Zadatak 221 (Ana, strukovna škola)

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima zbroj znamenaka iznosi 5?

$A.\ 5 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 15 \qquad D.\ 20$

Rješenje 221

Ponovimo!

Zakon komutacije za zbrajanje

$$a + b = b + a.$$

Krenimo od najvećeg troznamenkastog broja, čiji je zbroj znamenaka jednak 5, prema najmanjem.

Broj	Sve mogućnosti		Ukupan broj mogućnosti
500	**500**	**5 + 0 + 0 = 5**	**1**
410	**410**	**4 + 1 + 0 = 5**	**4**
	401	**4 + 0 + 1 = 5**	
	140	**1 + 4 + 0 = 5**	
	104	**1 + 0 + 4 = 5**	
320	**320**	**3 + 2 + 0 = 5**	**4**
	302	**3 + 0 + 2 = 5**	
	230	**2 + 3 + 0 = 5**	
	203	**2 + 0 + 3 = 5**	
311	**311**	**3 + 1 + 1 = 5**	**3**
	131	**1 + 3 + 1 = 5**	
	113	**1 + 1 + 3 = 5**	
221	**221**	**2 + 2 + 1 = 5**	**3**
	212	**2 + 1 + 2 = 5**	
	122	**1 + 2 + 2 = 5**	
			15

Ukupno ima 15 brojeva. Odgovor je pod C.

Vježba 221

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima zbroj znamenaka iznosi 4?

$A.\ 5 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 15 \qquad D.\ 20$

Rezultat: B.

Zadatak 222 (PC, srednja škola)

Koliki je broj troznamenkastih brojeva kojima je prva znamenka jednaka trostrukoj trećoj?

Rješenje 222

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b trostruko veći od broja a?

$$b = 3 \cdot a.$$

Troznamenkasti brojevi kojima je prva znamenka jednaka trostrukoj trećoj mogu biti:

$$3\square 1 \quad , \quad 6\square 2 \quad , \quad 9\square 3.$$

Umjesto znaka □ možemo svugdje staviti znamenke: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3☐1	6☐2	9☐3
$\square \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$\square \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$\square \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Postoji 10 brojeva.	Postoji 10 brojeva.	Postoji 10 brojeva.

Ukupno će biti

$$3 \cdot 10 = 30$$

brojeva.

Vježba 222

Koliki je broj troznamenkastih brojeva kojima je prva znamenka jednaka dvostrukoj trećoj?

Rezultat: 40.

Zadatak 223 (Miroslav, srednja škola)

Odredi koji je broj manji: $6 \cdot \sqrt{3}$ ili $\sqrt{109}$.

Rješenje 223

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad , \quad a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad , \quad a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n.$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

1.inačica

Stavimo da je $a = 6 \cdot \sqrt{3}$ i $b = \sqrt{109}$.

Njihovim kvadriranjem dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot \sqrt{3} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot \sqrt{3} \ /^2 \\ b = \sqrt{109} \ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = \left(6 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \\ b^2 = \left(\sqrt{109}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 6^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ b^2 = 109 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 36 \cdot 3 \\ b^2 = 109 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 108 \\ b^2 = 109 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow a < b \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{3} < \sqrt{109}.$$

2.inačica

Stavimo da je $a = 6 \cdot \sqrt{3}$ i $b = \sqrt{109}$.

Faktor ispred korijena unesemo pod znak korijena.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot \sqrt{3} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{6^2 \cdot 3} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{36 \cdot 3} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{108} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{108} < \sqrt{109} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < b \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{3} < \sqrt{109}.$$

3.inačica

Stavimo da je $a = 6 \cdot \sqrt{3}$ i $b = \sqrt{109}$.

Izračunamo oba korijena na nekoliko decimala i usporedimo ih.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot \sqrt{3} \\ b = \sqrt{109} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot 1.7321 \\ b = 10.4403 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 10.3926 \\ b = 10.4403 \end{array}\right\} \Rightarrow a < b \Rightarrow 6 \cdot \sqrt{3} < \sqrt{109}.$$

Vježba 223

Odredi koji je broj manji: $2 \cdot \sqrt{5}$ ili $\sqrt{19}$.

Rezultat: $\sqrt{19} < 2 \cdot \sqrt{5}$.

Zadatak 224 (Ivona, gimnazija)

Aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka je 10. Ako se iz skupa izostavi broj 24, tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 1. Koliko brojeva sadrži taj skup?

