Zadatak 201 (Silvy, gimnazija)

Lucija je na prvoj zadaći osvojila 64 boda, na drugoj 76, a na trećoj 91 bod. Koliko je bodova Lucija postigla na sljedećoj zadaći ako joj se prosjek bodova, u odnosu na prosjek prvih triju zadaća, povećao za 3 boda?

$$A.\ 88 \qquad B.\ 89 \qquad C.\ 90 \qquad D.\ 91$$

Rješenje 201

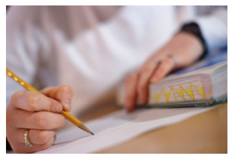
Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n}{n}.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$



Prosjek bodova prve tri zadaće je

$$A_3 = \frac{64 + 76 + 91}{3} \Rightarrow A_3 = \frac{231}{3} \Rightarrow A_3 = 77.$$

Neka je x broj bodova koji je Lucija dobila u četvrtoj zadaći. Tada je prosjek za četiri zadaće jednak

$$A_4 = \frac{64 + 76 + 91 + x}{4} \Rightarrow A_4 = \frac{231 + x}{4}.$$

Iz uvjeta zadatka dobije se

$$A_4 = A_3 + 3 \Rightarrow \frac{231 + x}{4} = 77 + 3 \Rightarrow \frac{231 + x}{4} = 80 \Rightarrow \frac{231 + x}{4} = 80 \ / \cdot 4 \Rightarrow 231 + x = 320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 320 - 231 \Rightarrow x = 89.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 201

Lucija je na prvoj zadaći osvojila 60 boda, na drugoj 80, a na trećoj 91 bod. Koliko je bodova Lucija postigla na sljedećoj zadaći ako joj se prosjek bodova, u odnosu na prosjek prvih triju zadaća, povećao za 13 boda?

$$A.\ 101 \qquad B.\ 120 \qquad C.\ 129 \qquad D.\ 135$$

Rezultat: C.

Zadatak 202 (Ivana, strukovna škola)

Izračunaj i popuni prazna mjesta:

$$[\ 2\ ] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{dodaj recipročni} \\ \text{broj} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijeli s} \\ \left(-\frac{2}{3} : \frac{1}{9}\right) \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmi broj} \\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12} \end{array}\right] \rightarrow [\quad].$$

Rješenje 202

Ponovimo!

Za svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, postoji racionalan broj $\frac{b}{a}$ kojim treba pomnožiti $\frac{a}{b}$ da se dobije broj 1, tj.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Racionalan broj $\frac{b}{a}$ zove se recipročan broj od broja $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a\pm b}{n}=\frac{a}{n}\pm\frac{b}{n}.$$

Suprotni brojevi su brojevi koji imaju različiti predznak, a istu brojevnu vrijednost. Na primjer, suprotni su brojevi

$$9 \text{ i } -9 \quad , \quad -14 \text{ i } 14 \quad , \quad \frac{8}{5} \text{ i } -\frac{8}{5} \quad , \quad -2.5 \text{ i } 2.5.$$

Računamo postupno svaki korak.

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow[\quad].$$

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow[\quad].$$

- $2+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow[\quad].$$

- $\frac{5}{2}:\left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{2}:\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{1}\right)=\frac{5}{2}:\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{1}\right)=\frac{5}{2}:\left(-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\right)=\frac{5}{2}:\left(-\frac{6}{1}\right)=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{5}{12}.$

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow[\quad].$$

- $-\frac{5}{12}-\left(-\frac{7}{12}\right)=-\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{-5+7}{12}=\frac{2}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } \frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow\left[\,\frac{1}{6}\,\right].$$

Vježba 202

Izračunaj i popuni prazna mjesta:

$$[\,2\,]\rightarrow\begin{bmatrix}\text{dodaj recipročni}\\ \text{broj}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijeli s}\\ \left(-\frac{2}{3}:\frac{1}{9}\right)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmi broj}\\ \text{suprotan broju } -\frac{7}{12}\end{bmatrix}\rightarrow[\quad].$$

Rezultat: $-1.$

Zadatak 203 (Giulia, gimnazija)

Srednja vrijednost 15 uzastopnih prirodnih brojeva jednaka je 14. Koji je najmanji i koji je najveći od tih brojeva?

Rješenje 203

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek ili srednja vrijednost A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots\ + a_n}{n}.$$

Kako zapisati 15 uzastopnih prirodnih brojeva?

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5,\ n+6,\ n+7,\ n+8,\ n+9,\ n+10,\ n+11,\ n+12,\ n+13,\ n+14.$$

Kako zapisati 15 uzastopnih brojeva na još bolji način? ☺

$$n-7,\ n-6,\ n-5,\ n-4,\ n-3,\ n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5,\ n+6,\ n+7.$$

1.inačica

Budući da je srednja vrijednost 15 uzastopnih prirodnih brojeva jednaka je 14, vrijedi:

$$\frac{n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6+n+7+n+8+n+9+n+10+n+11+n+12+n+13+n+14}{15} = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15 \cdot n + 105}{15} = 14 \Rightarrow \frac{15 \cdot n + 105}{15} = 14 \ / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot n + 105 = 210 \Rightarrow 15 \cdot n = 210 - 105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot n = 105 \Rightarrow 15 \cdot n = 105 \ /: 15 \Rightarrow n = 7.$$

Sada računamo najmanji i najveći broj niza.

