Zadatak 181 (Vlado, srednja škola)

Izračunaj zbroj umnožaka znamenaka svih troznamenkastih brojeva.

Rješenje 181

Ponovimo!

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad \frac{x \cdot n}{y \cdot n} = \frac{x}{y} \; , \; n \neq 0 \quad , \quad 0 + x = x + 0 = x.$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Troznamenkasti prirodni broj je oblika

$$\overline{abc},$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zbroj umnožaka znamenaka svih troznamenkastih brojeva iznosi:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) =$$

$$= (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) =$$

$$= (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^3 = \left(\frac{9 \cdot (9+1)}{2}\right)^3 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^3 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^3 = (9 \cdot 5)^3 = 45^3 = 91125.$$

Vježba 181

Izračunaj zbroj umnožaka znamenaka svih dvoznamenkastih brojeva.

Rezultat: 2025.

Zadatak 182 (Ivona, srednja škola)

$$\text{Pojednostavnite}: 2^6 \cdot 3^8 + 2^6 \cdot 3^9.$$

Rješenje 182

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$2^6 \cdot 3^8 + 2^6 \cdot 3^9 = 2^6 \cdot 3^8 + 2^6 \cdot 3^8 \cdot 3^1 = 2^6 \cdot 3^8 + 2^6 \cdot 3^8 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^8 \cdot (1+3) =$$

$$= 2^6 \cdot 3^8 \cdot 4 = 2^6 \cdot 3^8 \cdot 2^2 = 2^6 \cdot 2^2 \cdot 3^8 = 2^8 \cdot 3^8 = (2 \cdot 3)^8 = 6^8.$$

Vježba 182

$$\text{Pojednostavnite}: 2^5 \cdot 3^7 + 2^5 \cdot 3^8.$$

Rezultat: 6^7.

Zadatak 183 (Goran, srednja škola)

Ako je $\dfrac{1}{a \cdot (b+1)} + \dfrac{1}{b \cdot (a+1)} = \dfrac{1}{(a+1) \cdot (b+1)}$, koliko je $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$?

Rješenje 183

Ponovimo!

$$\frac{1}{x} \cdot y = \frac{y}{x} \quad , \quad \frac{x+y}{n} = \frac{x}{n} + \frac{y}{n}.$$

$$\frac{1}{a\cdot(b+1)}+\frac{1}{b\cdot(a+1)}=\frac{1}{(a+1)\cdot(b+1)} \Rightarrow \frac{1}{a\cdot(b+1)}+\frac{1}{b\cdot(a+1)}=\frac{1}{(a+1)\cdot(b+1)} \; / \cdot (a+1)\cdot(b+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+1)\cdot(b+1)}{a\cdot(b+1)}+\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{b\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{(a+1)\cdot(b+1)} \Rightarrow \frac{(a+1)\cdot(b+1)}{a\cdot(b+1)}+\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{b\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{(a+1)\cdot(b+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a}+\frac{b+1}{b}=1 \Rightarrow \frac{a}{a}+\frac{1}{a}+\frac{b}{b}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow \frac{a}{a}+\frac{1}{a}+\frac{b}{b}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow 1+\frac{1}{a}+1+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{a}+1+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+1+\frac{1}{b}=0 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-1.$$

Vježba 183

Ako je $\frac{1}{a\cdot(b-1)}+\frac{1}{b\cdot(a-1)}=\frac{1}{(a-1)\cdot(b-1)}$, koliko je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 184 (Goran, srednja škola)

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći broj: $2\cdot 16^3-3\cdot 4^6+5\cdot 8^4$.

Rješenje 184

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Uoči da se brojevi 16, 4 i 8 mogu napisati kao potencije s bazom 2.

$$2\cdot 16^3-3\cdot 4^6+5\cdot 8^4=2\cdot\left(2^4\right)^3-3\cdot\left(2^2\right)^6+5\cdot\left(2^3\right)^4=2\cdot 2^{12}-3\cdot 2^{12}+5\cdot 2^{12}=$$

$$=2\cdot 2^{12}-3\cdot 2^{12}+5\cdot 2^{12}=2^{12}\cdot(2-3+5)=2^{12}\cdot 4=2^{12}\cdot 2^2=2^{14}.$$

Vježba 184

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći broj: $2^{13}+4\cdot 2^{11}$.

Rezultat: 2^{14}.

Zadatak 185 (Goran, srednja škola)

Zapiši u obliku potencije sljedeći broj: $3\cdot 9^6+5\cdot 27^4+81^3$.