Rješenje 224

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neka je x zbroj n brojeva među kojima je i broj 24. Budući da je aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka 10, slijedi:

$$\frac{x}{n} = 10.$$

Izostavimo li iz skupa broj 24, tada zbroj iznosi:

$$x - 24.$$

Ako se iz skupa izostavi broj 24, (ostalo je n – 1 brojeva) tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 1 pa vrijedi:

$$\frac{x-24}{n-1} = 10 - 1 \Rightarrow \frac{x-24}{n-1} = 9.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo broj n elemenata skupa.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{n} = 10 \\ \frac{x-24}{n-1} = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{n} = 10 \;/\cdot n \\ \frac{x-24}{n-1} = 9 \;/\cdot (n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \cdot n \\ x - 24 = 9 \cdot (n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot n - 24 = 9 \cdot (n-1) \Rightarrow 10 \cdot n - 24 = 9 \cdot n - 9 \Rightarrow 10 \cdot n - 9 \cdot n = -9 + 24 \Rightarrow n = 15.$$

Vježba 224

Aritmetička sredina skupa od n brojeva među kojima je i broj 24 jednaka je 10. Ako se iz skupa izostavi broj 24, tada se aritmetička sredina ostatka skupa umanji za 2. Koliko brojeva sadrži taj skup?

Rezultat: 8.

Zadatak 225 (Ivona, gimnazija)

Zbroj 5 uzastopnih neparnih brojeva je 2545. Koji su to brojevi?

Rješenje 225

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Brojevi:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

su neparni prirodni brojevi. Uočimo da je razlika dva susjedna neparna prirodna broja jednaka 2. Kako zapisujemo neparne prirodne brojeve u općem obliku?

$$2 \cdot n - 1.$$

1.inačica

Zbroj 5 uzastopnih neparnih brojeva je 2545 pa vrijedi:

$$(2 \cdot n - 1) + (2 \cdot n + 1) + (2 \cdot n + 3) + (2 \cdot n + 5) + (2 \cdot n + 7) = 2545 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-1+2\cdot n+1+2\cdot n+3+2\cdot n+5+2\cdot n+7=2545\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-1+2\cdot n+1+2\cdot n+3+2\cdot n+5+2\cdot n+7=2545\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+3+2\cdot n+5+2\cdot n+7=2545\ \Rightarrow\ 10\cdot n+15=2545\ \Rightarrow\ 10\cdot n=2545-15\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10\cdot n=2530\ \Rightarrow\ 10\cdot n=2530\ /:10\ \Rightarrow\ n=253.$$

To su brojevi:

n = 253	
$2\cdot n-1$	$2\cdot n-1=2\cdot 253-1=506-1=505$
$2\cdot n+1$	$2\cdot n+1=2\cdot 253+1=506+1=507$
$2\cdot n+3$	$2\cdot n+3=2\cdot 253+3=506+3=509$
$2\cdot n+5$	$2\cdot n+5=2\cdot 253+5=506+5=511$
$2\cdot n+7$	$2\cdot n+7=2\cdot 253+7=506+7=513$

505, 507, 509, 511, 513.

2.inačica

Zbroj 5 uzastopnih neparnih brojeva je 2545 pa vrijedi:

$$(2\cdot n-3)+(2\cdot n-1)+(2\cdot n+1)+(2\cdot n+3)+(2\cdot n+5)=2545\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-3+2\cdot n-1+2\cdot n+1+2\cdot n+3+2\cdot n+5=2545\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-3+2\cdot n-1+2\cdot n+1+2\cdot n+3+2\cdot n+5=2545\ \Rightarrow\ 2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+5=2545\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10\cdot n+5=2545\ \Rightarrow\ 10\cdot n=2545-5\ \Rightarrow\ 10\cdot n=2540\ \Rightarrow\ 10\cdot n=2540\ /:10\ \Rightarrow\ n=254.$$

To su brojevi:

n = 254	
$2\cdot n-3$	$2\cdot n-3=2\cdot 254-3=508-3=505$
$2\cdot n-1$	$2\cdot n-1=2\cdot 254-1=508-1=507$
$2\cdot n+1$	$2\cdot n+1=2\cdot 254+1=508+1=509$
$2\cdot n+3$	$2\cdot n+3=2\cdot 254+3=508+3=511$
$2\cdot n+5$	$2\cdot n+5=2\cdot 254+5=508+5=513$

505, 507, 509, 511, 513.

Vježba 225

Zbroj 5 uzastopnih neparnih brojeva je 525. Koji su to brojevi?

Rezultat: 101, 103, 105, 107, 109.

