Zadatak 141 (Petar, gimnazija)

Dokažite matematičkom indukcijom $6 \mid n^3 + 11 \cdot n$, za sve prirodne brojeve.

Rješenje 141

Ponovimo!

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Na primjer,

$$8 = 2 \cdot 4 \quad , \quad 24 = 2 \cdot 12 \quad , \quad 198 = 2 \cdot 99 \quad , \quad 2570 = 2 \cdot 1285.$$

Parni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2 \cdot n,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Umnožak dva uzastopna prirodna broja je uvijek paran broj.

$$6 \cdot 7 = 42 = 2 \cdot 21 \quad , \quad 9 \cdot 10 = 90 = 2 \cdot 45 \quad , \quad n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \ , \ n, k \in N.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnja za sljedbenika n + 1.

U zadatku treba dokazati da je broj 6 djelitelj zadanog izraza $6 \mid n^3 + 11 \cdot n$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) sa $f(n) = 6 \mid n^3 + 11 \cdot n$.

Zapamti!

Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi $a = c \cdot b$. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije, n = 1

$$f(1) = 1^3 + 11 \cdot 1 = 1 + 11 = 12 = 6 \cdot 2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije, n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 6. Tada pišemo:

$$f(n) = n^3 + 11 \cdot n = 6 \cdot N. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj N je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 6.

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$f(n+1) = (n+1)^3 + 11 \cdot (n+1) = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 + 11 \cdot n + 11 =$$

$$= n^3 + 11 \cdot n + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 12 = \left(n^3 + 11 \cdot n\right) + 3 \cdot n \cdot (n+1) + 12.$$

Budući da je umnožak dva uzastopna prirodna broja paran broj, dalje slijedi:

$$f(n+1) = \left(n^3 + 11 \cdot n\right) + 3 \cdot \underbrace{n \cdot (n+1)}_{\text{paran broj}} + 12 = \left(n^3 + 11 \cdot n\right) + 3 \cdot 2 \cdot k + 12 = \left(n^3 + 11 \cdot n\right) + 6 \cdot k + 12 =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{koristimo induktivnu} \\ \text{pretpostavku} \end{bmatrix} = f(n) + 6 \cdot k + 12 = 6 \cdot N + 6 \cdot k + 12 = 6 \cdot (N + k + 2).$$

Dobili smo na kraju faktor 6 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 141

Dokažite matematičkom indukcijom $3 \mid n^3 - n$, za sve prirodne brojeve.

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 142 (Katarina, studentica)

Dokažite matematičkom indukcijom: $1+q+q^2+q^3+\ \ldots\ +q^{n-1}+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ ,\ q\neq 1.$

Rješenje 142

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

Načelo matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

i) Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.

ii) Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.

iii) Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$1+q=\frac{1-q^{1+1}}{1-q}\Rightarrow 1+q=\frac{1-q^2}{1-q}\Rightarrow 1+q=\frac{(1-q)\cdot(1+q)}{1-q}\Rightarrow 1+q=\frac{(1-q)\cdot(1+q)}{1-q}\Rightarrow 1+q=1+q.$$

ii) Pretpostavka indukcije.

Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$1+q+q^2+q^3+\ \ldots\ +q^{n-1}+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

iii) Korak indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$1+q+q^2+q^3+\ \ldots\ +q^{n-1}+q^n+q^{n+1}=\left(1+q+q^2+q^3+\ \ldots\ +q^{n-1}+q^n\right)+q^{n+1}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{iskoristimo}\\ \text{pretpostavku indukcije}\end{array}\right]=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}\cdot(1-q)}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+1}\cdot q}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}.$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, s n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Vježba 142

Dokažite matematičkom indukcijom: $1+x+x^2+x^3+\ \ldots\ +x^{n-1}+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ ,\ x\neq 1.$

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 143 (Mala, gimnazija)

Odredi prost broj ako je zbroj svih njegovih faktora jednak 998.

Rješenje 143

Ponovimo!

Prost (prim) broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv sa jedan i samim sobom. Prost broj ima točno dva djelitelja: broj 1 i samog sebe.

