{14}$ i $L=\overline{ba}\cdot 10^{13}$, pri čemu su a i b brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zbroj brojeva K i L je $9.49 \cdot 10^{15}$. Koliko je a – b? Napomena: Oznaka $\overline{xy}$ označava dvoznamenkasti broj kojemu je x znamenka desetica, a y znamenka jedinica.

$A.\ 4 \qquad B.\ 5 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 7$

**Rješenje 252**

Ponovimo!

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$



Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što ju nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N=a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i=0,1,2,\dots,n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\dots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Ako se prirodnom broju x dopiše zdesna znamenka y, $y\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, možemo pisati

$$\overline{xy}=10\cdot x+y.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Teorem o nulpolinomu

Ako za polinom prvog stupnja $f(x)=a\cdot x+b,\ a\neq 0,$ vrijedi

$$f(x)=0, \text{ za svaki } x\in R,$$

onda su svi koeficijenti polinoma jednaki nuli:

$$a=b=0.$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za polinome bilo kojeg stupnja.

$$\left.\begin{matrix} K=\overline{ab}\cdot 10^{14} \\ L=\overline{ba}\cdot 10^{13} \\ K+L=9.49\cdot 10^{15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{ab}\cdot 10^{14}+\overline{ba}\cdot 10^{13}=9.49\cdot 10^{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{ab}\cdot 10^{14}+\overline{ba}\cdot 10^{13}=9.49\cdot 10^{15}\ /:10^{13} \Rightarrow \overline{ab}\cdot 10+\overline{ba}=9.49\cdot 10^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{ab}\cdot 10+\overline{ba}=9.49\cdot 100 \Rightarrow \overline{ab}\cdot 10+\overline{ba}=949 \Rightarrow (10\cdot a+b)\cdot 10+10\cdot b+a=949 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 100\cdot a+10\cdot b+10\cdot b+a=949\ \Rightarrow\ 101\cdot a+20\cdot b=949\ \Rightarrow\ 101\cdot a+20\cdot b-949=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 101\cdot a+20\cdot b-909-40=0\ \Rightarrow\ (101\cdot a-909)+(20\cdot b-40)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 101\cdot(a-9)+20\cdot(b-2)=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a-9=0 \\ b-2=0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=9 \\ b=2 \end{array}\right\}.$$

Računamo a – b.

$$a-b=9-2=7.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 252**

Zadani su realni brojevi $K=\overline{ab}\cdot 10^{14}$ i $L=\overline{ba}\cdot 10^{13}$, pri čemu su a i b brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zbroj brojeva K i L je $9.69\cdot 10^{15}$. Koliko je a – b? Napomena: Oznaka $\overline{xy}$ označava dvoznamenkasti broj kojemu je x znamenka desetica, a y znamenka jedinica.

$A.\ 4 \qquad B.\ 5 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 7$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 253 (Matija, gimnazija)**

Koji broj je rješenje jednadžbe $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot n^2-3$? Napomena: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

$A.\ n=3 \qquad B.\ n=4 \qquad C.\ n=5 \qquad D.\ n=6$

**Rješenje 253**

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1! = 1,
2! = 1 · 2,
3! = 1 · 2 · 3,
4! = 1 · 2 · 3 · 4,
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)!\cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

9! = 8! · 9,
9! = 7! · 8 · 9,
9! = 6! · 7 · 8 · 9,
9! = 5! · 6 · 7 · 8 · 9,
9! = 4! · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 itd.

n! = (n – 1)! · n,
n! = (n – 2)! · (n – 1) · n,
n! = (n – 3)! · (n – 2) · (n – 1) · n,
n! = (n – 4)! · (n – 3) · (n – 2) · (n – 1) · n,
n! = (n – 5)! · (n – 4) · (n – 3) · (n – 2) · (n – 1) · n itd.