- najmanji broj je n = 7
- najveći broj je n + 14 = 7 + 14 = 21.

2.inačica

Budući da je srednja vrijednost 15 uzastopnih prirodnih brojeva jednaka je 14, vrijedi:

$$\frac{n-7+n-6+n-5+n-4+n-3+n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6+n+7}{15} = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n-7+n-6+n-5+n-4+n-3+n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6+n+7}{15} = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15 \cdot n}{15} = 14 \Rightarrow \frac{15 \cdot n}{15} = 14 \Rightarrow n = 14.$$

Sada računamo najmanji i najveći broj niza.

- najmanji broj je n – 7 = 14 – 7 = 7
- najveći broj je n + 7 = 14 + 7 = 21.

Vježba 203

Srednja vrijednost 15 uzastopnih prirodnih brojeva jednaka je 14. Koji je srednji broj?

Rezultat: 14.

Zadatak 204 (Giulia, gimnazija)

Odredi šest brojeva čija je aritmetička sredina jednaka 3, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 0.4.

Rješenje 204

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \ldots\ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek ili srednja vrijednost A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots\ + a_n}{n}.$$

Kako zapisati 6 brojeva tako da je svaki sljedeći od prethodnog veći za 0.4?

$$n,\ n+0.4,\ n+0.8,\ n+1.2,\ n+1.6,\ n+2.0.$$

Kako zapisati 6 brojeva tako da je svaki sljedeći od prethodnog veći za 0.4 na još bolji način? ☺

$$n-0.8,\ n-0.4,\ n,\ n+0.4,\ n+0.8,\ n+1.2.$$

1.inačica

Budući da je aritmetička sredina šest brojeva jednaka 3, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 0.4, vrijedi:

$$\frac{n+n+0.4+n+0.8+n+1.2+n+1.6+n+2.0}{6}=3 \Rightarrow \frac{6\cdot n+6.0}{6}=3 \Rightarrow \frac{6\cdot n+6.0}{6}=3 \;/\cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot n+6.0=18.0 \Rightarrow 6\cdot n=18.0-6.0 \Rightarrow 6\cdot n=12.0 \Rightarrow 6\cdot n=12.0 \;/:6 \Rightarrow n=2.0.$$

Traženi brojevi su:

n	n + 0.4	n + 0.8	n + 1.2	n + 1.6	n + 2.0
n = 2.0					
2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0

2.inačica

Budući da je aritmetička sredina šest brojeva jednaka 3, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 0.4, vrijedi:

$$\frac{n-0.8+n-0.4+n+n+0.4+n+0.8+n+1.2}{6}=3 \Rightarrow \frac{n-0.8+n-0.4+n+n+0.4+n+0.8+n+1.2}{6}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6\cdot n+1.2}{6}=3 \Rightarrow \frac{6\cdot n+1.2}{6}=3 \;/\cdot 6 \Rightarrow 6\cdot n+1.2=18.0 \Rightarrow 6\cdot n=18.0-1.2 \Rightarrow 6\cdot n=16.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot n=16.8 \;/:6 \Rightarrow n=2.8.$$

Traženi brojevi su:

n – 0.8	n – 0.4	n	n + 0.4	n + 0.8	n + 1.2
n = 2.8					
2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0

Vježba 204

Odredi šest brojeva čija je aritmetička sredina jednaka 6, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 0.4.

Rezultat: 5.0, 5.4, 5.8, 6.2, 6.6, 7.0.

Zadatak 205 (Giulia, gimnazija)

Koji je od brojeva 28, 30, 26, 37 i 29 aritmetička sredina ostalih četiriju?

Rješenje 205

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek ili srednja vrijednost A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Prvi slučaj

$$28=\frac{30+26+37+29}{4} \Rightarrow 28=\frac{122}{4} \Rightarrow 28\neq 30.5$$

Drugi slučaj

$$30=\frac{28+26+37+29}{4} \Rightarrow 30=\frac{120}{4} \Rightarrow 30=30$$

Broj 30 je aritmetička sredina ostalih četiriju.

Treći slučaj

$$26=\frac{28+30+37+29}{4} \Rightarrow 26=\frac{124}{4} \Rightarrow 26\neq 31$$

Četvrti slučaj

$$37=\frac{28+30+26+29}{4} \Rightarrow 37=\frac{113}{4} \Rightarrow 37\neq 28.25$$

Peti slučaj

$$29 = \frac{28 + 30 + 26 + 37}{4} \Rightarrow 29 = \frac{121}{4} \Rightarrow 29 \neq 30.25.$$

Vježba 205

Koji je od brojeva 26, 28, 29, 30 i 37 aritmetička sredina ostalih četiriju?

Rezultat: 30.

Zadatak 206 (Giulia, gimnazija)

Odredi sedam brojeva čija je aritmetička sredina 6.6, a svaki je sljedeći broj od prethodnog manji za 0.2.