Zadatak 226 (Petra, gimnazija)

Koja je posljednja znamenka umnoška $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot\ ...\ \cdot 99$?

Rješenje 226

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,n,\ n+1,\ ...\}.$$

Brojevi:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

su neparni prirodni brojevi. Oni se ne mogu podijeliti brojem 2. Razlika dva susjedna neparna prirodna broja jednaka je 2.

Zakon asocijacije za množenje

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Neparni brojevi završavaju znamenkama 1, 3, 5, 7 ili 9. Uočimo da umnožak neparnih brojeva 1, 3, 5, 7 i 9 ima posljednju znamenku 5.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9=945.$$

Budući da umnožak čine neparni brojevi od 1 do 99, podijelit ćemo ih na skupine od pet faktora koji završavaju znamenkama 1, 3, 5, 7 i 9.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot\ ...\ \cdot 99=$$

$$=\underbrace{(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9)}_{=\ldots 5}\cdot\underbrace{(11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19)}_{=\ldots 5}\cdot\underbrace{(21\cdot 23\cdot 25\cdot 27\cdot 29)}_{=\ldots 5}\cdot\underbrace{(31\cdot 33\cdot 35\cdot 37\cdot 39)}_{=\ldots 5}\cdot\ \ldots\ \cdot\underbrace{(91\cdot 93\cdot 95\cdot 97\cdot 99)}_{=\ldots 5}.$$

Svaki umnožak u zagradi završava znamenkom 5 pa i zadani umnožak ima posljednju znamenku 5.

Vježba 226

Koja je posljednja znamenka umnoška $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot\ \ldots\ \cdot 89$?

Rezultat: 5.

Zadatak 227 (Petra, gimnazija)

Odredi posljednju znamenku zbroja 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + 99!.

Rješenje 227

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1! = 1,
2! = 1 · 2,
3! = 1 · 2 · 3,
4! = 1 · 2 · 3 · 4,
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a=k\cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=k \quad \text{ili} \quad a:b=k.$$

Važno je uočiti da 5! i sve veće faktorijele imaju posljednju znamenku 0. Na primjer,

$$5!=120 \quad , \quad 6!=720 \quad , \quad 7!=5040 \quad , \quad 8!=40320 \ \ itd.$$

Tada je:

$$1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+99!=1+2+6+24+120+720+5040+40320+\ldots=$$

$$=(1+2)+(6+24)+120+720+5040+40320+\ldots=3+30+120+720+5040+40320+\ldots.$$

Budući da svi pribrojnici, osim prvog broja 3, imaju posljednju znamenku 0, posljednja znamenka je 3.
Ili stručnije:

$$1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+99!=1+2+6+24+120+720+5040+40320+\ldots=$$

$$=3+30+120+720+5040+40320+\ldots=3+10\cdot\underbrace{(3+12+72+504+4032+\ldots)}_{=k,\ k\in N}=3+10\cdot k,\ k\in N.$$

Dakle, posljednja znamenka je 3.

Vježba 227

Odredi posljednju znamenku zbroja 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + 89!.

Rezultat: 3.

Zadatak 228 (Mary, gimnazija)

S koliko nula završava umnožak $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ \ldots\ \cdot 33$?

Rješenje 228

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo

$$Z=\{\dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}.$$

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Složeni broj je broj koji ima tri ili više djelitelja.
Prosti brojevi služe za rastavljanje složenih brojeva na proste faktore. Svaki složeni broj može se na jedinstven način rastaviti na proste faktore.
Umnožak prostih brojeva 5 i 2 daje rezultat kojemu je posljednja znamenka 0.

$$5\cdot 2=10.$$

Umnožak jednakih brojeva pišemo i u kraćem obliku, tj. kao potenciju.Neka je a pozitivan realan broj, a n prirodan broj. Tada je

$$a^{n}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{n-puta}.\qquad(\text{čitamo: a na entu})$$

Broj a je baza, a broj n eksponent potencije a^n.
Funkcija najveće cijelo od x
Za realan broj x najveće cijelo od x je najveći cijeli broj koji nije veći od x, a označava se s $\lfloor x\rfloor$.
Na primjer,

$$\lfloor 6.18\rfloor=6\quad,\quad\lfloor 1.29\rfloor=1\quad,\quad\lfloor 0.73\rfloor=0\quad,\quad\lfloor 0\rfloor=0\quad,\quad\lfloor 8\rfloor=8\quad,\quad\lfloor -2.56\rfloor=-3.$$

