Zadatak 121 (4A, TUPŠ)

Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

Rješenje 121

Ponovimo!

Za dvoznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ako se prirodnom broju x dopiše zdesna znamenka y, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, možemo pisati

$$\overline{xy} = 10 \cdot x + y.$$

Računske operacije	Inverzne računska operacije
zbrajanje	oduzimanje
oduzimanje	zbrajanje
množenje	dijeljenje
dijeljenje	množenje

1.inačica

Zadatak rješavamo od kraja prema početku. Polazimo od broja 21 i računamo u suprotnom smjeru koristeći inverzne računske operacije.

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i **dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21**. Nađi taj broj.

Broj 21 pomnožimo sa 11:

$$21 \cdot 11 = 231.$$

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim **izračunatom kvocijentu dopiše 1** i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

Broju 231 izbrišemo znamenku 1 pa ostaje

$$23.$$

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, **dobiveni broj podijeli sa 13**, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

Broj 23 pomnožimo sa 13:

$$23 \cdot 13 = 299.$$

- **Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9**, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

Brisanjem posljednje znamenke 9 broju 299 dobije se traženi broj 29.

2.inačica

Ako traženi broj označimo sa x, možemo formirati jednadžbu prema uvjetima zadatka.

- **Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9**, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

$$10 \cdot x + 9$$

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, **dobiveni broj podijeli sa 13**, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

$$\frac{10 \cdot x + 9}{13}$$

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, dobiveni broj podijeli sa 13, **zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1** i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21. Nađi taj broj.

$$10 \cdot \frac{10 \cdot x + 9}{13} + 1$$

- Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 9, dobiveni broj podijeli sa 13, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 1 i **dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 21**. Nađi taj broj.

$$\left(10 \cdot \frac{10 \cdot x+9}{13}+1\right) : 11=21.$$

Rješenje jednadžbe iznosi:

$$\left(10 \cdot \frac{10 \cdot x+9}{13}+1\right) : 11=21 \Rightarrow \left(\frac{100 \cdot x+90}{13}+1\right) : 11=21 \Rightarrow \frac{100 \cdot x+90+13}{13} : 11=21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot x+103}{13} : 11=21 \Rightarrow \frac{100 \cdot x+103}{13} \cdot \frac{1}{11}=21 \Rightarrow \frac{100 \cdot x+103}{143}=21 \ / \cdot 143 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot x+103=3003 \Rightarrow 100 \cdot x=3003-103 \Rightarrow 100 \cdot x=2900 \ / : 100 \Rightarrow x=29.$$

Vježba 121

Ako se nekom prirodnom broju dopiše zdesna 5, dobiveni broj podijeli sa 15, zatim izračunatom kvocijentu dopiše 4 i dobiveni broj podijeli sa 11, dobije se 14. Nađi taj broj.

Rezultat: 22.

Zadatak 122 (Hrvoje, gimnazija)

Odredi četiri razlomka a, b, c i d sa jednoznamenkastim brojnicima i nazivnicima tako da vrijedi $\frac{7}{9}<a<b<c<d<\frac{8}{9}$.

Rješenje 122

Ponovimo!

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a, b, c, ... (oznaka nzv(a, b, c, ...)) je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svakim od tih brojeva.

Traženi razlomci su oblika

$$\frac{m}{n}.$$

Brojnik m i nazivnik n su, prema uvjetu zadatka, jednoznamenkasti prirodni brojevi pa n ne može biti niti 1, niti 9.

Ako je n = 1, tada vrijedi

$$\frac{m}{1}>\frac{8}{9} \text{ za } m \in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

Ako je n = 9, tada vrijedi

$$\frac{m}{9}<\frac{7}{9} \text{ za } m \in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \text{ a } \frac{m}{9}>\frac{8}{9} \text{ za } m \in\{9\}.$$

Znači da je $n \in\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

Za svaki n računamo broj m tako da nejednakost bude valjana.

- n = 2

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{2}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 2\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{2}<\frac{8}{9} \ / \cdot 2 \Rightarrow \frac{14}{9}<m<\frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \frac{5}{9}<m<1 \frac{7}{9} \Rightarrow m \text{ ne postoji jer mora biti } m \in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

- n = 3

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{3}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 3\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{3}<\frac{8}{9} \ / \cdot 3 \Rightarrow \frac{21}{9}<m<\frac{24}{9} \Rightarrow \frac{7}{3}<m<\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \frac{1}{3}<m<2 \frac{2}{3} \Rightarrow m \text{ ne postoji jer mora biti } m \in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

- n = 4

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{4}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 4\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{4}<\frac{8}{9} \ /\cdot 4 \Rightarrow \frac{28}{9}<m<\frac{32}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\frac{1}{9}<m<3\frac{5}{9} \Rightarrow m \text{ ne postoji jer mora biti } m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