Rješenje 206

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek ili srednja vrijednost A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Kako zapisati 7 brojeva tako da je svaki sljedeći od prethodnog manji za 0.2?

$$n,\ n - 0.2,\ n - 0.4,\ n - 0.6,\ n - 0.8,\ n - 1.0,\ n - 1.2.$$

Kako zapisati 7 brojeva tako da je svaki sljedeći od prethodnog manji za 0.2 na još bolji način? ☺

$$n + 0.6,\ n + 0.4,\ n + 0.2,\ n,\ n - 0.2,\ n - 0.4,\ n - 0.6.$$

1.inačica

Budući da je aritmetička sredina sedam brojeva jednaka 6.6, a svaki je sljedeći od prethodnog manji za 0.2, vrijedi:

$$\frac{n + n - 0.2 + n - 0.4 + n - 0.6 + n - 0.8 + n - 1.0 + n - 1.2}{7} = 6.6 \Rightarrow \frac{7 \cdot n - 4.2}{7} = 6.6 \Rightarrow \frac{7 \cdot n - 4.2}{7} = 6.6 \ / \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot n - 4.2 = 46.2 \Rightarrow 7 \cdot n = 46.2 + 4.2 \Rightarrow 7 \cdot n = 50.4 \Rightarrow 7 \cdot n = 50.4 \ / : 7 \Rightarrow n = 7.2.$$

Traženi brojevi su:

n	n – 0.2	n – 0.4	n – 0.6	n – 0.8	n – 1.0	n – 1.2
n = 6						
7.2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2	6.0

2.inačica

Budući da je aritmetička sredina sedam brojeva jednaka 6.6, a svaki je sljedeći od prethodnog manji za 0.2, vrijedi:

$$\frac{n + 0.6 + n + 0.4 + n + 0.2 + n + n - 0.2 + n - 0.4 + n - 0.6}{7} = 6.6 \Rightarrow$$

$$\frac{n + 0.6 + n + 0.4 + n + 0.2 + n + n - 0.2 + n - 0.4 + n - 0.6}{7} = 6.6 \Rightarrow \frac{7 \cdot n}{7} = 6.6 \Rightarrow \frac{7 \cdot n}{7} = 6.6 \Rightarrow n = 6.6.$$

Traženi brojevi su:

n + 0.6	n + 0.4	n + 0.2	n	n – 0.2	n – 0.4	n – 0.6
n = 6.6						
7.2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2	6.0

Vježba 206

Odredi sedam brojeva čija je aritmetička sredina 13.2, a svaki je sljedeći broj od prethodnog manji za 0.2.

Rezultat: 13.8,13.6,13.4,13.2,13.0,12.8,12.6.

Zadatak 207 (Mario, gimnazija)

Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo s istim, od nule različitim brojem, kako se promjeni zbroj?

Rješenje 207

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Neka je S zbroj (suma) od n pribrojnika.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ \dots \ + a_n = S.$$

Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo s istim, od nule različitim brojem, na primjer brojem k, vrijedi:

$$k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + k \cdot a_3 + k \cdot a_4 + \ \dots \ + k \cdot a_n = k \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ \dots \ + a_n) = k \cdot S.$$

Zaključak:

Ako svaki od n pribrojnika pomnožimo s istim, od nule različitim brojem i zbroj se isto množi tim brojem, tj. zbroj je toliko puta veći koliko iznosi taj broj.

Vježba 207

Ako svaki od n faktora pomnožimo s istim, od nule različitim brojem, kako se promjeni umnožak?

Rezultat: Umnožak je veći k^n puta.

Zadatak 208 (Lana, gimnazija)

Mora li umnožak iracionalnih brojeva biti iracionalan?

Rješenje 208

Ponovimo!

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo napisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$, gdje je brojnik a cijeli broj, nazivnik b prirodan broj. Simbol za skup racionalnih brojeva je Q.

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo napisati u obliku razlomka. Simbol za skup iracionalnih brojeva je I.

Umnožak iracionalnih brojeva:

- može biti iracionalan broj.

Primjer

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} \in I \\ \sqrt{3} \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} \in I.$$

- ne mora biti iracionalan broj.

Primjer

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} \in I \\ \sqrt{8} \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \notin I.$$

Vježba 208

Mora li količnik iracionalnih brojeva biti iracionalan?

Rezultat: Ne mora. $\left.\begin{array}{l} \sqrt{8} \in I \\ \sqrt{2} \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \notin I.$

Zadatak 209 (Hrvoje, gimnazija)

Ako je $n \in N$, onda svaki broj $t_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ nazivamo trokutnim brojem. Dokaži da vrijedi: $t_n^2 - t_{n-1}^2 = n^3$.