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot n}{2!} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow \frac{n^2 - n}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \Rightarrow \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 3 \; / \cdot 2 \Rightarrow n^2 - n = n^2 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n = n^2 - 6 \Rightarrow -n = -6 \Rightarrow -n = -6 \; / \cdot (-1) \Rightarrow n = 6.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 253**

Koji broj je rješenje jednadžbe $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 - 2$? Napomena: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

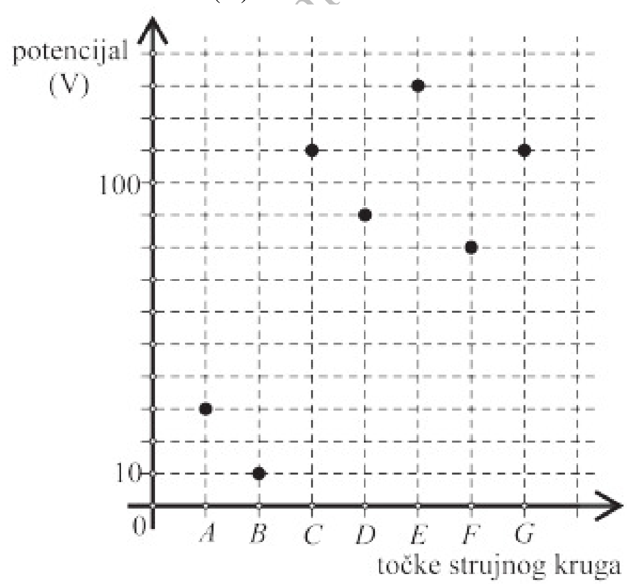
$A.\ n = 3 \qquad B.\ n = 4 \qquad C.\ n = 5 \qquad D.\ n = 6$

**Rezultat:** B.



**Zadatak 254 (4A, 4B, TUPŠ)**

Na dijagramu na osi x prikazane su točke strujnog kruga A, B, C, D, E, F i G, a na osi y prikazani su potencijali u tim točkama izraženi u voltima (V).




Napon između dviju točaka strujnog kruga jednak je razlici potencijala promatranih točaka.
a) Koliko volti iznosi napon između točaka C i F?
b) Između kojih dviju točaka strujnog kruga je napon jednak 60 V?

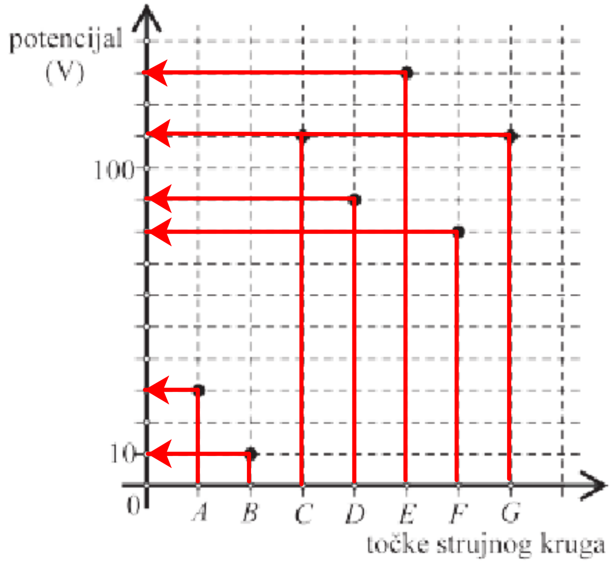
**Rješenje 254**

Ponovimo!

Napon između dviju točaka strujnog kruga jednak je razlici potencijala promatranih točaka. Na primjer, napon između točaka X i Y strujnog kruga jednak je:

$$U_{XY} = \varphi_X - \varphi_Y.$$

Najprije na dijagramu odredimo potencijale zadanih točaka strujnog kruga.