Ako se traži eksponent s kojim prost broj p ulazi u umnožak

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ \dots\ \cdot n$$

vrijedi formula

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^{3}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^{4}}\right\rfloor+\dots.$$

Ovaj red ima konačan broj članova jer od nekog k dalje je

$$0<\frac{n}{p^{k}}<1$$

pa je za taj k i sve veće od njega

$$\left\lfloor\frac{n}{p^{k}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{p^{k+2}}\right\rfloor=\dots=0.$$

1.inačica

Uočimo da je u umnošku $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ \dots\ \cdot 33$ samo broj 2 paran prost broj. Umnožak će završiti sa onoliko nula koliki je eksponent broja 5 u rastavu umnoška na proste faktore.

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ \dots\ \cdot 33=$$

$$=1\cdot\ \dots\ \cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 10\cdot\ \dots\ \cdot 15\cdot\ \dots\ \cdot 20\cdot\ \dots\ \cdot 25\cdot\ \dots\ \cdot 30\cdot\ \dots\ \cdot 33=$$

$$=1\cdot\ \dots\ \cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 2\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 3\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 4\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 5\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 6\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 33=$$

$$=1\cdot\ \dots\ \cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 2\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 3\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 4\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 5\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 6\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot 33.$$

Budući da se u rastavu zadanog umnoška na proste faktore broj 5 pojavljuje sedam puta, umnožak završava sa sedam nula.

2.inačica

Uočimo da je u umnošku $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ \dots\ \cdot 33$ samo broj 2 paran prost broj. Umnožak će završiti sa onoliko nula koliki je eksponent broja 5 u rastavu umnoška na proste faktore. Računamo traženi eksponent.

$$\left\lfloor\frac{33}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{33}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{33}{5^3}\right\rfloor+\ldots=\lfloor 6.6\rfloor+\lfloor 1.32\rfloor+\underbrace{\lfloor 0.264\rfloor+\ldots}_{=0}=6+1=7.$$

Zadani umnožak završava sa sedam nula.

Vježba 228

S koliko nula završava umnožak $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 29$?

Rezultat: Sa šest nula.

Zadatak 229 (Ivana, medicinska škola)

Izračunajte: $-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5-(-5)-5]\}.$

Rješenje 229

Ponovimo!

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo.
Ako su u zadatku računske operacije istoga stupnja računamo ih po redoslijedu kako su napisane.
Imamo li u zadatku zagrade najprije izračunamo ono što je u njima. U matematici se koriste tri vrste zagrada: okrugle, uglate i vitičaste.
Najprije računamo unutar okruglih zagrada (,), zatim unutar uglatih zagrada [,] i napokon unutar vitičastih zagrada { , }.

Predznak ispred zagrade

Ako je ispred zagrade predznak plus (ili ništa), onda se zagrada briše i nastavlja se računanje kao da nije bilo zagrade.

$+(a+b)=a+b$	$+(-a+b)=-a+b$
$+(a-b)=a-b$	$+(-a-b)=-a-b$

Ako je ispred zagrade predznak minus, zagrada se briše i svi predznaci u zagradi mijenjaju se.

$-(a+b)=-a-b$	$-(-a+b)=a-b$
$-(a-b)=-a+b$	$-(-a-b)=a+b$

Množenje cijelih brojeva

$+a\cdot(+b)=+(a\cdot b)$	$-a\cdot(+b)=-(a\cdot b)$
$+a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$	$-a\cdot(-b)=+(a\cdot b)$

$$-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5-(-5)-5]\}=\left[\begin{array}{l}\text{prvo riješimo}\\ \text{okruglu zagradu}\end{array}\right]=-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5-(-5)-5]\}=$$

$$=-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5+5-5]\}=-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5+5-5]\}=-5-5\cdot\{-5-5\cdot[-5]\}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{riješimo uglatu}\\ \text{zagradu}\end{array}\right]=-5-5\cdot\{-5+25\}=\left[\begin{array}{l}\text{riješimo vitičastu}\\ \text{zagradu}\end{array}\right]=-5-5\cdot 20=-5-100=-105.$$

Vježba 229

Izračunajte: $-2-2\cdot\{-2-2\cdot[-2-(-2)-2]\}.$

Rezultat: – 6.

Zadatak 230 (Ivana, medicinska škola)

Izračunajte: $\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}.$

Rješenje 230

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo.
Ako su u zadatku računske operacije istoga stupnja računamo ih po redoslijedu kako su napisane.
Imamo li u zadatku zagrade najprije izračunamo ono što je u njima. U matematici se koriste tri vrste zagrada: okrugle, uglate i vitičaste.
Najprije računamo unutar okruglih zagrada (,), zatim unutar uglatih zagrada [,] i napokon unutar vitičastih zagrada { , }.