Rješenje 209

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{2^2} - \frac{((n-1) \cdot n)^2}{2^2} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 - (n-1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{n^2 \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 1\right) - \left(n^2 - 2 \cdot n + 1\right) \cdot n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^4 + 2 \cdot n^3 + n^2 - n^4 + 2 \cdot n^3 - n^2}{4} = \frac{n^4 + 2 \cdot n^3 + n^2 - n^4 + 2 \cdot n^3 - n^2}{4} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = n^3.$$

2.inačica

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{2^2} - \frac{((n-1) \cdot n)^2}{2^2} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 - (n-1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{n^2 \cdot \left[(n+1)^2 - (n-1)^2\right]}{4} = \frac{n^2 \cdot [(n+1) - (n-1)] \cdot [(n+1) + (n-1)]}{4} =$$

$$= \frac{n^2 \cdot [n+1-n+1] \cdot [n+1+n-1]}{4} = \frac{n^2 \cdot [n+1-n+1] \cdot [n+1+n-1]}{4} = \frac{n^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot n}{4} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = n^3.$$

3.inačica

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1}) \cdot (t_n + t_{n-1}) = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) - (n-1) \cdot n}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1) + (n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n - n^2 + n}{2} \cdot \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n - n^2 + n}{2} \cdot \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2 \cdot n}{2} \cdot \frac{2 \cdot n^2}{2} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = \frac{4 \cdot n^3}{4} = n^3.$$

4.inačica

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1}) \cdot (t_n + t_{n-1}) = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) =$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)-(n-1)\cdot n}{2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)+(n-1)\cdot n}{2}=\frac{n\cdot\left[(n+1)-(n-1)\right]}{2}\cdot\frac{n\cdot\left[(n+1)+(n-1)\right]}{2}=$$

$$=\frac{n\cdot[n+1-n+1]}{2}\cdot\frac{n\cdot[n+1+n-1]}{2}=\frac{n\cdot[n+1-n+1]}{2}\cdot\frac{n\cdot[n+1+n-1]}{2}=\frac{n\cdot 2}{2}\cdot\frac{n\cdot 2\cdot n}{2}=$$

$$=\frac{4\cdot n^3}{4}=\frac{4\cdot n^3}{4}=n^3.$$

Vježba 209

Ako je $n\in N$, onda svaki broj $t_n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ nazivamo trokutnim brojem. Dokaži da vrijedi: $t_{n-1}+t_n=n^2$.

Rezultat: $t_{n-1}+t_n=\frac{(n-1)\cdot n}{2}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n^2-n+n^2+n}{2}=\ldots=n^2.$

Zadatak 210 (Lucy, strukovna škola)

Koliko sati ima četvrtina trećine polovine dana?

$A.\ 1\ h \qquad B.\ 2\ h \qquad C.\ 3\ h \qquad D.\ 0.5\ h$

Rješenje 210

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad 1\ dan=24\ h.$$

Kako izračunati $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b}\cdot x.$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 24\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 24=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{1}=\frac{24}{24}=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 210

Koliko ima sati u polovini trećine od četvrtine dana?

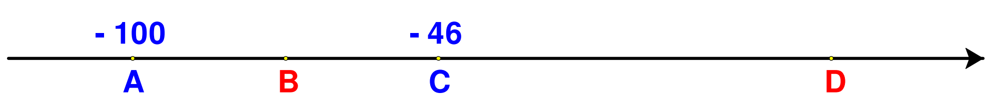
$A.\ 1\ h \qquad B.\ 2\ h \qquad C.\ 3\ h \qquad D.\ 0.5\ h$

Rezultat: A.

Zadatak 211 (Marko, strukovna škola)

Na brojevnome pravcu prikazanome na slici istaknute su točke A, B, C i D te koordinate točaka A i C. Koordinata točke B jednaka je aritmetičkoj sredini koordinata točaka A i C. Koordinata točke D je za 90 veća od koordinate točke C. Kolika je razlika koordinate točke D i koordinate točke B?

$A.\ 103 \qquad B.\ 107 \qquad C.\ 113 \qquad D.\ 117$



Rješenje 211

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n}{n}.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

Apsolutna vrijednost ili modul realnog broja

$$|x| = \begin{cases} x \text{ za } x \ge 0 \\ -x \text{ za } x < 0 \end{cases} \quad , \quad |-x| = |x| \quad , \quad |x| = a \Rightarrow x = \pm a \ , \ a > 0.$$

Udaljenost točaka na brojevnom pravcu

Ako su točkama A i B pridruženi brojevi (koordinate) x_A i x_B, tada vrijedi:

$$|AB| = |x_B - x_A|.$$

Budući da je koordinata točke B jednaka aritmetičkoj sredini koordinata točaka A i C, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} A(x_A) = A(-100) \ , \ C(x_C) = C(-46) \\ x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x_B = \frac{-100 + (-46)}{2} \Rightarrow x_B = \frac{-146}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = -73 \Rightarrow B(x_B) = B(-73).$$

Koordinata točke D je za 90 veća od koordinate točke C pa iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} C(x_C) = C(-46) \\ x_D = x_C + 90 \end{array} \right\} \Rightarrow x_D = -46 + 90 \Rightarrow x_D = 44 \Rightarrow D(x_D) = D(44).$$

Računamo razliku koordinate točke D i koordinate točke B.