$\varphi_A = 30\ V$ , $\varphi_B = 10\ V$ , $\varphi_C = 110\ V$ , $\varphi_D = 90\ V$ , $\varphi_E = 130\ V$ , $\varphi_F = 80\ V$ , $\varphi_G = 110\ V$

a) Napon između točaka C i F iznosi:

$$U_{CF} = \varphi_C - \varphi_F = 110\ V - 80\ V = 30\ V.$$

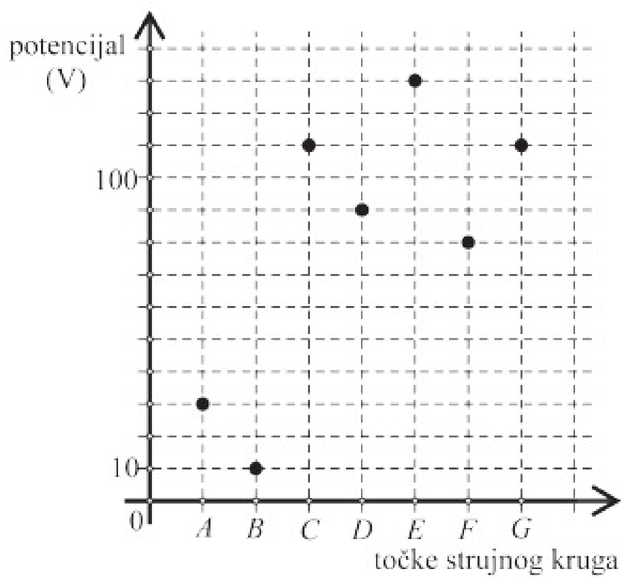
b) Vrijednost napona 60 V je između točaka A i D.

$$U_{DA} = \varphi_D - \varphi_A = 90\ V - 30\ V = 60\ V.$$



**Vježba 254**

Na dijagramu na osi x prikazane su točke strujnog kruga A, B, C, D, E, F i G, a na osi y prikazani su potencijali u tim točkama izraženi u voltima (V).




Napon između dviju točaka strujnog kruga jednak je razlici potencijala promatranih točaka. Koliko volti iznosi napon između točaka A i G?

**Rezultat:** 80 V.

**Zadatak 255 (Zlatko, srednja škola)**

Napišite neki prirodni broj koji je veći od 2014 i koji pri dijeljenju s 11 daje ostatak 10.

**Rješenje 255**

Ponovimo!

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo kvocijentom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \;\text{ i }\; 0 \le r < b,\; q \text{ je kvocijent, } r \text{ je ostatak}.$$

Skup prirodnih brojeva u matematici označavamo velikim slovom N. To su pozitivni cijeli brojevi. U slučaju da skup sadrži nulu označavamo ga indeksom 0.

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Svaki prirodni broj koji je djeljiv brojem 11 i ima ostatak 10 može se zapisati u obliku izraza

$$11 \cdot k + 10,$$

gdje je $k \in N_0$. Traženi prirodni brojevi moraju biti veći od 2014 pa vrijedi nejednadžba:

$$11 \cdot k + 10 > 2014 \Rightarrow 11 \cdot k > 2014 - 10 \Rightarrow 11 \cdot k > 2004 \Rightarrow 11 \cdot k > 2004 \;/:11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k > 182.18.$$

Dakle, za k = 183 izračuna se najmanji prirodni broj koji zadovoljava uvjet zadatka:

$$11 \cdot k + 10 = 11 \cdot 183 + 10 = 2023.$$

Ostali brojevi dobiju se pribrajanjem broja 11 pa slijedi niz:

$$2023,\; 2034,\; 2045,\; 2056,\; 2067,\; 2078,\; 2089,\; \ldots.$$

Ukratko, rješenje su prirodni brojevi oblika

$$2023 + 11 \cdot k,\; k \in N_0.$$



**Vježba 255**

Napišite neki prirodni broj koji je veći od 2015 i koji pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 6.

**Rezultat:** $2022 + 7 \cdot k,\; k \in N_0.$

**Zadatak 256 (Branka, srednja škola)**

Koliki je **zbroj** svih cijelih brojeva za koje vrijedi $-\frac{1}{3} < \frac{x}{6} < \frac{5}{6}$?