Predznak ispred zagrade

Ako je ispred zagrade predznak plus, onda se zagrada briše i nastavlja se računanje kao da nije bilo zagrade.

$+(a+b)=a+b$	$+(-a+b)=-a+b$
$+(a-b)=a-b$	$+(-a-b)=-a-b$

Ako je ispred zagrade predznak minus, zagrada se briše i svi predznaci u zagradi mijenjaju se.

$-(a+b)=-a-b$	$-(-a+b)=a-b$
$-(a-b)=-a+b$	$-(-a-b)=a+b$

1.inačica

Najprije računamo unutar okrugle zagrade (,), zatim unutar uglate zagrade [,] i napokon unutar vitičaste zagrade { , }.

$$\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\frac{4-3}{6}-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\frac{-12-4-9}{24}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\frac{-25}{24}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}-\frac{25}{24}-\frac{3}{4}=\frac{9-25-18}{24}=-\frac{34}{24}=-\frac{34}{24}=-\frac{17}{12}.$$

2.inačica

$$\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Ispred okrugle zagrade je predznak minus, zagrada}\\ \text{se briše i svi predznaci u zagradi mijenjaju se}\end{array}\right]=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}=\left[\begin{array}{l}\text{Ispred uglate zagrade je predznak plus, zagrada}\\ \text{se briše i nastavlja se računanje kao da nije bilo zagrade}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{-8-9}{12}=-\frac{17}{12}.$$

Vježba 230

Izračunajte: $\frac{3}{8}+\left[-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-\frac{3}{4}.$

Rezultat: $-\frac{17}{12}.$

Zadatak 231 (Ivana, medicinska škola)

Izračunajte: $\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}-\frac{1}{5}\right):\left(1+\frac{1}{5}\right).$

Rješenje 231

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo. Ako su u zadatku računske operacije istoga stupnja računamo ih po redoslijedu kako su napisane.

$$\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{10}-\frac{11}{15}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}-\frac{1}{5}\right):\left(1+\frac{1}{5}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{od nazivnika 5, 10 i 15 najmanji zajednički nazivnik je 30}\\ \text{od nazivnika 3 i 5 najmanji zajednički nazivnik je 15}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\frac{\frac{18+21-22}{30}}{\frac{10-9}{15}}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{\frac{17}{30}}{\frac{1}{15}}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{5}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{od nazivnika 1 i 5 najmanji}\\ \text{zajednički nazivnik je 5}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\frac{\frac{17}{30}}{\frac{1}{15}}-\frac{1}{5}\right):\frac{5+1}{5}=\left(\frac{\frac{17}{2}}{\frac{1}{1}}-\frac{1}{5}\right):\frac{6}{5}=\left(\frac{17}{2}-\frac{1}{5}\right):\frac{6}{5}=\left[\begin{array}{l}\text{od nazivnika 2 i 5 najmanji}\\ \text{zajednički nazivnik je 10}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{85-2}{10}:\frac{6}{5}=\frac{83}{10}:\frac{6}{5}=\frac{83}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{83}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{83}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{83}{12}=\left[\begin{array}{l}83:12=6\\ 11\end{array}\right]=6\frac{11}{12}.$$

Vježba 231

Izračunajte: $\left(\dfrac{\frac{11}{15}-\frac{3}{5}-\frac{7}{10}}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}\right):\left(1+\frac{1}{5}\right).$

Rezultat: $6\frac{11}{12}.$

Zadatak 232 (Petra, gimnazija)

Ako je $x+y=\frac{1}{5}$, $x\cdot y=-\frac{3}{5}$, koliko je x^2+y^2?

Rješenje 232

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=(x+y)^2\Rightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2\cdot x\cdot y.$$

1.inačica

$$x+y=\frac{1}{5}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{kvadriramo}\\\text{jednadžbu}\end{matrix}\right]\Rightarrow x+y=\frac{1}{5}\ /^2\Rightarrow(x+y)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=\frac{1}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{25}-2\cdot x\cdot y\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{uvjet}\\x\cdot y=-\frac{3}{5}\end{matrix}\right]\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{25}-2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{25}+\frac{6}{5}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1+30}{25}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{31}{25}.$$

2.inačica

Uporabit ćemo formulu za kvadrat zbroja.