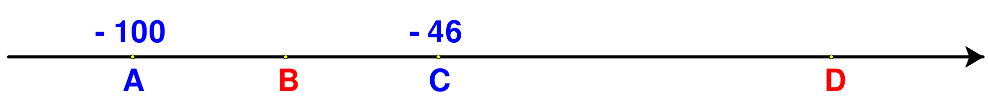
$$\left. \begin{array}{l} D(x_D) = D(44) \ , \ B(x_B) = B(-73) \\ |DB| = |x_B - x_D| \end{array} \right\} \Rightarrow |DB| = |-73 - 44| \Rightarrow |DB| = |-117| \Rightarrow |DB| = 117.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 211

Na brojevnome pravcu prikazanome na slici istaknute su točke A, B, C i D te koordinate točaka A i C. Koordinata točke B jednaka je aritmetičkoj sredini koordinata točaka A i C. Koordinata točke D je za 120 veća od koordinate točke C. Kolika je razlika koordinate točke B i koordinate točke D?

$A.$ 103 $\qquad B.$ 107 $\qquad C.$ 113 $\qquad D.$ 117



Rezultat: D.

Zadatak 212 (Marko, strukovna škola)

U silosu se nalazi $1.2 \cdot 10^{10}$ zrna žita. Ako se četvrtina samelje u brašno, a šestina od preostaloga žita proda, koliko je zrna žita ostalo u silosu?

$A.\ 4.5 \cdot 10^9 \qquad B.\ 6.55 \cdot 10^9 \qquad C.\ 7.5 \cdot 10^9 \qquad D.\ 8.55 \cdot 10^9$

Rješenje 212

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Kako izračunati $\frac{a}{b}$ od x?

$\frac{a}{b} \cdot x.$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

U silosu se nalazi 1.2 · 10^{10} zrna žita. Ako se četvrtina samelje u brašno, ostat će nesamljeveno:

$$1.2 \cdot 10^{10} - \frac{1}{4} \cdot 1.2 \cdot 10^{10} = 1.2 \cdot 10^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1.2 \cdot 10^{10} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = 1.2 \cdot 10^{10} \cdot \frac{4-1}{4} =$$

$$= 1.2 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3}{4} = 1.2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{10} = \frac{1.2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{10} = \frac{3.6}{4} \cdot 10^{10} = 0.9 \cdot 10^{10} = 9 \cdot 10^{9}.$$

Šestina od preostalog žita proda se pa u silosu ostaje:

$$9 \cdot 10^{9} - \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10^{9} = 9 \cdot 10^{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 9 \cdot 10^{9} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6}\right) = 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{6-1}{6} =$$

$$= 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{5}{6} = 9 \cdot \frac{5}{6} \cdot 10^{9} = \frac{9}{1} \cdot \frac{5}{6} \cdot 10^{8} = \frac{45}{6} \cdot 10^{9} = 7.5 \cdot 10^{9}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 212

U silosu se nalazi 1.2 · 10^{10} zrna žita. Ako se trećina samelje u brašno, a četvrtina od preostaloga žita proda, koliko je zrna žita ostalo u silosu?

$A.\ 6 \cdot 10^{9}$ $\quad B.\ 7 \cdot 10^{9}$ $\quad C.\ 8 \cdot 10^{9}$ $\quad D.\ 9 \cdot 10^{9}$

Rezultat: A.

Zadatak 213 (Marko, strukovna škola)

Lucija je na prvoj zadaći osvojila 64 boda, na drugoj 76, a na trećoj 91 bod. Koliko je bodova Lucija postigla na sljedećoj zadaći ako joj se prosjek bodova u odnosu na prosjek prvih triju zadaća povećao za 3 boda?

$A.\ 88$ $\quad B.\ 89$ $\quad C.\ 90$ $\quad D.\ 91$

Rješenje 213

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek ili srednja vrijednost A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a - n = b \quad , \quad a = b + n \quad , \quad a - b = n.$$

Prosjek bodova koje je Lucija ostvarila na prve tri zadaće iznosi:

$$A_3 = \frac{64 + 76 + 91}{3} \Rightarrow A_3 = \frac{231}{3} \Rightarrow A_3 = 77.$$

Slovom x označimo broj bodova koji je Lucija dobila na četvrtoj zadaći pa je prosjek za četiri zadaće jednak

$$A_4 = \frac{64 + 76 + 91 + x}{4} \Rightarrow A_4 = \frac{231 + x}{4}.$$

Budući da se prosjek bodova u odnosu na prosjek prvih triju zadaća povećao za 3 boda, slijedi:

1.inačica

$$A_3+3=A_4 \Rightarrow 77+3=\frac{231+x}{4} \Rightarrow 80=\frac{231+x}{4} \Rightarrow 80=\frac{231+x}{4} \;/\cdot 4 \Rightarrow 320=231+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=231-320 \Rightarrow -x=-89 \Rightarrow -x=-89 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=89.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$A_3=A_4-3 \Rightarrow 77=\frac{231+x}{4}-3 \Rightarrow 77=\frac{231+x}{4}-3 \;/\cdot 4 \Rightarrow 308=231+x-12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=231-12-308 \Rightarrow -x=-89 \Rightarrow -x=-89 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=89.$$

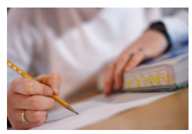
Odgovor je pod B.