Rješenje 185

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Uoči da se brojevi 9, 27 i 81 mogu napisati kao potencije s bazom 3.

$$3\cdot 9^6+5\cdot 27^4+81^3=3\cdot\left(3^2\right)^6+5\cdot\left(3^3\right)^4+\left(3^4\right)^3=3\cdot 3^{12}+5\cdot 3^{12}+3^{12}=3\cdot 3^{12}+5\cdot 3^{12}+3^{12}=$$

$$=3^{12}\cdot(3+5+1)=3^{12}\cdot 9=3^{12}\cdot 3^2=3^{14}.$$

Vježba 185

Zapiši u obliku potencije sljedeći broj: $3 \cdot 9^6 + 45 \cdot 9^5 + 81^3$.

Rezultat: 3^{14}.

Zadatak 186 (Tihana, srednja škola)

Ako je $x = 2^{n+1}$, $y = 5^{n+1}$, koliko znamenki ima broj $x^2 \cdot y^2$?

Rješenje 186

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2 = \left(2^{n+1} \cdot 5^{n+1}\right)^2 = \left((2 \cdot 5)^{n+1}\right)^2 = \left(10^{n+1}\right)^2 = 10^{2 \cdot n + 2}.$$

2.inačica

$$x^2 \cdot y^2 = \left(2^{n+1}\right)^2 \cdot \left(5^{n+1}\right)^2 = 2^{2 \cdot n + 2} \cdot 5^{2 \cdot n + 2} = (2 \cdot 5)^{2 \cdot n + 2} = 10^{2 \cdot n + 2}.$$

Uočimo da broj:

- $10^1 = 10$ ima 2 znamenke
- $10^2 = 100$ ima 3 znamenke
- $10^3 = 1000$ ima 4 znamenke
- $10^4 = 10000$ ima 5 znamenaka

…

- $10^n = 1\underbrace{000...0}_{\text{n nula}}$ ima $n + 1$ znamenku.

Dakle, zadani broj ima 2 · n + 3 znamenke.

Vježba 186

Ako je $x = 2^n$, $y = 5^n$, koliko znamenki ima broj $x^2 \cdot y^2$?

Rezultat: 2 · n + 1.

Zadatak 187 (Iva, gimnazija)

Koliki je zbroj prvih 100 parnih prirodnih brojeva? Poopći te odredi formulu za zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva.

Rješenje 187

Ponovimo!

$$a + b = b + a \quad , \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Na primjer,

$$8=2\cdot 4 \quad , \quad 24=2\cdot 12 \quad , \quad 198=2\cdot 99 \quad , \quad 2570=2\cdot 1285.$$

Parni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2\cdot n,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Označimo općenito sa slovom s zbroj prvih n prirodnih brojeva, tj.:

$$s=1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n.$$

Sada pribrojnike zbroja napišemo u obrnutom poretku.

$$s=n+(n-1)+(n-2)+\ \dots\ +3+2+1.$$

Ako zbrojimo obje jednakosti, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} s=1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n \\ s=n+(n-1)+(n-2)+\ \dots\ +3+2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s+s=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ \dots\ +(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ \dots\ +(n+1)+(n+1)+(n+1)\ \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na desnoj strani jednakosti} \\ \text{ima } n \text{ pribrojnika } n+1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ \dots\ +(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{\text{n pribrojnika}}\ \Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot(n+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot(n+1)\ /:2\ \Rightarrow\ s=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Dakle, za prirodne brojeve vrijedi formula

$$1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

1.inačica

Računamo zbroj prvih 100 parnih prirodnih brojeva.

$$2+4+6+8+\ \dots\ +194+196+198+200.$$

Brojeve ćemo združiti u parove: prvi s posljednjim (2 + 200), drugi s pretposljednjim (4 + 198) itd. Tako se dobije 50 parova, a u svakom je zbroj 202. Konačni rezultat jednak je:

$$202\cdot 50=10100.$$

2.inačica

Računamo zbroj prvih 100 parnih prirodnih brojeva.

$$2+4+6+8+\ \dots\ +194+196+198+200.$$

Izlučimo broj 2 i uporabimo formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva.

$$2+4+6+8+\ \dots\ +194+196+198+200=2\cdot(1+2+3+\ \dots\ +97+98+99+100)=$$

$$=2\cdot\frac{100\cdot(100+1)}{2}=2\cdot\frac{100\cdot 101}{2}=10100.$$

Odredit ćemo formulu za zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva.