Pretpostavimo da je p prost broj. Jedina su njegova dva faktora: broj 1 i p. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$p+1=998 \Rightarrow p=998-1 \Rightarrow p=997.$$

Vježba 143

Odredi prost broj ako je zbroj svih njegovih faktora jednak 48.

Rezultat: 47.

Zadatak 144 (Mala, gimnazija)

Koja je posljednja znamenka umnoška prvih 100 prostih brojeva?

Rješenje 144

Ponovimo!

Prost (prim) broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv sa jedan i samim sobom. Prost broj ima točno dva djelitelja: broj 1 i samog sebe.

Proste brojeve proučavao je grčki geograf i matematičar Eratosten (drugo stoljeće prije Krista) poznat i po tome što je prvi izračunao opseg Zemlje. Pronašao je način za određivanje prostih brojeva. Taj postupak naziva se Eratostenovo sito. Da prostih brojeva ima beskonačno mnogo prvi je zaključio jedan od najvećih matematičara antike Euklid.

Promatrajmo početak niza prostih brojeva:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Među tim prostim brojevima su brojevi 2 i 5 pa je posljednja znamenka umnoška 0.

Vježba 144

Koja je posljednja znamenka umnoška prvih 50 prostih brojeva?

Rezultat: 0.

Zadatak 145 (Sophy, TUPŠ)

Napišite neki uređeni par realnih brojeva (a, b) tako da bude $10^a = b - 3$.

Rješenje 145

Ponovimo!

$$x^0=1 \quad , \quad x^1=x \quad , \quad x=y \Rightarrow y=x.$$

Budući da na lijevoj strani jednakosti postoji potencija, računamo njezinu vrijednost za po volji odabrani broj a. Iz toga se dobije b.

a = 0

$$\left.\begin{array}{l} 10^a=b-3 \\ a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^0=b-3 \Rightarrow 1=b-3 \Rightarrow b-3=1 \Rightarrow b=1+3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow (a, b)=(0, 4).$$

a = 1

$$\left.\begin{array}{l} 10^a=b-3 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^1=b-3 \Rightarrow 10=b-3 \Rightarrow b-3=10 \Rightarrow b=10+3 \Rightarrow b=13 \Rightarrow (a, b)=(1, 13).$$

a = 2

$$\left.\begin{array}{l} 10^a=b-3 \\ a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 10^2=b-3 \Rightarrow 100=b-3 \Rightarrow b-3=100 \Rightarrow b=100+3 \Rightarrow b=103 \Rightarrow (a, b)=(2, 103).$$

itd.

Vježba 145

Napišite neki uređeni par realnih brojeva (a, b) tako da bude $10^a = b - 1$.

Rezultat: (a, b) = (1, 11).

Zadatak 146 (Mirna, srednja škola)

Odredi najmanju vrijednost razlomka $\frac{3 \cdot n + 2}{n + 1}$, $n \in N$.

Rješenje 146

Ponovimo!

$$\frac{a - b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Za razlomke istih brojnika vrijedi da je najmanji onaj razlomak koji ima najveći nazivnik.

$$\frac{m}{a} < \frac{m}{b} < \frac{m}{c} \Rightarrow a > b > c.$$

Za razlomke istih brojnika vrijedi da je najveći onaj razlomak koji ima najmanji nazivnik.

$$\frac{m}{a} > \frac{m}{b} > \frac{m}{c} \Rightarrow a < b < c.$$

Zadani razlomak napišemo u obliku

$$\frac{3 \cdot n + 2}{n + 1} = \frac{3 \cdot n + 2}{n + 1} = \frac{3 \cdot n + 3 - 1}{n + 1} = \frac{3 \cdot n + 3 - 1}{n + 1} = \frac{3 \cdot (n + 1) - 1}{n + 1} = \frac{3 \cdot (n + 1)}{n + 1} - \frac{1}{n + 1} =$$

$$= \frac{3 \cdot (n + 1)}{n + 1} - \frac{1}{n + 1} = 3 - \frac{1}{n + 1}.$$

Uočimo da je za svaki prirodni broj n vrijednost izraza manja od 3. Ta će vrijednost biti najmanja kada je vrijednost razlomka

$$\frac{1}{n + 1}$$

najveća. Vrijednost tog razlomka je najveća, ako mu je nazivnik najmanji, a to je za n = 1.
Za n = 1 vrijednost zadanog razlomka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3 \cdot n + 2}{n + 1} \\ n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3 \cdot 1 + 2}{1 + 1} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}.$$

Vježba 146

Odredi najmanju vrijednost razlomka $\frac{3 \cdot n + 1}{n + 1}$, $n \in N$.