3.inačica

$$A_4-A_3=3 \Rightarrow \frac{231+x}{4}-77=3 \Rightarrow \frac{231+x}{4}-77=3 \;/\cdot 4 \Rightarrow 231+x-308=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=12-231+308 \Rightarrow x=89.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 213

Lucija je na prvoj zadaći osvojila 62 boda, na drugoj 77, a na trećoj 92 bod. Koliko je bodova Lucija postigla na sljedećoj zadaći ako joj se prosjek bodova u odnosu na prosjek prvih triju zadaća povećao za 3 boda?

$A.$ 88 $\quad B.$ 89 $\quad C.$ 90 $\quad D.$ 91

Rezultat: B.

Zadatak 214 (Ivana, strukovna škola)

Jedan gigabajt ima 1024 megabajta. Na 1 CD stane 700 megabajta podataka. Koliko je najmanje CD – a potrebno da bi se pohranilo 6 gigabajta podataka?

$A.$ 6 $\quad B.$ 7 $\quad C.$ 8 $\quad D.$ 9

Rješenje 214

$$1 \; gigabajt=1024 \; megabajta \Rightarrow 6 \; gigabajta=6\cdot 1024 \; megabajta$$

Budući da na 1 CD stane 700 megabajta, za 6 gigabajta podataka trebat će najmanje 9 CD – a.

$$\frac{6\cdot 1024 \; megabajta}{700 \; megabajta}=8.777\approx 9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 214

Jedan gigabajt ima 1024 megabajta. Na 1 CD stane 700 megabajta podataka. Koliko je najmanje CD – a potrebno da bi se pohranilo 12 gigabajta podataka?

$A.$ 18 $\quad B.$ 17 $\quad C.$ 20 $\quad D.$ 12

Rezultat: A.

Zadatak 215 (Frane, srednja škola)

Odredi 1001. znamenku decimalnog zapisa broja $\frac{3}{7}$.

Rješenje 215

Ponovimo!

Svaki se razlomak može napisati kao decimalni broj jer razlomačka crta znači dijeljenje.

$$\frac{a}{b}=a:b\ ,\ \ b\neq 0.$$

Ako se pri dijeljenju brojnika s nazivnikom nikada ne dobije nula kao ostatak, pripadni će decimalni broj imati beskonačno mnogo decimala. Ponavlja li se stalno jedna ili više decimala takve brojeve zovemo beskonačno periodički decimalni brojevi. Decimalu ili skupinu decimala koja se ponavlja zovemo period. Na prvu i posljednju znamenku perioda stavljamo točku.

$$\frac{3}{7}=3:7=0.428571428571428571428571428571428571428571428571428571428571428571428571\ldots$$

$$\frac{3}{7}=3:7=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

Uočimo da se ponavlja skupina od šest znamenki: 428571.
Ako broj 1001 podijelimo brojem 6, dobije se količnik 166 i ostatak 5.

$$1001=166\cdot 6+5.$$

Skupina od 6 navedenih znamenki ponovit će se 166 puta i zatim će slijediti još pet znamenki. Peta po redu znamenka u periodu je 7.

$$\frac{3}{7}=3:7=0.\overbrace{\underbrace{428571\ \ldots\ 428571}_{166\text{ puta}}\overset{1}{4}\overset{2}{2}\overset{3}{8}\overset{4}{5}\overset{5}{7}}^{1001\text{ znamenka}}\ \ldots$$

Vidi se da je 1001. po redu znamenka 7.

Vježba 215

Odredi 1000. znamenku decimalnog zapisa broja $\frac{3}{7}$.

Rezultat: 4.

Zadatak 216 (Besa, srednja škola)

Odredi 200. znamenku decimalnog zapisa broja $\frac{4}{13}$.

Rješenje 216

Ponovimo!

Svaki se razlomak može napisati kao decimalni broj jer razlomačka crta znači dijeljenje.

$$\frac{a}{b}=a:b\ ,\ \ b\neq 0.$$

Ako se pri dijeljenju brojnika s nazivnikom nikada ne dobije nula kao ostatak, pripadni će decimalni broj imati beskonačno mnogo decimala. Ponavlja li se stalno jedna ili više decimala takve brojeve zovemo beskonačno periodički decimalni brojevi. Decimalu ili skupinu decimala koja se ponavlja zovemo period. Na prvu i posljednju znamenku perioda stavljamo točku.

$$\frac{4}{13}=4:13=0.307692307692307692307692307692307692307692307692307692\ldots$$

$$\frac{4}{13}=4:13=0.\dot{3}0769\dot{2}$$

Uočimo da se ponavlja skupina od šest znamenki: 307692.
Ako broj 200 podijelimo brojem 6, dobije se količnik 33 i ostatak 2.

$$200=33\cdot 6+2.$$

Skupina od 6 navedenih znamenki ponovit će se 33 puta i zatim će slijediti još dvije znamenke. Druga po redu znamenka u periodu je 0.

$$\frac{4}{13} = 4 : 13 = 0.\overbrace{\underbrace{307692 \; ... \; 307692}_{33 \text{ puta}} \overset{1}{3}\overset{2}{0}}^{200 \text{ znamenaka}} \; ...$$

Vidi se da je 200. po redu znamenka 0.

Vježba 216

Odredi 201. znamenku decimalnog zapisa broja $\frac{4}{13}$.

Rezultat: 7.