Označimo općenito sa slovom s zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva, tj.:

$$s=2+4+6+\ \dots\ +(2\cdot n-4)+(2\cdot n-2)+2\cdot n.$$

Sada pribrojnike zbroja napišemo u obrnutom poretku.

$$s=2\cdot n+(2\cdot n-2)+(2\cdot n-4)+\ \dots\ +6+4+2.$$

Ako zbrojimo obje jednakosti, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} s=2+4+6+\ \dots\ +(2\cdot n-4)+(2\cdot n-2)+2\cdot n \\ s=2\cdot n+(2\cdot n-2)+(2\cdot n-4)++\ \dots\ +6+4+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s+s=(2+2\cdot n)+(4+2\cdot n-2)+(6+2\cdot n-4)+\ \dots\ +(2\cdot n-4+6)+(2\cdot n-2+4)+(2\cdot n+2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+\ \dots\ +(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na desnoj strani jednakosti}\\ \text{ima } n \text{ pribrojnika } 2\cdot n+2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=\underbrace{(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+\ \dots\ +(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+2)}_{\text{n pribrojnika}}\ \Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot(2\cdot n+2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot 2\cdot(n+1)\ \Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot 2\cdot(n+1)\ /:2\ \Rightarrow\ s=n\cdot(n+1).$$

Dakle, za parne prirodne brojeve vrijedi formula

$$2+4+6+\ \dots\ +(2\cdot n-4)+(2\cdot n-2)+2\cdot n=n\cdot(n+1).$$

Vježba 187

Koliki je zbroj prvih 50 parnih prirodnih brojeva?

Rezultat: 2550.

Zadatak 188 (Iva, gimnazija)

Koliki je zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva? Poopći te odredi formulu za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje 188

Ponovimo!

$$a+b=b+a \quad , \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})-1 \quad , \quad m=2\cdot k-1\ ,\ k\in N.$$

Na primjer,

$$7=2\cdot 4-1 \quad , \quad 25=2\cdot 12-1 \quad , \quad 197=2\cdot 99-1 \quad , \quad 2569=2\cdot 1285-1.$$

Neparni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2\cdot n-1,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.
Označimo općenito sa slovom s zbroj prvih n prirodnih brojeva, tj.:

$$s=1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n.$$

Sada pribrojnike zbroja napišemo u obrnutom poretku.

$$s=n+(n-1)+(n-2)+\ \dots\ +3+2+1.$$

Ako zbrojimo obje jednakosti, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} s=1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n \\ s=n+(n-1)+(n-2)+\ \dots\ +3+2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbrojimo}\\ \text{jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s+s=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ \dots\ +(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ \dots\ +(n+1)+(n+1)+(n+1)\ \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na desnoj strani jednakosti}\\ \text{ima } n \text{ pribrojnika } n+1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ \dots\ +(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{\text{n pribrojnika}}\ \Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot(n+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot(n+1)\ /:2\ \Rightarrow\ s=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Dakle, za prirodne brojeve vrijedi formula

$$1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Računamo zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva.

$$1+3+5+7+\ \dots\ +193+195+197+199.$$

Brojeve ćemo združiti u parove: prvi s posljednjim (1 +199), drugi s pretposljednjim (3 + 197) itd. Tako se dobije 50 parova, a u svakom je zbroj 200. Konačni rezultat jednak je:

$$200\cdot 50=10\,000.$$

Odredit ćemo formulu za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.
Označimo općenito sa slovom s zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva, tj.:

$$s=1+3+5+\ \dots\ +(2\cdot n-5)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-1).$$

Sada pribrojnike zbroja napišemo u obrnutom poretku.

$$s=(2\cdot n-1)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-5)+\ \dots\ +5+3+1.$$

Ako zbrojimo obje jednakosti, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} s=1+3+5+\ \dots\ +(2\cdot n-5)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-1) \\ s=(2\cdot n-1)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-5)+\ \dots\ +5+3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s+s=(1+2\cdot n-1)+(3+2\cdot n-3)+(5+2\cdot n-5)+\ \dots\ +(2\cdot n-5+5)+(2\cdot n-3+3)+(2\cdot n-1+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s+s=(1+2\cdot n-1)+(3+2\cdot n-3)+(5+2\cdot n-5)+\ \dots\ +(2\cdot n-5+5)+(2\cdot n-3+3)+(2\cdot n-1+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+\ \dots\ +2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na desnoj strani jednakosti} \\ \text{ima } n \text{ pribrojnika } 2\cdot n\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=\underbrace{2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n+\ \dots\ +2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n}_{\text{n pribrojnika}}\ \Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot 2\cdot n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s=n\cdot 2\cdot n\ /:2\ \Rightarrow\ s=n^2.$$

Dakle, za neparne prirodne brojeve vrijedi formula

$$1+3+5+\ \dots\ +(2\cdot n-5)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-1)=n^2.$$

Vježba 188

Koliki je zbroj prvih 50 neparnih prirodnih brojeva?

Rezultat: 2500.

Zadatak 189 (Iva, gimnazija)

Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je 3003. Koliki je n?