Rezultat: 2.

Zadatak 147 (Ivan, gimnazija)

Odredi cijele brojeve za koje je $\frac{a^3 + 1}{a - 1}$ cijeli broj.

Rješenje 147

Ponovimo!

Skup cijelih brojeva: $Z = \{ \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$.

$$\frac{a}{1} = a \quad , \quad \frac{a + b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

$$\frac{a^3 + 1}{a - 1} = \frac{a^3 - 1 + 2}{a - 1} = \frac{a^3 - 1 + 2}{a - 1} = \frac{a^3 - 1}{a - 1} + \frac{2}{a - 1} = \frac{(a - 1) \cdot \left(a^2 + a + 1\right)}{a - 1} + \frac{2}{a - 1} =$$

$$=\frac{(a-1)\cdot\left(a^{2}+a+1\right)}{a-1}+\frac{2}{a-1}=a^{2}+a+1+\frac{2}{a-1}.$$

Zadani izraz bit će cijeli broj, ako je $\frac{2}{a-1}$ cijeli broj. To je moguće ako je broj 2 djeljiv s a – 1. Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}a-1=-2\\a-1=-1\\a-1=1\\a-1=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=-2+1\\a=-1+1\\a=1+1\\a=2+1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=-1\\a=0\\a=2\\a=3\end{array}\right\}.$$

Izraz će biti cijeli broja ako je $a\in\{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$.

Vježba 147

Odredi cijele brojeve za koje je $\frac{a^{3}-1}{a+1}$ cijeli broj.

Rezultat: $a\in\{-3,\ -2,\ 0,\ 1\}$.

Zadatak 148 (Vesela ekipa, ekonomska škola)

U dvoznamenkastom broju znamenka jedinica tri puta je veća od znamenke desetica. Ako se tom broju doda 36, dobije se broj zamjenjenih znamenki. Umnožak kvadrata znamenki polaznog broja je:

A) 91 B) 100 C) 125 D) 169 E) 144

Rješenje 148

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj x tri puta veći od broja y?

$$x=3\cdot y\quad,\quad\frac{x}{y}=3\quad,\quad\frac{x}{3}=y.$$

Za dvoznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{ab}=10\cdot a+b,$$

gdje je $a\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $b\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

1.inačica

Promatrajmo dvoznamenkasti broj $\overline{ab}.$ Iz uvjeta zadatka postavimo sustav jednadžbi.

" U dvoznamenkastom broju znamenka jedinica tri puta je veća od znamenke desetica. "

$$b=3\cdot a.$$

" Ako se tom broju doda 36, dobije se broj zamjenjenih znamenki. "

$$\overline{ab}+36=\overline{ba}.$$

Riješimo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab}+36=\overline{ba}\\3\cdot a=b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10\cdot a+b+36=10\cdot b+a\\3\cdot a=b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10\cdot a+b-10\cdot b-a=-36\\3\cdot a=b\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}9\cdot a-9\cdot b=-36\\3\cdot a-b=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}9\cdot a-9\cdot b=-36\ /:(-9)\\3\cdot a-b=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-a+b=4\\3\cdot a-b=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a=4\Rightarrow 2\cdot a=4\ /:2\Rightarrow a=2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2\\3\cdot a=b\end{array}\right\}\Rightarrow 3\cdot 2=b\Rightarrow 6=b\Rightarrow b=6.$$

To je broj 26. Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$2^{2}\cdot 6^{2}=4\cdot 36=144.$$

Odgovor je pod E.