Zadatak 217 (Nevzat, srednja škola)

Izračunajte: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot \; ... \; \cdot\left(1+\frac{1}{2011}\right).$

Rješenje 217

Ponovimo!

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot \; ... \; \cdot\left(1+\frac{1}{2011}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot \; ... \; \cdot\frac{2012}{2011}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot \; ... \; \cdot\frac{2012}{2011}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot \; ... \; \cdot\frac{2012}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2012}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2012}{1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1006}{1}=1006.$$

Vježba 217

Izračunajte: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot \; ... \; \cdot\left(1+\frac{1}{2013}\right).$

Rezultat: 1007.

Zadatak 218 (Petra, ekonomska škola)

Riješi jednadžbu: $(n+2)!=132\cdot n!$.

Rješenje 218

Ponovimo!

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Složeni broj je broj koji ima tri ili više djelitelja

Prosti brojevi služe za rastavljanje složenih brojeva na proste faktore. Svaki složeni broj može se na jedinstven način rastaviti na proste faktore.

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \; ... \; \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$$\begin{aligned}&1! = 1,\\&2! = 1\cdot 2,\\&3! = 1\cdot 2\cdot 3,\\&4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,\\&5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5,\\&6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \text{ itd.}\end{aligned}$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)!\cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

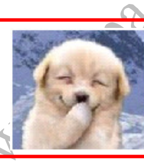
$$\begin{aligned}&9! = 8!\cdot 9,\\&9! = 7!\cdot 8\cdot 9,\\&9! = 6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9,\\&9! = 5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9,\\&9! = 4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 \text{ itd.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n! = (n-1)!\cdot n,\\&n! = (n-2)!\cdot (n-1)\cdot n,\\&n! = (n-3)!\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n,\\&n! = (n-4)!\cdot (n-3)\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n,\\&n! = (n-5)!\cdot (n-4)\cdot (n-3)\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n \text{ itd.}\end{aligned}$$

Prethodnik prirodnog broja n ($n \neq 1$) je prirodni broj $n - 1$.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj $n + 1$.

Vježba! Popunite prazna mjesta u tablici:

Prethodnik	Broj	Sljedbenik
	3	
x – 1		
		α + 3
a		
		a – 1
	b + 4	
a – 6		
		10
	n – 1	



Prethodnik	Broj	Sljedbenik
2	3	4
x – 1	x	x + 1
α +1	α + 2	α + 3
a	a + 1	a + 2
a – 3	a – 2	a – 1
b + 3	b + 4	b + 5
a – 6	a – 5	a – 4
8	9	10
n – 2	n – 1	n

1.inačica

$$(n+2)! = 132\cdot n! \Rightarrow n!\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 132\cdot n! \Rightarrow n!\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 132\cdot n! \;/\cdot\frac{1}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)\cdot(n+2) = 132 \Rightarrow n^2 + 2\cdot n + n + 2 = 132 \Rightarrow n^2 + 2\cdot n + n + 2 - 132 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 3\cdot n - 130 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} n^2 + 3\cdot n - 130 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 3 \;,\; c = -130 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = 3 \;,\; c = -130 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-130)}}{2\cdot 1} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 520}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-3 \pm 23}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n_1 = \dfrac{-3+23}{2} \\ n_2 = \dfrac{-3-23}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n_1 = \dfrac{20}{2} \\ n_2 = -\dfrac{26}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n_1 = 10 \\ n_2 = -13 \text{ nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n = 10.$$

2.inačica

$$(n+2)! = 132\cdot n! \Rightarrow n!\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 132\cdot n! \Rightarrow n!\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 132\cdot n! \;/\cdot\frac{1}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (n+1)\cdot(n+2)=132.$$

Uočimo na lijevoj strani jednadžbe umnožak dva uzastopna prirodna broja (faktori se razlikuju za 1). I broj 132 rastavimo na umnožak dva uzstopna prirodna broja.

$$\begin{aligned}132 &= 2\cdot 66 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 33 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 11.\end{aligned}$$

Sada je:

$$132 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 11 = 11\cdot(2\cdot 2\cdot 3) = 11\cdot 12.$$

Dalje slijedi:

$$(n+1)\cdot(n+2) = 11\cdot 12 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n+1=11 \\ n+2=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=11-1 \\ n=12-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=10 \\ n=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \ n=10.$$

Vježba 218

Riješi jednadžbu: $(n+1)! = 6\cdot n!$.

Rezultat: n = 5.

Zadatak 219 (Ines, gimnazija)

Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $1!+2!+3!+4!+5!+ \ ... \ +15!$ brojem 30?

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

Rješenje 219

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ ... \ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1! = 1,
2! = 1 · 2,
3! = 1 · 2 · 3,
4! = 1 · 2 · 3 · 4,
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)!\cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

9! = 8! · 9,
9! = 7! · 8 · 9,
9! = 6! · 7 · 8 · 9,
9! = 5! · 6 · 7 · 8 · 9,
9! = 4! · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 itd.