Rješenje 189

Ponovimo!

$$1+2+3+\ \dots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 1+2+3+\ \dots\ +n=3003 \\ 1+2+3+\ \dots\ +n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{n\cdot(n+1)}{2}=3003\ \Rightarrow\ \frac{n\cdot(n+1)}{2}=3003\ /\cdot 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(n+1)=6006 \Rightarrow n^2+n=6006 \Rightarrow n^2+n-6006=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2+n-6006=0 \\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-6006 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-6006 \\ n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6006)}}{2\cdot 1} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24024}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{24025}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm 155}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{-1+155}{2} \\ n_2=\dfrac{-1-155}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{154}{2} \\ n_2=-\dfrac{156}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=77 \\ n_2=-78 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow n=77.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 1+2+3+\ \ldots\ +n=3003 \\ 1+2+3+\ \ldots\ +n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n\cdot(n+1)}{2}=3003 \Rightarrow \frac{n\cdot(n+1)}{2}=3003\ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(n+1)=6006.$$

Rastavimo broj 6006 na proste faktore.

6006	2
3003	3
1001	7
143	11
13	13
1	

Dakle,

$$6006=2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13.$$

Sada broj 6006, uz malo pokušaja, napišemo kao umnožak dva uzastopna prirodna broja (jer su na lijevoj strani jednadžbe dva uzastopna broja n i n + 1).

$$6006=(7\cdot 11)\cdot(2\cdot 3\cdot 13)=77\cdot 78.$$

Traženi broj n je 77.

Vježba 189

Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je 210. Koliki je n?

Rezultat: 20.

Zadatak 190 (Iva, gimnazija)

Kolika je razlika između zbroja prvih 1000 parnih i zbroja prvih 1000 neparnih brojeva?

Rješenje 190

Ponovimo!

$$a+b=b+a \quad , \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Formula za zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva:

$$2+4+6+\ \ldots\ +(2\cdot n-4)+(2\cdot n-2)+2\cdot n=n\cdot(n+1).$$

Formula za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva:

$$1+3+5+\ \ldots\ +(2\cdot n-5)+(2\cdot n-3)+(2\cdot n-1)=n^2.$$

1.inačica

Od zbroja prvih 1000 parnih brojeva oduzmemo zbroj prvih 1000 neparnih brojeva.

$$(2+4+6+\ \ldots\ +1996+1998+2000)-(1+3+5+\ \ldots\ +1995+1997+1999)=$$

$$=1000\cdot(1000+1)-1000^{2}=1000\cdot 1001-1000^{2}=1000\cdot(1001-1000)=1000\cdot 1=1000.$$

2.inačica

Zadane brojeve napišemo u obrnutom poretku od najvećeg do najmanjeg.

$$(2+4+6+\ \ldots\ +1996+1998+2000)-(1+3+5+\ \ldots\ +1995+1997+1999)=$$

$$=2+4+6+\ \ldots\ +1996+1998+2000-1-3-5-\ \ldots\ -1995-1997-1999=$$

$$=(2000-1999)+(1998-1997)+(1996-1995)+\ \ldots\ +(6-5)+(4-3)+(2-1)=$$

$$=1+1+1+\ \ldots\ +1+1+1=\underbrace{1+1+1+\ \ldots\ +1+1+1}_{1000\ \text{pribrojnika}}=1000\cdot 1=1000.$$

Vježba 190

Kolika je razlika između zbroja prvih 100 parnih i zbroja prvih 100 neparnih brojeva?

Rezultat: 100.

Zadatak 191 (Ava, učiteljska akademija)

Dokaži matematičkom indukcijom formulu: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{3^{3}}+\ \ldots\ +\frac{n}{3^{n}}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot n+3}{4\cdot 3^{n}}.$

Rješenje 191

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}\quad,\quad a^{1}=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

Načelo matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

- Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.
- Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.
- Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot 1+3}{4\cdot 3^{1}}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2+3}{4\cdot 3}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{9-5}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{4}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{4}{12}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

ii) Pretpostavka indukcije.

Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{3^{3}}+\ \ldots\ +\frac{n}{3^{n}}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot n+3}{4\cdot 3^{n}}.$$

iii) Korak indukcije.
Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ \dots\ +\frac{n}{3^n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ \dots\ +\frac{n}{3^n}\right)+\frac{n+1}{3^{n+1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{iskoristimo}\\ \text{pretpostavku indukcije}\end{array}\right]=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot n+3}{4\cdot 3^n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{3}{4}-\left(\frac{2\cdot n+3}{4\cdot 3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{3\cdot(2\cdot n+3)-4\cdot(n+1)}{4\cdot 3^{n+1}}=\frac{3}{4}-\frac{6\cdot n+9-4\cdot n-4}{4\cdot 3^{n+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot n+5}{4\cdot 3^{n+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot n+2+3}{4\cdot 3^{n+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot(n+1)+3}{4\cdot 3^{n+1}}.$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, sa n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Vježba 191

Dokaži matematičkom indukcijom formulu: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{n}{2\cdot n+1}.$

Rezultat: Formula je točna.

Zadatak 192 (Franjo, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je $n^7 + 6 \cdot n$ djeljivo sa 7.