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=(x+y)^2\Rightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2\cdot x\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{uvjeti}\\x+y=\frac{1}{5}\ ,\ x\cdot y=-\frac{3}{5}\end{matrix}\right]\Rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{25}+\frac{6}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{1+30}{25}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{31}{25}.$$

Vježba 232

Ako je $x+y=\frac{1}{5}$, $x\cdot y=-\frac{2}{5}$, koliko je x^2+y^2?

Rezultat: $\frac{21}{25}.$

Zadatak 233 (Maturant, gimnazija)

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednak je 18. Kolika je aritmetička sredina drugih korijena tih brojeva?

A. 2 *B.* 3 *C.* 4 *D.* 5

Rješenje 233

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A = \frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G = \sqrt{a \cdot b}.$$

Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\frac{x+y}{2} + \sqrt{x \cdot y} = 18 \Rightarrow \frac{x+y}{2} + \sqrt{x \cdot y} = 18 \; / \cdot 2 \Rightarrow x + y + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} + y = 36 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 = 36 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \; / \sqrt{} = 36 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = -6 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \; / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = 3.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 233

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednak je 18. Kolika je aritmetička sredina drugih korijena tih brojeva?

A. 2   *B.* 3   *C.* 4   *D.* 5

Rezultat: C.

Zadatak 234 (Sanja, ekonomska škola)

U I^C razredu je 28 učenika. Na pisanom ispitu iz matematike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 5 učenika imalo 20 bodova, a 3 učenika imali su po 18 bodova, koliki je prosjek ostalih?

Rješenje 234

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ veličine čiji se prosjek traži i imamo

f_1 veličine a_1
f_2 veličine a_2
……………..
f_n veličine a_n,

tada je prosječna vrijednost vagana (ponderirana) aritmetička sredina:

$$A_n = \frac{f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + f_3 \cdot a_3 + \ldots + f_n \cdot a_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}.$$

Neka je x prosjek bodova ostalih učenika u razredu kojih ima 20.

$$28 - (5 + 3) = 28 - 8 = 20.$$

Tada vrijedi:

$$\frac{5 \cdot 20 + 3 \cdot 18 + 20 \cdot x}{28} = 15 \Rightarrow \frac{100 + 54 + 20 \cdot x}{28} = 15 \Rightarrow \frac{154 + 20 \cdot x}{28} = 15 \Rightarrow \frac{154 + 20 \cdot x}{28} = 15 \; / \cdot 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 154+20\cdot x=420 \Rightarrow 20\cdot x=420-154 \Rightarrow 20\cdot x=266 \Rightarrow 20\cdot x=266 \,/:20 \Rightarrow x=13.3.$$

Vježba 234

U I^C razredu je 14 učenika. Na pisanom ispitu iz matematike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 5 učenika imalo 10 bodova, a 3 učenika imali su po 9 bodova, koliki je prosjek ostalih?

Rezultat: 22.17.

Zadatak 235 (Sanja, ekonomska škola)

Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 2, zbroj njihovih kvadrata je 8. Aritmetička sredina tih brojeva iznosi:

$$A.\ 2 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 16$$

Rješenje 235

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\ne 0 \ , \ n\ne 1.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A=\frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G=\sqrt{a\cdot b}.$$

1.inačica

Neka su x i y traženi pozitivni realni brojevi. Za njihovu geometrijsku sredinu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} G=\sqrt{x\cdot y} \\ G=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}=2 \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}=2 \,/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x\cdot y}\right)^2=2^2 \Rightarrow x\cdot y=4.$$

Zbroj kvadrata brojeva x i y je 8 pa vrijedi jednadžba:

$$x^2+y^2=8.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot y=4 \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\cdot y=4 \,/\cdot\frac{1}{x} \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{4}{x} \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{16}{x^2}=8 \Rightarrow x^2+\frac{16}{x^2}=8 \,/\cdot x^2 \Rightarrow x^4+16=8\cdot x^2 \Rightarrow x^4-8\cdot x^2+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2\right)^2-8\cdot x^2+16=0 \Rightarrow \left(x^2-4\right)^2=0 \Rightarrow \left(x^2-4\right)^2=0 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x^2=4 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-2 \ \text{ne zadovoljava uvjet jer je } x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 4 \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot y = 4 \Rightarrow 2 \cdot y = 4 \;/ :2 \Rightarrow y = 2.$$