2.inačica

Odredimo sve dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka jedinica tri puta veća od znamenke desetica.

$$13\ ,\ 26\ ,\ 39.$$

Za svaki broj provjerimo drugi uvjet zadatka: " Ako se tom broju doda 36, dobije se broj zamjenjenih znamenki. "

- 13 + 36 = 49 netočno
- 26 + 36 = 62 točno
- 39 + 36 = 75 netočno.

Traženi broj je 26. Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$2^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 36 = 144.$$

Odgovor je pod E.

Vježba 148

U dvoznamenkastom broju znamenka jedinica tri puta je veća od znamenke desetica. Ako se tom broju doda 36, dobije se broj zamjenjenih znamenki. Zbroj kvadrata znamenki polaznog broja je:

A) 8 B) 40 C) 64 D) 169 E) 144

Rezultat: B.

Zadatak 149 (Frendice, HTT)

Izračunajte vrijednost izraza: $\dfrac{\frac{2}{5}-0.25}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}$.

Rješenje 149

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a=\frac{a}{1}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{\frac{2}{5}-0.25}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{25}{100}}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{25}{100}}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{5}{\frac{5}{1}-\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{5}{\frac{10-5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{5}{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{\frac{5}{1}}{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-\dfrac{\frac{5}{1}}{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-2}=$$

$$=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{3}=\frac{\frac{8-5}{20}}{3}=\frac{\frac{3}{20}}{3}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{1}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{1}}=\frac{1}{20}.$$

Vježba 149

Izračunajte vrijednost izraza: $\dfrac{\frac{2}{5}-0.5^{2}}{5-\dfrac{5}{5-\frac{5}{2}}}$.

Rezultat: $\dfrac{1}{20}$.

Zadatak 150 (Frendice, HTT)

Izračunajte vrijednost izraza: $0.25-\left\{\frac{1}{2}-\left[0.25-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}.$

Rješenje 150

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a=\frac{a}{1}\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Moramo paziti na zagrade. Najprije računamo unutar okruglih zagrada ( ), zatim unutar uglatih zagrada [ ] i napokon unutar vitičastih zagrada { }.

1.inačica

$$0.25-\left\{\frac{1}{2}-\left[0.25-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{25}{100}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{25}{100}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{25}{100}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{25}{100}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\frac{1-2}{2}\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\frac{-1}{2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1+2}{4}\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{2-3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

2.inačica

$$0.25-\left\{\frac{1}{2}-\left[0.25-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{25}{100}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{25}{100}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{25}{100}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{25}{100}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1-2+1-2+4}{4}=\frac{1-2+1-2+4}{4}=\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 150

Izračunajte vrijednost izraza: $0.25-\left\{\frac{1}{2}-\left[0.25+\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}.$

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 151 (Marijan, srednja škola)

$$\text{Dokazati}: \sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

Rješenje 151

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n.$$

1.inačica

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{2}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2^{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

2.inačica

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1\ /^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)^{2}=1^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)^{2}=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2^{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{2}\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=1\ \Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2^{2}-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2}\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(4-2-\sqrt{3}\right)=1\ \Rightarrow\ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1\ \Rightarrow\ 2^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}=1\ \Rightarrow\ 4-3=1\ \Rightarrow\ 1=1.$$

Vježba 151

Dokazati : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 152 (Tea, srednja škola)

Pojednostavni : $A=\sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}}.$

Rješenje 152

Ponovimo!

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, $a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b)$, $\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a$, $\sqrt{a^{2}}=a\ ,\ a\geq 0.$

$$\sqrt[3]{a^3}=a \quad , \quad \sqrt[n]{a^n}=a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}.$$

1.inačica

$$A=\sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\left(9+\sqrt{17}\right)\cdot\left(9-\sqrt{17}\right)}}=\sqrt[3]{\sqrt{9^2-\left(\sqrt{17}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{81-17}}=\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{\sqrt{8^2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2.$$

2.inačica

$$A=\sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\left(9+\sqrt{17}\right)\cdot\left(9-\sqrt{17}\right)}}=\sqrt[6]{\left(9+\sqrt{17}\right)\cdot\left(9-\sqrt{17}\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{9^2-\left(\sqrt{17}\right)^2}=\sqrt[6]{81-17}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2.$$

Vježba 152

Pojednostavni : $A=\sqrt{\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}}$.