Rješenje 192

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad n^1=n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \le n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\quad \text{ili}\quad \binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \dots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot k}.$$

Uočimo da za k = 0, k = 1 i k = n dobivamo

$$\binom{n}{0}=1\quad,\quad \binom{n}{1}=n\quad,\quad \binom{n}{n}=1.$$

Svojstvo simetrije:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}.$$

Binomni poučak
Za svaki $a, b\in R,\ n\in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

U zadatku treba dokazati da je broj 7 djelitelj zadanog izraza $n^7 + 6 \cdot n$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) sa $f(n) = n^7 + 6 \cdot n$.

Zapamti!
Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi a = c · b. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.
Načelo matematičke indukcije
Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

- Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.
- Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.
- Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

baza indukcije
n = 1

$$f(1) = 1^7 + 6 \cdot 1 = 1 + 6 = 7 = \mathbf{7} \cdot 1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 7. Tada pišemo:

$$f(n) = n^7 + 6 \cdot n = \mathbf{7} \cdot N. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj N je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 7.

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$f(n+1) = (n+1)^7 + 6 \cdot (n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = n^7 + \binom{7}{1} \cdot n^6 + \binom{7}{2} \cdot n^5 + \binom{7}{3} \cdot n^4 + \binom{7}{4} \cdot n^3 + \binom{7}{5} \cdot n^2 + \binom{7}{6} \cdot n^1 + 1 + 6 \cdot n + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = n^7 + 6 \cdot n + \binom{7}{1} \cdot n^6 + \binom{7}{2} \cdot n^5 + \binom{7}{3} \cdot n^4 + \binom{7}{4} \cdot n^3 + \binom{7}{5} \cdot n^2 + \binom{7}{6} \cdot n + 1 + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + \binom{7}{1} \cdot n^6 + \binom{7}{2} \cdot n^5 + \binom{7}{3} \cdot n^4 + \binom{7}{4} \cdot n^3 + \binom{7}{5} \cdot n^2 + \binom{7}{6} \cdot n + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + \binom{7}{1} \cdot n^6 + \binom{7}{2} \cdot n^5 + \binom{7}{3} \cdot n^4 + \binom{7}{3} \cdot n^3 + \binom{7}{2} \cdot n^2 + \binom{7}{1} \cdot n + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + 7 \cdot n^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot n^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n^3 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot n^2 + 7 \cdot n + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + 7 \cdot n^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot n^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n^3 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot n^2 + 7 \cdot n + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + 7 \cdot n^6 + 21 \cdot n^5 + 35 \cdot n^4 + 35 \cdot n^3 + 21 \cdot n^2 + 7 \cdot n + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \left(n^7 + 6 \cdot n\right) + 7 \cdot \left(n^6 + 3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^4 + 5 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{koristimo induktivnu pretpostavku} \\ f(n) = n^7 + 6 \cdot n = 7 \cdot N \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = 7 \cdot N + 7 \cdot \left(n^6 + 3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^4 + 5 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7\cdot\left(N+n^{6}+3\cdot n^{5}+5\cdot n^{4}+5\cdot n^{3}+3\cdot n^{2}+n+1\right).$$

Dobili smo na kraju faktor 7 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 192

Dokaži matematičkom indukcijom da je $n^3 - n$ djeljivo sa 6.

Rezultat: Formula je točna.

Zadatak 193 (4A, TUPŠ)

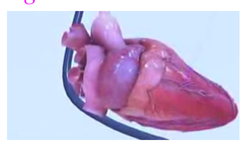
Ljudsko srce tijekom jednoga dana otkuca oko 100 tisuća puta. Koliko puta otkuca srce čovjeka tijekom 70 godina života?

$$A.\ 2.6\cdot 10^{7} \qquad B.\ 2.6\cdot 10^{8} \qquad C.\ 2.6\cdot 10^{9} \qquad D.\ 2.6\cdot 10^{10}$$

Rješenje 193

Ponovimo!

$$1\ godina \approx 365\ dana.$$



Budući da ljudsko srce tijekom jednoga dana otkuca oko 100 000 puta, za 70 godina ljudskoga života otkucat će:

$$70\cdot 365\cdot 100\,000 = 2555000000 \approx 2.6\cdot 10^{9}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 193

Ljudsko srce tijekom jednoga dana otkuca oko 100 tisuća puta. Koliko puta otkuca srce čovjeka tijekom 90 godina života?

$$A.\ 3.3\cdot 10^{7} \qquad B.\ 3.3\cdot 10^{8} \qquad C.\ 3.3\cdot 10^{9} \qquad D.\ 3.3\cdot 10^{10}$$

Rezultat: C.

Zadatak 194 (Dragana, gimnazija)

Koja je zadnja znamenka potencije 6^{811}?

Rješenje 194

Ponovimo!