Aritmetička sredina brojeva x i y glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \;,\; y = 2 \\ A = \dfrac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{2+2}{2} \Rightarrow A = \frac{4}{2} \Rightarrow A = 2.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Neka su x i y traženi pozitivni realni brojevi. Za njihovu geometrijsku sredinu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} G = \sqrt{x \cdot y} \\ G = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = 2 \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = 2 \;/^{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x \cdot y}\right)^{2} = 2^{2} \Rightarrow x \cdot y = 4.$$

Zbroj kvadrata brojeva x i y je 8 pa vrijedi jednadžba:

$$x^{2} + y^{2} = 8.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo aritmetičku sredinu $\frac{x+y}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 4 \\ x^{2} + y^{2} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 4 \;/ \cdot 2 \\ x^{2} + y^{2} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x \cdot y = 8 \\ x^{2} + y^{2} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow x^{2} + 2 \cdot x \cdot y + y^{2} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y)^{2} = 16 \Rightarrow (x+y)^{2} = 16 \;/ \sqrt{\;} \Rightarrow (x+y)_{1,2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x + y = -4 \text{ ne zadovoljava uvjet} \\ \qquad \text{jer je } x > 0,\; y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow x + y = 4 \;/ \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = 2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 235

Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 3, zbroj njihovih kvadrata je 18. Aritmetička sredina tih brojeva iznosi:

$A.\ 3 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 9 \qquad D.\ 18$

Rezultat: A.

Zadatak 236 (Ilija, srednja škola)

Znamenka jedinica nekog broja je 0. Obrišemo li tu znamenku broj se smanji za 27405. Koji je to broj?

Rješenje 236

Ponovimo!

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što ju nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^{n} + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^{2} + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Ako se prirodnom broju x dopiše zdesna znamenka y, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, možemo pisati

$$\overline{xy} = 10 \cdot x + y.$$

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

Neka je n višeznamenkasti prirodni broj kome je zdesna dopisana 0. Tada vrijedi:

$$\overline{n0} = 10 \cdot n + 0.$$

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\overline{n0} - n = 27\,405 \Rightarrow 10 \cdot n + 0 - n = 27\,405 \Rightarrow 9 \cdot n = 27\,405 \Rightarrow 9 \cdot n = 27\,405 \; /:9 \Rightarrow n = 3045.$$

Taj broj glasi 30 450.

Vježba 236

Znamenka jedinica nekog broja je 0. Obrišemo li tu znamenku broj se smanji za 225. Koji je to broj?

Rezultat: 250.

Zadatak 237 (Tomislav, srednja škola)

Koliko iznosi član razvoja $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ koji ne sadrži x?

Rješenje 237

Ponovimo!

$$a^0 = 1 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in R, n \in N$ vrijedi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Opći član u razvoju izraza $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ iznosi:

$$\binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot \left(x^{-1}\right)^k = \binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot x^{-k} = \binom{6}{k} \cdot x^{6-k-k} = \binom{6}{k} \cdot x^{6-2 \cdot k}.$$

Budući da tražimo član razvoja koji ne sadrži x, izračunat ćemo onaj k za koji je eksponent jednak nuli ($x^0 = 1$).

$$6 - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow -2 \cdot k = -6 \Rightarrow -2 \cdot k = -6 \; /:(-2) \Rightarrow k = 3.$$

To je četvrti član u razvoju, a iznosi:

$$\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=\frac{5\cdot4}{1}=5\cdot4=20.$$

Vježba 237

Koliko iznosi član razvoja $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ koji ne sadrži x?

Rezultat: – 20.

Zadatak 238 (Marko, srednja škola)

Koliko je $9.25\cdot10^{-3}$ m^2 izraženo u cm^2?

$A.\ 9.25\ cm^2 \qquad B.\ 92.5\ cm^2 \qquad C.\ 925\ cm^2 \qquad D.\ 9\,250\ cm^2$

Rješenje 238

Ponovimo!

$$1\ m=100\ cm=10^2\ cm \quad , \quad 1\ m^2=10\,000\ cm^2=10^4\ cm^2.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^1=a.$$

Dekadske jedinice su brojevi koji se dobiju množenjem broja 10 samim sobom. Dekadske jedinice su brojevi: 10, 100, 1000, 10000, 100000 itd. Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadski broj ima nula.

$$9.25\cdot10^{-3}\ m^2=9.25\cdot10^{-3}\cdot10^4\ cm^2=9.25\cdot10^1\ cm^2=9.25\cdot10\ cm^2=92.5\ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 238

Koliko je $9.25\cdot10^{-2}$ m^2 izraženo u cm^2?