Rezultat: A = 2.

Zadatak 153 (Tea, srednja škola)

Ako je $1+2+3+\ \dots\ +50=1275$, koliko je $51+52+53+\ \dots\ +100$?

Rješenje 153

Ponovimo!

$$1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Svojstva zbrajanja u skupu realnih brojeva:

- zakon komutativnosti ili zamjene mjesta

$$a+b=b+a$$

- zakon asocijativnosti

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

1.inačica

Traženi zbroj transformiramo na sljedeći način:

$$51+52+53+\ \dots\ +100=(50+1)+(50+2)+(50+3)+\ \dots\ +(50+50)=$$

$$=\underbrace{50+50+50+\ \dots\ +50}_{50 \text{ pribrojnika}}+\underbrace{1+2+3+\ \dots\ +50}_{=1275}=50\cdot 50+1275=2500+1275=3775.$$

2.inačica

Izračunamo zbroj prvih 100 prirodnih brojeva.

$$1+2+3+\ \dots\ +100=\frac{100\cdot(100+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+\ \dots\ +100=\frac{100\cdot 101}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ \dots\ +100=\frac{100\cdot 101}{2} \Rightarrow 1+2+3+\ \dots\ +100=50\cdot 101 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ \dots\ +100=5050. \qquad (1)$$

Uporabom jednakosti (1) računamo traženi zbroj.

$$1+2+3+\ \dots\ +50+51+52+53+\ \dots\ +100=5050 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+2+3+\ \dots\ +50)+(51+52+53+\ \dots\ +100)=5050 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+2+3+\ \dots\ +50)}_{=1275}+(51+52+53+\ \dots\ +100)=5050 \Rightarrow 1275+(51+52+53+\ \dots\ +100)=5050 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 51+52+53+\ \dots\ +100=5050-1275 \Rightarrow 51+52+53+\ \dots\ +100=3775.$$

Vježba 153

Ako je $1+2+3+\ \dots\ +20=210$, koliko je $21+22+23+\ \dots\ +40$?

Rezultat: 610.

Zadatak 154 (Sonja, gimnazija)

Izračunajte: $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}$.

Rješenje 154

Ponovimo!

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

Za realne brojeve $a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2\geq b$ vrijedi:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

1.inačica

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)}=$$

$$=-\sqrt{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\cdot\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)}=-\sqrt{\left(3-2\cdot\sqrt{6}+2\right)\cdot\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)}=$$

$$=-\sqrt{\left(5-2\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)}=-\sqrt{5^2-\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2}=-\sqrt{5^2-2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2}=-\sqrt{25-4\cdot 6}=$$

$$=-\sqrt{25-24}=-\sqrt{1}=-1.$$

2.inačica

Uočimo da je

$$\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=\sqrt{2+2\cdot\sqrt{2\cdot 3}+3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Računamo zadani izraz.

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=2-3=-1.$$

3.inačica

Uporabom formule

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

transformiramo korijen

$$\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}.$$

$$\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=\sqrt{5+\sqrt{2^2\cdot 6}}=\sqrt{5+\sqrt{4\cdot 6}}=\sqrt{5+\sqrt{24}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5+\sqrt{25-24}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-24}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{1}}{2}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}+\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}+\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Računamo zadani izraz.

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=2-3=-1.$$

Vježba 154

Izračunajte: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 155 (Goran, gimnazija)

Pojednostavni izraz: $\frac{19}{5-\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{5}}.$

$A)\ \sqrt{5}\qquad B)\ \sqrt{6}\qquad C)\ 5\qquad D)\ 6$

Rješenje 155

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\frac{n}{1}=n\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{19}{5-\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{5}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionaliziramo svaki}\\\text{nazivnik posebno}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{19}{5-\sqrt{6}}\cdot\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{\left(5-\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{5^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{5}=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{25-6}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{5-6}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{5}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{19}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{-1}+\sqrt{5}=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{19}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{5}=$$

$$=5+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=5+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=5.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 155

Pojednostavni izraz: $\frac{5}{\sqrt{5}}-\frac{19}{\sqrt{6}-5}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}.$

$A)\ \sqrt{5}\qquad B)\ \sqrt{6}\qquad C)\ 5\qquad D)\ 6$

Rezultat: C.