Ako su $a, b \in Z$ i $m \in N$ i ako m | a – b (m dijeli a – b ili m je djelitelj od a – b), onda kažemo da su a i b kongruentni modulo m i to pišemo ovako:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Posljednji zapis zovemo još i kongruencijom. Svaka kongruencija mod m je:

- refleksivna $a \equiv a \pmod{m}$, za svako a
- simetrična $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- tranzitivna $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Svojstva kongruencije:

① ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, onda je

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, n je prirodan broj
- $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$, za svaki cijeli broj k

② ako je $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$ i M(k, m) = d, onda slijedi $a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

③ ako je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $a \equiv b \pmod{m}$, onda vrijedi $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

④ brojevi a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s brojem m ako i samo ako je a ≡ b (mod m)

Neka je a realan broj, a n prirodan broj. Izraz a^n zovemo n – tom potencijom broja a. To je umnožak u kojem se broj a javlja n puta.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ faktora}}.$$

Broj a naziva se baza ili osnovica potencije, dok se broj n naziva eksponent potencije.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

1.inačica

$$6^1 = 6$$
$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$
$$6^3 = 6^2 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$$
$$6^4 = 6^3 \cdot 6 = 216 \cdot 6 = 1296$$
$$6^5 = 6^4 \cdot 6 = 1296 \cdot 6 = 7776$$
$$6^6 = 6^5 \cdot 6 = 7776 \cdot 6 = 46656$$
$$6^7 = 6^6 \cdot 6 = 46656 \cdot 6 = 279936$$
$$\dots$$

Uočimo da svaki broj čija je zadnja znamenka 6, kada se pomnoži brojem 6, opet na kraju ima znamenku 6. Dakle, potencija 6^{811} završava znamenkom 6.

2.inačica

Uočimo da je zadnja znamenka broja 6^{811} zapravo znamenka ostatka koji se dobije dijeljenjem tog broja sa 10. Zadatak se svodi na određivanje tog ostatka. Očito je da vrijedi:

$$6^2 \equiv 6 \ (\text{mod } 10) \quad , \quad 6^3 \equiv 6 \ (\text{mod } 10) \quad , \quad 6^4 \equiv 6 \ (\text{mod } 10) \quad , \quad 6^5 \equiv 6 \ (\text{mod } 10).$$

Kako je

$$6^5 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

to je

$$\left(6^5\right)^{162} \equiv 6^{162} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{810} \equiv 6^{162} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6 \cdot 6^{810} \equiv 6 \cdot 6^{162} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6^{811} \equiv 6^{163} \left(\text{mod } 10\right).$$

Traženi ostatak jednak je ostatku koji se dobije dijeljenjem broja 6^{163} sa 10.

Kako je

$$6^2 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

to je

$$\left(6^2\right)^{81} \equiv 6^{81} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{162} \equiv 6^{81} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6 \cdot 6^{162} \equiv 6 \cdot 6^{81} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6^{163} \equiv 6^{82} \left(\text{mod } 10\right).$$

Traženi ostatak jednak je ostatku koji se dobije dijeljenjem broja 6^{82} sa 10.

Kako je

$$6^3 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

to je

$$\left(6^3\right)^{27} \equiv 6^{27} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{81} \equiv 6^{27} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6 \cdot 6^{81} \equiv 6 \cdot 6^{27} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6^{82} \equiv 6^{28} \left(\text{mod } 10\right).$$

Traženi ostatak jednak je ostatku koji se dobije dijeljenjem broja 6^{28} sa 10.

Kako je

$$6^3 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

to je

$$\left(6^3\right)^9 \equiv 6^9 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{27} \equiv 6^9 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6 \cdot 6^{27} \equiv 6 \cdot 6^9 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{28} \equiv 6^{10} \left(\text{mod } 10\right).$$

Traženi ostatak jednak je ostatku koji se dobije dijeljenjem broja 6^{10} sa 10.
Kako je

$$6^3 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

to je

$$\left(6^3\right)^3 \equiv 6^3 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^9 \equiv 6^3 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6 \cdot 6^9 \equiv 6 \cdot 6^3 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6^{10} \equiv 6^4 \left(\text{mod } 10\right).$$

Traženi ostatak jednak je ostatku koji se dobije dijeljenjem broja 6^4 sa 10.
Budući da vrijedi

$$6^4 \equiv 6 \ (\text{mod } 10),$$

slijedi:

- $6^{811} \equiv 6^{163} \left(\text{mod } 10\right) \wedge 6^{163} \equiv 6^{82} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{811} \equiv 6^{82} \left(\text{mod } 10\right).$
- $6^{811} \equiv 6^{82} \left(\text{mod } 10\right) \wedge 6^{82} \equiv 6^{28} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{811} \equiv 6^{28} \left(\text{mod } 10\right).$
- $6^{811} \equiv 6^{28} \left(\text{mod } 10\right) \wedge 6^{28} \equiv 6^{10} \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{811} \equiv 6^{10} \left(\text{mod } 10\right).$
- $6^{811} \equiv 6^{10} \left(\text{mod } 10\right) \wedge 6^{10} \equiv 6^4 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{811} \equiv 6^4 \left(\text{mod } 10\right).$
- $6^{811} \equiv 6^4 \left(\text{mod } 10\right) \wedge 6^4 \equiv 6 \left(\text{mod } 10\right) \Rightarrow 6^{811} \equiv 6 \left(\text{mod } 10\right).$

Prema tome, jednoznamenkasti završetak od 6^{811} je 6.