*A.* 3 *B.* 5 *C.* 7 *D.* 9

**Rješenje 256**

Ponovimo!

$$a < b < c \;,\; n > 0 \Rightarrow a \cdot n < b \cdot n < c \cdot n.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

Preoblikujemo nejednakost:

$$-\frac{1}{3}<\frac{x}{6}<\frac{5}{6} \Rightarrow -\frac{1}{3}<\frac{x}{6}<\frac{5}{6} \ /\cdot 6 \Rightarrow -\frac{1}{3}\cdot 6<\frac{x}{6}\cdot 6<\frac{5}{6}\cdot 6 \Rightarrow -\frac{1}{3}\cdot 6<\frac{x}{6}\cdot 6<\frac{5}{6}\cdot 6 \Rightarrow -2<x<5.$$

Cijeli brojevi su:

$$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Njihov zbroj iznosi:

$$-1+0+1+2+3+4=-1+0+1+2+3+4=9.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 256**

Koliki je **zbroj** svih cijelih brojeva za koje vrijedi $-\frac{1}{3}<\frac{x}{6}<\frac{7}{6}$?

$A.\ 20 \qquad B.\ 15 \qquad C.\ 12 \qquad D.\ 10$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 257 (Mislav, tehnička škola)**

Vrijednost zbroja 0.636363 … + 0.531531531 … je jednaka

$$A.\ \frac{1426}{1221} \qquad B.\ \frac{1426}{1331} \qquad C.\ \frac{1424}{1221} \qquad D.\ \frac{1246}{1331}$$

**Rješenje 257**

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Bilo koji racionalan broj može se zapisati u obliku beskonačnog periodičkog decimalnog broja. Razlikujemo čisto periodičke decimalne brojeve i mješovito periodičke decimalne brojeve. Do kraja skraćeni razlomak $\frac{a}{b}$ ima kao decimalni zapis čisto periodički decimalni broj ako njegov nazivnik u svom rastavu na proste faktore ne sadrži ni faktor 2, ni faktor 5. Decimalu ili skupinu decimala koja se ponavlja zovemo perioda. Te brojeve zapisujemo tako da iznad znamenki (decimala) koje se ponavljaju stavljamo točku.

Na primjer:

$$\frac{7}{11}=7:1=0.636363...=0.\dot{6}\dot{3} \quad , \quad \frac{2}{3}=2:3=0.666666...=0.\dot{6}.$$

Čisto periodički decimalni broj piše se u obliku razlomka tako da se u brojnik napiše perioda, a u nazivnik broj koji se piše s toliko devetica koliko ima znamenaka u periodi.

$$\boxed{0.\dot{b}_1\dot{b}_2\dot{b}_3...\dot{b}_n=\frac{b_1b_2b_3...b_n}{\underbrace{999...9}_{n\text{ devetica}}}.}$$

Na primjer:

$$0.\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

1.inačica

$$0.636363...+0.531631631...=0.\dot{6}\dot{3}+0.\dot{5}\dot{3}\dot{1}=\frac{63}{99}+\frac{531}{999}=\frac{63}{99}+\frac{531}{999}=\frac{7}{11}+\frac{59}{111}=\frac{1426}{1221}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x=0.636363... \\ y=0.531531531... \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0.636363... \;/\cdot 100 \\ y=0.531531531... \;/\cdot 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100\cdot x=63.636363... \\ 1000\cdot y=531.531531531... \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100\cdot x=63+0.636363... \\ 1000\cdot y=531+0.531531531... \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0.636363... \\ y=0.531531531... \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100\cdot x=63+x \\ 1000\cdot y=531+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100\cdot x-x=63 \\ 1000\cdot y-y=531 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 99\cdot x=63 \\ 999\cdot y=531 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 99\cdot x=63 \;/:99 \\ 999\cdot y=531 \;/:999 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{63}{99} \\ y=\frac{531}{999} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{63}{99} \\ y=\frac{531}{999} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{7}{11} \\ y=\frac{59}{111} \end{array}\right\}.$$

Vrijednost zbroja je

$$x+y=\frac{7}{11}+\frac{59}{111}=\frac{1426}{1221}.$$

Odgovor je pod A.