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k\cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=k \quad \text{ili} \quad a:b=k.$$

Ako je zbroj nekoliko cijelih brojeva djeljiv s m, i ako su svi pribrojnici izuzev jednog jedinog djeljivi s m, onda i taj pribrojnik mora biti djeljiv s m. Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r \ \text{ i } \ 0\le r<b.$$

$$1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+\ \dots\ +15!=1+2+6+24+5!+6!+7!+\ \dots\ +15!=$$

$$=(1+2)+(6+24)+5!+6!+7!+\ \dots\ +15!=3+30+5!+6!+7!+\ \dots\ +15!.$$

Uočimo da je svaki član od 5! do 15! djeljiv sa 30.

$$5!=120=30\cdot 4=30\cdot n_1\ ,\ n_1\in N$$

$$6!=5!\cdot 6=(30\cdot n_1)\cdot 6=30\cdot n_2\ ,\ n_2\in N$$

$$7!=6!\cdot 7=(30\cdot n_2)\cdot 7=30\cdot n_3\ ,\ n_3\in N$$

$$8!=7!\cdot 8=(30\cdot n_3)\cdot 8=30\cdot n_4\ ,\ n_4\in N$$

$$\dots$$

$$15!=14!\cdot 15=(30\cdot n_{10})\cdot 15=30\cdot n_{11}\ ,\ n_{11}\in N.$$

Sada je:

$$3+30+5!+6!+7!+\ \dots\ +15!=3+30+30\cdot n_1+30\cdot n_2+30\cdot n_3+30\cdot n_4+\ \dots\ +30\cdot n_{11}=$$

$$=3+30\cdot(1+n_1+n_2+n_3+n_4+\ \dots\ +n_{11})=3+30\cdot n=30\cdot n+3\ ,\ n\in N.$$

Ostatak pri dijeljenju je 3. Odgovor je pod B.

Vježba 219

Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $1!+2!+3!+4!+5!+\ \dots\ +10!$ brojem 30?

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

Rezultat: B.

Zadatak 220 (DNK, gimnazija)

Koliko ima cijelih brojeva n za koje je razlomak $\frac{2\cdot n^2+1}{n^2-1}$ cijeli broj?

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

Rješenje 220

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b\neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a=k\cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=k\quad \text{ili}\quad a:b=k.$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r\ \ \text{i}\ \ 0\leq r<b.$$

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži

polinom od g(x).
Zadani razlomak možemo transformirati u pogodniji oblik na dva načina.

1.inačica

$$\frac{2\cdot n^2+1}{n^2-1}=\frac{2\cdot n^2+1}{n^2-1}=\frac{2\cdot n^2-2+3}{n^2-1}=\frac{\left(2\cdot n^2-2\right)+3}{n^2-1}=\frac{2\cdot\left(n^2-1\right)+3}{n^2-1}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(n^2-1\right)}{n^2-1}+\frac{3}{n^2-1}=\frac{2\cdot\left(n^2-1\right)}{n^2-1}+\frac{3}{n^2-1}=2+\frac{3}{n^2-1}.$$

2.inačica

Brojnik i nazivnik zadanog razlomka polinomi su drugog stupnja pa ih podijelimo.
Promatramo dijeljenje polinoma

$$\left(2\cdot n^2+1\right):\left(n^2-1\right).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $2 \cdot n^2$, prvim članom djelitelja, n^2.

$$2n^2:n^2=2.$$

Količnik 2 zatim pomnožimo djeliteljem, $n^2 - 1$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}\left(2\cdot n^2+1\right):\left(n^2-1\right)=2\\ 2\cdot n^2-2\end{array}$$

Potpisanim članovima $2 \cdot n^2 - 2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\begin{array}{l}\left(\ \ 2\cdot n^2+1\right):\left(n^2-1\right)=2\\ -2\cdot n^2+2\\ \hline \qquad\quad 3\ -\ \text{ostatak}\end{array}$$

Razlomak se može zapisati na ovaj način:

$$\frac{2\cdot n^2+1}{n^2-1}=2+\frac{3}{n^2-1}.$$

Promatramo razlomak $\frac{3}{n^2-1}$. Da bi bio cijeli broj mora brojnik 3 biti djeljiv s nazivnikom n^2-1. Budući da su djelitelji broja 3 brojevi – 3, – 1, 1 i 3, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}n^2-1=-3\\ n^2-1=-1\\ n^2-1=1\\ n^2-1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}n^2=-3+1\\ n^2=-1+1\\ n^2=1+1\\ n^2=3+1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}n^2=-2\\ n^2=0\\ n^2=2\\ n^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}n^2=-2\ /\sqrt{\ }\\ n^2=0\ /\sqrt{\ }\\ n^2=2\ /\sqrt{\ }\\ n^2=4\ /\sqrt{\ }\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_{1,2} = \pm\sqrt{-2} \text{ nije cijeli broj} \\ n_{1,2} = 0 \\ n_{1,2} = \pm\sqrt{2} \text{ nije cijeli broj} \\ n_{1,2} = \pm\sqrt{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_{1,2} = 0 \\ n_{1,2} = \pm 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 2 \\ n = -2 \end{array}\right\} - \text{cijeli brojevi}.$$

Postoje tri cijela broja. Odgovor je pod B.

Vježba 220

Koliko ima prirodnih brojeva n za koje je razlomak $\frac{2 \cdot n^2 + 1}{n^2 - 1}$ cijeli broj?

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

Rezultat: A.