Zadatak 156 (Darko, srednja škola)

Vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}$ jednaka je:

$A)\ 1\qquad B)\ 2\qquad C)\ 3\qquad D)\ 4$

Rješenje 156

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}\quad,\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad,\quad a^1=a.$$

$$a^0=1\quad,\quad \sqrt[n]{a\cdot\sqrt[m]{b\cdot\sqrt[p]{c}}}=\sqrt[n\cdot m\cdot p]{a^{m\cdot p}\cdot b^p\cdot c}.$$

1.inačica

$$\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4\cdot3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{\sqrt[4]{3^{-4}\cdot 3}}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4\cdot3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{\sqrt[4]{3^{-4}\cdot 3^1}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[12]{3^4\cdot3^{-3}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt[8]{3^{-4}\cdot3^1}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[12]{3^1}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt[8]{3^{-3}}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[12]{3^{12}\cdot3^1}}}{\sqrt[3]{\sqrt[8]{3^{16}\cdot3^{-3}}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{12}\cdot3^1}}{\sqrt[24]{3^{16}\cdot3^{-3}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{13}}}{\sqrt[24]{3^{13}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{13}}}{\sqrt[24]{3^{13}}}=1.$$

2.inačica

$$\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{3^3\cdot3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3^4\cdot3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{3^4\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3^3\cdot\sqrt[4]{3}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{3^4\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}{\sqrt[6]{3^3\cdot\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[6]{\frac{3^4\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}{3^3\cdot\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[6]{3\cdot\frac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[6]{3\cdot\sqrt[4]{\frac{3^{-3}}{3}}}=\sqrt[6]{\sqrt[4]{3^4\cdot\frac{3^{-3}}{3}}}=$$

$$=\sqrt[24]{3^4\cdot\frac{3^{-3}}{3}}=\sqrt[24]{3^3\cdot3^{-3}}=\sqrt[24]{3^0}=\sqrt[24]{1}=1.$$

3.inačica

$$\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}{\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{12}\cdot3^4\cdot3^{-3}}}{\sqrt[24]{3^{16}\cdot3^{-4}\cdot3}}=\frac{\sqrt[24]{3^{12}\cdot3^4\cdot3^{-3}}}{\sqrt[24]{3^{16}\cdot3^{-4}\cdot3^1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[24]{3^{13}}}{\sqrt[24]{3^{13}}}=\frac{\sqrt[24]{3^{13}}}{\sqrt[24]{3^{13}}}=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 156

Vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3^{-1}\cdot\sqrt[4]{3}}}}{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{3^{-3}}}}}$ jednaka je:

$A)\ 1\qquad B)\ 2\qquad C)\ 3\qquad D)\ 4$

Rezultat: A.

Zadatak 157 (Mimi, gimnazija)

Koliko je $\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[16]{a}\right)$, za $a=2$?

Rješenje 157

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt[n\cdot p]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[16]{a}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1^2-\left(\sqrt[16]{a}\right)^2\right)=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[8]{a}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1^2-\left(\sqrt[8]{a}\right)^2\right)=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[4]{a}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1^2-\left(\sqrt[4]{a}\right)^2\right)=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)=1^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=1-a=[a=2]=1-2=-1.$$

Vježba 157

Koliko je $\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\cdot\left(1-\sqrt[16]{a}\right)$, za $a=3$?

Rezultat: – 2.