Vježba 194

Koja je zadnja znamenka potencije 5^{811}?

Rezultat: 5.

Zadatak 195 (Filip, srednja škola)

Aritmetička sredina 50 brojeva iznosi 38. Ako iz tog skupa brojeva izbacimo brojeve 45 i 55, onda je aritmetička sredina preostalih 48 brojeva jednaka:

A. 36 *B.* 36.5 *C.* 37 *D.* 37.5 *E.* 38.5

Rješenje 195

Ponovimo!

Neka je zadano n pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Broj:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n}{n}$$

je njihova aritmetička sredina ili prosjek.

Budući da za 50 brojeve (među kojima su i brojevi 45 i 55) aritmetička sredina iznosi 38, slijedi:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{48} + 45 + 55}{50} = 38 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{48} + 45 + 55}{50} = 38 \ / \cdot 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{48} + 45 + 55 = 1900 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{48} = 1900 - 45 - 55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_{48} = 1800.$$

Aritmetička sredina preostalih 48 brojeva iznosi:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_{48}}{48} = \frac{1800}{48} = 37.5.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 195

Aritmetička sredina 50 brojeva iznosi 38. Ako iz tog skupa brojeva izbacimo brojeve 40 i 60, onda je aritmetička sredina preostalih 48 brojeva jednaka:

A. 36 *B.* 36.5 *C.* 37 *D.* 37.5 *E.* 38.5

Rezultat: D.

Zadatak 196 (Maturanti, TUPŠ)

Miješamo tri vrste kave. Uzmemo li 120 kg kave po 40 kn/kg, 150 kg za 36 kn/kg, koliko moramo uzeti kave po 45 kn/kg da cijena mješavine bude 42 kn/kg?

Rješenje 196

Ponovimo!

Neka je zadano n pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$. Broj:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n}{n}$$

je njihova aritmetička sredina ili prosjek.

Neke veličine za koje tražimo aritmetičku (prosječnu) vrijednost mogu biti i jednake. Ako su $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$ veličine čiji se prosjek traži i imamo

f_1 veličina a_1
f_2 veličina a_2
f_3 veličina a_3
...
f_n veličina a_n,

tada je prosječna vrijednost, vagana (ponderirana) aritmetička sredina:

$$A = \frac{f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + f_3 \cdot a_3 + \ ... \ + f_n \cdot a_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ ... \ + f_n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Označimo slovom x broj kilograma kave po 45 kn/kg. Tada je:

$$\frac{120 \cdot 40 + 150 \cdot 36 + x \cdot 45}{120 + 150 + x} = 42 \Rightarrow \frac{4800 + 5400 + 45 \cdot x}{270 + x} = 42 \Rightarrow \frac{10\,200 + 45 \cdot x}{270 + x} = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10\,200 + 45 \cdot x}{270 + x} = 42 \ / \cdot (270 + x) \Rightarrow 10\,200 + 45 \cdot x = 42 \cdot (270 + x) \Rightarrow 10\,200 + 45 \cdot x = 11340 + 42 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45 \cdot x - 42 \cdot x = 11340 - 10\,200 \Rightarrow 3 \cdot x = 1140 \Rightarrow 3 \cdot x = 1140 \ /: 3 \Rightarrow x = 380.$$

Vježba 196

Miješamo tri vrste kave. Uzmemo li 120 kg kave po 40 kn/kg, 150 kg za 36 kn/kg i 380 kg kave za 45 kn/kg, kolika je cijena mješavine?

Rezultat: 42 kn/kg.

Zadatak 197 (Maturanti, TUPŠ)

Marko je pročitao 2/3, Ana 7/11, Pero 5/6 i Višnja 1/2 iste knjige. Tko je pročitao najviše?

A. Marko *B.* Ana *C.* Pero *D.* Višnja

Rješenje 197

Ponovimo!

Razlomak se općenito piše u obliku $\frac{a}{b}$, $a, b \in N$. Razlomak je količnik brojeva a i b. Broj a zove se brojnik razlomka, a b nazivnik razlomka.