- n = 5

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{5}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 5\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{5}<\frac{8}{9} \ /\cdot 5 \Rightarrow \frac{35}{9}<m<\frac{40}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\frac{8}{9}<m<4\frac{4}{9} \Rightarrow m=4 \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{4}{5}. \text{ rješenje}$$

- n = 6

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{6}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 6\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{6}<\frac{8}{9} \ /\cdot 6 \Rightarrow \frac{42}{9}<m<\frac{48}{9} \Rightarrow \frac{14}{3}<m<\frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\frac{2}{3}<m<5\frac{1}{3} \Rightarrow m=5 \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{5}{6}. \text{ rješenje}$$

- n = 7

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{7}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 7\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{7}<\frac{8}{9} \ /\cdot 7 \Rightarrow \frac{49}{9}<m<\frac{56}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\frac{4}{9}<m<6\frac{2}{9} \Rightarrow m=6 \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{6}{7}. \text{ rješenje}$$

- n = 8

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{8}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 8\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{8}<\frac{8}{9} \ /\cdot 8 \Rightarrow \frac{56}{9}<m<\frac{64}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\frac{2}{9}<m<7\frac{1}{9} \Rightarrow m=7 \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{7}{8}. \text{ rješenje}$$

- n = 9

$$\frac{7}{9}<\frac{m}{9}<\frac{8}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{množimo nejednakost} \\ \text{brojem } 9\end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{9}<\frac{m}{9}<\frac{8}{9} \ /\cdot 9 \Rightarrow 7<m<8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \text{ ne postoji jer mora biti } m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Traženi razlomci su

$$\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}.$$

Uvjerimo se da vrijedi:

$$\frac{7}{9}<\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{7}{8}<\frac{8}{9}.$$

Napišimo te brojeve u obliku razlomaka s istim nazivnikom.
Tražimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 9, 5, 6, 7, 8.

9 , 5 , 6 , 7 , 8	2	dijelimo s 2
9 , 5 , 3 , 7 , 4	2	dijelimo s 2
9 , 5 , 3 , 7 , 2	2	dijelimo s 2
9 , 5 , 3 , 7 , 1	3	dijelimo sa 3
3 , 5 , 1 , 7 , 1	3	dijelimo sa 3
1 , 5 , 1 , 7 , 1	5	dijelimo s 5
1 , 1 , 1 , 7 , 1	7	dijelimo sa 7
1 , 1 , 1 , 1 , 1		

$$nzv(9,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Budući da je najmanji zajednički višekratnik brojeva 9, 5, 6, 7, 8 broj 2520, svedemo razlomke na nazivnik 2520:

$$\frac{1960}{2520},\ \frac{2016}{2520},\ \frac{2100}{2520},\ \frac{2160}{2520},\ \frac{2205}{2520},\ \frac{2240}{2520}.$$

Uspoređivanjem brojnika dobivamo niz nejednakosti. Vraćanjem na početne zapise dobije se:

$$\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}.$$

Vježba 122

Usporedi razlomke $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$.

Rezultat: $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$.

Zadatak 123 (Mimi, gimnazija)

Nazivniku razlomka $\frac{a}{b}$ pribrojimo 4 · b. Koliko treba dodati brojniku da se razlomak ne promijeni?

Rješenje 123

Ponovimo!

Brojevi

$$\frac{a}{b},\ \ a,\ b \in N$$

zovu se pozitivni racionalni brojevi (razlomci).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice. Skraćivanjem nekog razlomka dobije se razlomak jednak zadanom razlomku.

Ako nazivniku b razlomka $\frac{a}{b}$ dodamo broj 4 · b, dobije se

$$b + 4 \cdot b = 5 \cdot b,$$

peterostruki broj b (peterokratnik broja b).
Znači da brojniku a treba dodati broj 4 · a

$$a + 4 \cdot a = 5 \cdot a$$

da se dobije peterostruki broj a (peterokratnik broja a). Očigledno je:

$$\frac{a + 4 \cdot a}{b + 4 \cdot b} = \frac{5 \cdot a}{5 \cdot b} = \frac{5 \cdot a}{5 \cdot b} = \frac{a}{b}.$$

Vježba 123

Nazivniku razlomka $\frac{a}{b}$ pribrojimo 3 · b. Koliko treba dodati brojniku da se razlomak ne promijeni?

Rezultat: $3 \cdot a$.

Zadatak 124 (Mimi, gimnazija)

Zbroj bilo kojeg dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama u obrnutom poretku, djeljiv je sa 11. Dokaži.

Rješenje 124

Ponovimo!