Zadatak 158 (Mimi, gimnazija)

Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

Rješenje 158

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Budući da je aritmetička sredina 27 brojeva jednaka 72, slijedi:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{27}}{27}=72 \Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{27}}{27}=72 \;/\cdot 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{27}=1944.$$

Oduzmemo li od tog zbroja brojeve 13 i 41 dobit ćemo zbroj sa 25 pribrojnika koji iznosi:

$$a_1'+a_2'+a_3'+\ldots+a_{25}'=1944-13-41 \Rightarrow a_1'+a_2'+a_3'+\ldots+a_{25}'=1890.$$

Njegova aritmetička sredina ima vrijednost:

$$\frac{a_1'+a_2'+a_3'+\ldots+a_{25}'}{25}=\frac{1890}{25}=75.6.$$

Vježba 158

Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 15 i 39, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

Rezultat: 75.6.

Zadatak 159 (Mimi, gimnazija)

Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

Rješenje 159

Ponovimo!

$$1+2+3+\ \ldots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n}.$$

Budući da je aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka 11, slijedi:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_{10}}{10}=11\ \Rightarrow\ \frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_{10}}{10}=11\ /\cdot 10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_{10}=110.$$

Najveću vrijednost jednog od tih deset pribrojnika dobit ćemo, ako za preostalih devet pribrojnika uzmemo prvih devet prirodnih brojeva.

$$\Rightarrow\ 1+2+3+\ \ldots\ +9+a_i=110\ \Rightarrow\ (1+2+3+\ \ldots\ +9)+a_i=110\ \Rightarrow\ \frac{9\cdot(9+1)}{2}+a_i=110\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{9\cdot 10}{2}+a_i=110\ \Rightarrow\ \frac{9\cdot 10}{2}+a_i=110\ \Rightarrow\ 9\cdot 5+a_i=110\ \Rightarrow\ 45+a_i=110\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_i=110-45\ \Rightarrow\ a_i=65.$$

Vježba 159

Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 12. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

Rezultat: 75.

Zadatak 160 (Tony, ekonomska škola)

$$\text{Izračunaj}:\ \frac{1}{0.1}+\frac{2}{0.2}+\frac{3}{0.3}+\ \ldots\ +\frac{9}{0.9}.$$

Rješenje 160

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

1.inačica

$$\frac{1}{0.1}+\frac{2}{0.2}+\frac{3}{0.3}+\ \ldots\ +\frac{9}{0.9}=\left[\begin{array}{l}\text{svaki razlomak}\\ \text{proširimo s 10}\end{array}\right]=\frac{1\cdot 10}{0.1\cdot 10}+\frac{2\cdot 10}{0.2\cdot 10}+\frac{3\cdot 10}{0.3\cdot 10}+\ \ldots\ +\frac{9\cdot 10}{0.9\cdot 10}=$$

$$=\frac{10}{1}+\frac{20}{2}+\frac{30}{3}+\ \ldots\ +\frac{90}{9}=\underbrace{10+10+10+\ \ldots\ +10}_{9\ \text{puta}}=9\cdot 10=90.$$

2.inačica

$$\frac{1}{0.1}+\frac{2}{0.2}+\frac{3}{0.3}+\ \ldots\ +\frac{9}{0.9}=\frac{1}{\frac{1}{10}}+\frac{2}{\frac{2}{10}}+\frac{3}{\frac{3}{10}}+\ \ldots\ +\frac{9}{\frac{9}{10}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{10}}+\frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{10}}+\frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{10}}+\ \ldots\ +\frac{\frac{9}{1}}{\frac{9}{10}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\frac{1}{1}}}{10}+\frac{\frac{2}{\frac{1}{2}}}{10}+\frac{\frac{3}{\frac{1}{3}}}{10}+\ \dots\ +\frac{\frac{9}{\frac{1}{9}}}{10}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{1}}}{10}+\frac{\frac{1}{\frac{1}{1}}}{10}+\frac{\frac{1}{\frac{1}{1}}}{10}+\ \dots\ +\frac{\frac{1}{\frac{1}{1}}}{10}=\underbrace{10+10+10+\ \dots\ +10}_{9\ \text{puta}}=9\cdot 10=90.$$

Vježba 160

Izračunaj : $\frac{1}{0.1}+\frac{2}{0.2}+\frac{3}{0.3}+\ \dots\ +\frac{8}{0.8}.$

Rezultat: 80.