$A.\ 9.25\ cm^2 \qquad B.\ 92.5\ cm^2 \qquad C.\ 925\ cm^2 \qquad D.\ 9\,250\ cm^2$

Rezultat: C.

Zadatak 239 (Sanja, gimnazija)

Koristeći se nejednakostima između aritmetičke i geometrijske sredine dokažite nejednakost $(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9\cdot a\cdot b\cdot c.$

Rješenje 239

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ ...\ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ ...\ +a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ ...\ , a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ ...\ \cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A\geq G \ \Rightarrow\ \frac{a_1+a_2+a_3+\ ...\ +a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ ...\ \cdot a_n}.$$

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \\ a,\, b,\, c,\, d > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot d \quad , \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , \quad a^{1} = a \quad , \quad a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}.$$

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n} \quad , \quad \sqrt[3]{a^{3}} = a.$$

Budući da je aritmetička sredina veća ili jednaka geometrijskoj sredini:

- za brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \; / \cdot 3 \Rightarrow a+b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c},$$

- za brojeve a^2, b^2, c^2 vrijedi

$$\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}} \Rightarrow \frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}} \; / \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{2}+b^{2}+c^{2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \\ a^{2}+b^{2}+c^{2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{nekednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 9 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot a^{2} \cdot b^{2} \cdot c^{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 9 \cdot \sqrt[3]{a^{3} \cdot b^{3} \cdot c^{3}} \Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 9 \cdot \sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 9 \cdot \sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^{3}} \Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \geq 9 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Dokaz gotov.

Vježba 239

Koristeći se nejednakostima između aritmetičke i geometrijske sredine dokažite nejednakost $(a+b+c+d) \cdot \left(a^{3}+b^{3}+c^{3}+d^{3}\right) \geq 16 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 240 (Goran, strukovna škola)

Umnožak $a^3 \cdot b^3$ brojeva $a = 5 \cdot 10^8$ i $b = 0.04 \cdot 10^{-5}$ jednak je:

$$A.\ 8 \cdot 10^{6} \qquad B.\ 5 \cdot 10^{6} \qquad C.\ 4 \cdot 10^{5} \qquad D.\ 10^{7}$$

Rješenje 240

Ponovimo!

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n} \quad , \quad a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{1} = a.$$

Svaki realan broj možemo napisati u tzv. standardnom obliku, tj. kao umnožak broja iz intervala $\left[1, 10\right\rangle$ i potencije broja 10. Na primjer,

$$325 = 3.25 \cdot 10^{2} \quad , \quad 41700 = 4.17 \cdot 10^{4} \quad , \quad 0.0457 = 4.57 \cdot 10^{-2} \quad , \quad 0.00053 = 5.3 \cdot 10^{-4}.$$

1.inačica

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3 = \begin{bmatrix} a = 5 \cdot 10^8 \\ b = 0.04 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} = \left(5 \cdot 10^8 \cdot 0.04 \cdot 10^{-5}\right)^3 = \left(5 \cdot 0.04 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}\right)^3 =$$

$$= \left(0.2 \cdot 10^3\right)^3 = \left(0.2 \cdot 10^1 \cdot 10^2\right)^3 = \left(0.2 \cdot 10 \cdot 10^2\right)^3 = \left(2 \cdot 10^2\right)^3 = 2^3 \cdot \left(10^2\right)^3 = 8 \cdot 10^6.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$a^3 \cdot b^3 = \begin{bmatrix} a = 5 \cdot 10^8 \\ b = 0.04 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} = \left(5 \cdot 10^8\right)^3 \cdot \left(0.04 \cdot 10^{-5}\right)^3 = \left(5 \cdot 10^8\right)^3 \cdot \left(4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5}\right)^3 =$$

$$= \left(5 \cdot 10^8\right)^3 \cdot \left(4 \cdot 10^{-7}\right)^3 = \left(5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-7}\right)^3 = \left(5 \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-7}\right)^3 = \left(20 \cdot 10^1\right)^3 =$$

$$= (20 \cdot 10)^3 = 200^3 = (2 \cdot 100)^3 = \left(2 \cdot 10^2\right)^3 = 2^3 \cdot \left(10^2\right)^3 = 8 \cdot 10^6.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 240

Umnožak $a^3 \cdot b^3$ brojeva $a = 5 \cdot 10^8$ i $b = 0.02 \cdot 10^{-5}$ jednak je:

$A.\ 4 \cdot 10^6 \qquad B.\ 3 \cdot 10^6 \qquad C.\ 2 \cdot 10^6 \qquad D.\ 10^6$

Rezultat: D.