Za dvoznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b,$$

gdje je $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $b \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \ , \ k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Dokazujemo tvrdnju iz zadatka:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11 \cdot (a + b) = 11 \cdot (a + b), \ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Vježba 124

Razlika bilo kojeg dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama u obrnutom poretku, djeljiva je sa 9. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 125 (Mimi, gimnazija)

Zbroj triju potencija baze 3 čiji su eksponenti uzastopni prirodni brojevi djeljiv je sa 39. Dokaži.

Rješenje 125

Ponovimo!
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n + 3^n \cdot 3^1 + 3^n \cdot 3^2 = 3^n + 3^n \cdot 3 + 3^n \cdot 9 = 3^n \cdot (1 + 3 + 9) =$$

$$= 3^n \cdot 13 = 3^{n-1} \cdot 3^1 \cdot 13 = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot 13 = 3^{n-1} \cdot 39 = 3^{n-1} \cdot 39.$$

Vježba 125

Zbroj dviju potencija baze 3 čiji su eksponenti uzastopni prirodni brojevi djeljiv je sa 4. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 126 (Mimi, gimnazija)

Odredi prirodan broj n tako da vrijedi: $n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 84.$

Rješenje 126

Ponovimo!
Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \ , \ k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Prirodni brojevi koji su djeljivi samo sa 1 i sa samim sobom zovu se prosti ili prim brojevi.
Brojevi koji imaju više od dva djelitelja su složeni brojevi.
Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.
Rastavimo broj 84 na proste faktore:

84	2	dijelimo s 2
42	2	dijelimo s 2
21	3	dijelimo sa 3
7	7	dijelimo sa 7
1		

Tada je:

$$n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 84 \ \Rightarrow \ n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \ \Rightarrow \ n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 7 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1) \ \Rightarrow \ n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1) \ \Rightarrow \ n = 3.$$

Vježba 126

Odredi prirodan broj n tako da vrijedi: $n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 30.$

Rezultat: n = 2.

Zadatak 127 (Iva, gimnazija)

Odredi koji je broj veći: 31^{11} ili 17^{14}.

Rješenje 127

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a<b \text{ i } b<c \Rightarrow a<c \quad , \quad \log x < \log y \Rightarrow x<y \quad , \quad \log a^n = n\cdot\log a.$$

1.inačica

Rješenje zadatka dobije se iz dvije očigledne nejednakosti.

Prva nejednakost:

$$31^{11} < 32^{11} \Rightarrow 31^{11} < \left(2^5\right)^{11} \Rightarrow 31^{11} < 2^{55}.$$

Druga nejednakost:

$$16^{14} < 17^{14} \Rightarrow \left(2^4\right)^{14} < 17^{14} \Rightarrow 2^{56} < 17^{14}.$$

Sada vrijedi:

$$31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14} \Rightarrow 31^{11} < 17^{14}.$$

2.inačica

Uvedemo zamjene: $x = 31^{11}$, $y = 17^{14}$ i logaritmiramo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 31^{11} \\ y = 17^{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{ logaritmiramo }\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 31^{11} \;\; / \log \\ y = 17^{14} \;\; / \log \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = \log 31^{11} \\ \log y = \log 17^{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 11\cdot\log 31 \\ \log y = 14\cdot\log 17 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 11\cdot 1.49136 \\ \log y = 14\cdot 1.23045 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 16.40496 \\ \log y = 17.22630 \end{array}\right\} \Rightarrow \log x < \log y \Rightarrow x < y \Rightarrow 31^{11} < 17^{14}.$$

Vježba 127

Odredi koji je broj veći: 30^{10} ili 16^{13}.

Rezultat: $30^{10} < 16^{13}$, dokaz analogan.

Zadatak 128 (Marija, ekonomska škola)

Izračunaj: $\left(2^{35}\cdot 3^{32} - 4^{17}\cdot 81^8\right) : \left(256^4\cdot 9^{16}\right).$

Rješenje 128

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

1.inačica

$$\left(2^{35}\cdot 3^{32} - 4^{17}\cdot 81^8\right) : \left(256^4\cdot 9^{16}\right) = \frac{2^{35}\cdot 3^{32} - 4^{17}\cdot 81^8}{256^4\cdot 9^{16}} = \frac{2^{35}\cdot 3^{32}}{256^4\cdot 9^{16}} - \frac{4^{17}\cdot 81^8}{256^4\cdot 9^{16}} =$$

$$= \frac{2^{35}\cdot 3^{32}}{\left(2^8\right)^4\cdot\left(3^2\right)^{16}} - \frac{\left(2^2\right)^{17}\cdot\left(3^4\right)^8}{\left(2^8\right)^4\cdot\left(3^2\right)^{16}} = \frac{2^{35}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} - \frac{2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} = \frac{2^3\cdot 2^{32}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} - \frac{2^2\cdot 2^{32}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} =$$

$$= \frac{2^3\cdot 2^{32}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} - \frac{2^2\cdot 2^{32}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}} = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4.$$