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{n} < \frac{b}{n}.$$

1.inačica

Zadane razlomke svedemo na zajednički nazivnik (najmanji zajednički višekratnik). To je broj 66. Kada razlomci imaju jednake nazivnike najveći je onaj razlomak koji ima najveći brojnik. Pero je pročitao najviše knjige. Odgovor je pod C

Marko	Ana	Pero	Višnja
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{44}{66}$	$\frac{42}{66}$	$\frac{55}{66}$	$\frac{33}{66}$

2.inačica

Svaki razlomak pretvorimo u decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom. Najveći decimalni broj traženo je rješenje. Pero je pročitao najviše knjige. Odgovor je pod C.

$$\text{Marko}: \frac{2}{3} = 0.66667 \quad , \quad \text{Ana}: \frac{7}{11} = 0.63636 \quad , \quad \text{Pero}: \frac{5}{6} = 0.83333 \quad , \quad \text{Višnja}: \frac{1}{2} = 0.50000$$

Vježba 197

Marko je pročitao 2/3, Ana 7/11, Pero 5/6 i Višnja 1/2 iste knjige. Tko je pročitao najmanje?

A. Marko *B.* Ana *C.* Pero *D.* Višnja

Rezultat: D.

Zadatak 198 (Ninoslav, srednja škola)

Ako je recipročna vrijednost od x + 1 jednaka x – 1, nađi x.

Rješenje 198

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Za svaki realan broj a različit od 0 postoji jedan i samo jedan realan broj, označimo ga s a^{-1}, takav da je

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Broj a^{-1} zovemo inverz ili recipročni broj broja a.

Budući da je recipročna vrijednost od x + 1 jednaka x – 1, njihov umnožak mora biti 1.

$$\left.\begin{matrix} a = x+1 \\ a^{-1} = x-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[a \cdot a^{-1} = 1\right] \Rightarrow (x+1) \cdot (x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \,/\sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Vježba 198

Ako je recipročna vrijednost od x – 1 jednaka x + 1, nađi x.

Rezultat: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

Zadatak 199 (Ninoslav, srednja škola)

Ako je 2 korijen (rješenje) jednadžbe $x^3 + h \cdot x + 10 = 0$, nađi x.

Rješenje 199

Ponovimo!

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_0\right)=0.$$

Budući da je x = 2 korijen (rješenje) jednadžbe $x^3 + h \cdot x + 10 = 0$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+h\cdot x+10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2^3+2\cdot h+10=0\ \Rightarrow\ 8+2\cdot h+10=0\ \Rightarrow\ 2\cdot h=-8-10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot h=-18\ \Rightarrow\ 2\cdot h=-18\ /:2\ \Rightarrow\ h=-9.$$

Vježba 199

Ako je 2 korijen (rješenje) jednadžbe $x^3 + h \cdot x + 20 = 0$, nađi x.

Rezultat: – 14.

Zadatak 200 (Srdjan, pripravnik)

Jednoj osobi zazvoni sat svake 4 minute, drugoj svakih 6 minuta, a trećoj svakih 7 minuta. Svima satovi zazvone u 12 sati. Kada će im ponovno zazvoniti satovi istodobno?

Rješenje 200

Ponovimo!

$$1\ h=60\ \min.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a=k\cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=k \quad \text{ili} \quad a:b=k.$$

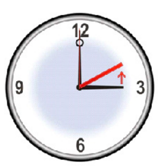
Ako su a i b prirodni brojevi, onda broj koji je djeljiv i brojem a i brojem b zovemo zajedničkim višekratnikom brojeva a i b. Svaka dva prirodna broja imaju beskonačno puno zajedničkih višekratnika. Najmanji od njih zovemo najmanjim zajedničkim višekratnikom tih brojeva.

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Složeni broj je broj koji ima tri ili više djelitelja

Prosti brojevi služe za rastavljanje složenih brojeva na proste faktore. Svaki složeni broj može se na jedinstven način rastaviti na proste faktore.



4 min

6 min

7 min

Vrijeme za koje će svi satovi istodobno zazvoniti jednako je najmanjem zajedničkom višekratniku brojeva 4, 6 i 7. Zato ćemo rastaviti brojeve na proste faktore i odrediti najmanji zajednički višekratnik.

4 , 6 , 7	2
2 , 3 , 7	2
1 , 3 , 7	3
1 , 1 , 7	7
1 , 1 , 1	

$$v\left(4,\ 6,\ 7\right)=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=84.$$

Satovi će ponovno istodobno zazvoniti nakon 84 minute, tj. u

$$12\ h+84\ \min=12\ h+1\ h+24\ \min=13\ h\ 24\ \min.$$

Vježba 200

Jednoj osobi zazvoni sat svakih 6 minuta, drugoj svake 4 minute, a trećoj svakih 7 minuta. Svima satovi zazvone u 14 sati. Kada će im ponovno zazvoniti satovi istodobno?

Rezultat: 15 h 24 min.