**Vježba 257**

Vrijednost zbroja 0.545454 … + 0.612612612 … je jednaka

$A.\ \frac{1717}{1331}$ $\qquad B.\ \frac{1717}{1212}$ $\qquad C.\ \frac{1414}{1221}$ $\qquad D.\ \frac{1414}{1313}$

**Rezultat:** C.



**Zadatak 258 (Doc, gimnazija)**

Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo istim, od nule različitim brojem k, kako se promijeni zbroj?

**Rješenje 258**

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je zadano n pribrojnika čiji je zbroj s.

$$s=a_1+a_2+a_3+...+a_n.$$

Pomnožimo li svaki pribrojnik brojem k dobit ćemo zbroj $s_1$ za koji vrijedi:

$$s_1=k\cdot a_1+k\cdot a_2+k\cdot a_3+...+k\cdot a_n \Rightarrow s_1=k\cdot(a_1+a_2+a_3+...+a_n) \Rightarrow s_1=k\cdot s.$$

Zbroj se poveća k puta.

**Vježba 258**

Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo brojem 5 kako se promijeni zbroj?

**Rezultat:** Zbroj se poveća 5 puta.

**Zadatak 259 (Doc, gimnazija)**

Ako svaki od n faktora pomnožimo istim, od nule različitim brojem k, kako se promijeni umnožak (produkt)?

**Rješenje 259**

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Svojstvo udruživanja ili asocijativnosti
Za svaka tri realna broja vrijedi

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Svojstvo zamjene ili komutativnosti
Za svaka dva realna broja vrijedi

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Neka je zadano n faktora čiji je umnožak p.

$$p = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Pomnožimo li svaki faktor brojem k dobit ćemo umnožak $p_1$ za koji vrijedi:

$$p_1 = (k \cdot a_1) \cdot (k \cdot a_2) \cdot (k \cdot a_3) \cdot \ldots \cdot (k \cdot a_n) \Rightarrow p_1 = k \cdot a_1 \cdot k \cdot a_2 \cdot k \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot k \cdot a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \left( \underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{\text{n - faktora}} \right) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \Rightarrow p_1 = k^n \cdot p.$$

Umnožak se poveća $k^n$ puta.

**Vježba 259**

Ako svaki od n faktora pomnožimo brojem 5, kako se promijeni umnožak (produkt)?

**Rezultat:** Umnožak se poveća $5^n$ puta.

**Zadatak 260 (Lenci, tehnička škola)**

Dokaži matematičkom indukcijom formulu:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$



**Rješenje 260**

Ponovimo!

$$a^0 = 1 \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad , \quad (-a)^{-1} = -a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.
Načelo matematičke indukcije
Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.
Dokaz matematičkom indukcijom
Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

- Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.
- Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n)

istinita tvrdnja.

- Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tada je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$1^2=(-1)^{1-1}\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2}\ \Rightarrow\ 1=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}\ \Rightarrow\ 1=1\cdot\frac{2}{2}\ \Rightarrow\ 1=\frac{2}{2}\ \Rightarrow\ 1=1.$$

ii) Pretpostavka indukcije.

Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

iii) Korak indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{iskoristimo}\\\text{pretpostavku indukcije}\end{array}\right]=$$

$$=\underbrace{\left[1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2\right]}_{\text{pretpostavka indukcije}}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=(-1)^n\cdot(-1)^{-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=(-1)^n\cdot(-1)\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{izlučimo}\\(-1)^n\cdot(n+1)\end{array}\right]=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left((-1)\cdot\frac{n}{2}+(n+1)\right)=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{2}+n+1\right)=$$

$$=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{2}+\frac{n}{1}+\frac{1}{1}\right)=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{-n+2\cdot n+2}{2}=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{n+2}{2}=$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, sa n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

**Vježba 260**

Dokaži matematičkom indukcijom formulu:

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-\ldots+(-1)^n\cdot n^2=(-1)^n\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

**Rezultat:** Dokaz analogan.