2.inačica

$$\left(2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^{8}\right):\left(256^{4}\cdot 9^{16}\right)=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^{8}}{256^{4}\cdot 9^{16}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-\left(2^{2}\right)^{17}\cdot\left(3^{4}\right)^{8}}{\left(2^{8}\right)^{4}\cdot\left(3^{2}\right)^{16}}=$$

$$=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{32}\cdot 3^{32}\cdot\left(2^{3}-2^{2}\right)}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{32}\cdot 3^{32}\cdot\left(2^{3}-2^{2}\right)}{2^{32}\cdot 3^{32}}=2^{3}-2^{2}=8-4=4.$$

Vježba 128

Izračunaj: $\left(2^{35}\cdot 3^{32}+4^{17}\cdot 81^{8}\right):\left(256^{4}\cdot 9^{16}\right).$

Rezultat: 12.

Zadatak 129 (1C, 1D, TUPŠ)

Manji zupčanik ima 8 zubaca, a veći 12. Zupci u kojima se zupčanici dodiruju u ovom trenutku označeni su crvenom bojom. Koliko krugova se treba vrtiti manji zupčanik da se crveni zupci opet dodirnu?

Rješenje 129

Ponovimo!

Brojeve koje množimo zovemo faktori, a rezultat množenja nazivamo umnožak ili produkt.
Višekratnik broja b je umnožak tog broja b i nekog prirodnog broja n. Na primjer, prvih deset višekratnika broja 3 su:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30.$$

Broj b djelitelj je broja a ako je a višekratnik broja b, tj. ako je

$$a=k\cdot b$$

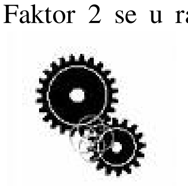
za neki prirodni broj k. Kažemo da je a djeljiv s b ili da b dijeli a.
Broj je djeljiv s 2 ako i samo ako mu je znamenka jedinica jedan od brojeva 0, 2, 4, 6 ili 8.
Prirodni je broj djeljiv sa 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv sa 3.
Prosti brojevi su djeljivi samo s 1 i sa samim sobom. Prosti brojevi ili prim brojevi imaju točno dva djelitelja.
Složeni brojevi imaju više od dva djelitelja. Svaki se složeni broj može rastaviti kao umnožak prostih faktora.
Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a i b (oznaka v(a, b)) je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svakim od tih brojeva.
Računamo najmanji zajednički višekratnik brojeva 8 i 12.

1.inačica

Rastavimo brojeve 8 i 12 na proste faktore.

$$8=2\cdot 4=\qquad\qquad 12=2\cdot 6=$$
$$=2\cdot 2\cdot 2\qquad\qquad =2\cdot 2\cdot 3$$

Faktor 2 se u rastavu broja 8 pojavljuje tri puta, a u rastavu broja 12 dva puta pa će se u najmanjem zajedničkom višekratniku pojaviti tri puta. Faktor 3 se u rastavu broja 8 ne pojavljuje dok se u rastavu broja 12 pojavljuje jedanput pa će se i u najmanjem zajedničkom višekratniku pojaviti jedanput. Sada imamo



$$v(8,\ 12)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\ \Rightarrow\ v(8,\ 12)=24.$$

Općenito, u najmanjem zajedničkom višekratniku se faktori rastava brojeva pojavljuju onoliko puta koliki je veći broj pojavljivanja u pojedinačnim rastavama brojeva.
Da bi se crveni zupci oba zupčanika opet dodirnuli, manji se zupčanik treba vrtiti 3 kruga.

$$24:8=3.$$

2.inačica

Najmanji zajednički višekratnik brojeva 8 i 12 dobije se "na crtu":

8 , 12	2	dijelimo s 2
4 , 6	2	dijelimo s 2
2 , 3	2	dijelimo s 2
1 , 3	3	dijelimo sa 3
1 , 1		

Sada imamo

$$v(8,\ 12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \ \Rightarrow \ v(8,\ 12) = 24.$$

Da bi se crveni zupci oba zupčanika opet dodirnuli, manji se zupčanik treba vrtiti 3 kruga.

$$24 : 8 = 3.$$

Vježba 129

Manji zupčanik ima 8 zubaca, a veći 12. Zupci u kojima se zupčanici dodiruju u ovom trenutku označeni su crvenom bojom. Koliko krugova se treba vrtiti veći zupčanik da se crveni zupci opet dodirnu?

Rezultat: 2 kruga.

Zadatak 130 (4A, TUPŠ)

Odredi bazu brojevnog sustava ako je $2110_{(x)} = 148$.

Rješenje 130

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ ili } \ b = 0 \ \text{ ili } \ a = b = 0.$$

Kvadratna jednadžba nema realna rješenja (ima konjugirano kompleksna rješenja) ako je diskriminanta negativna:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}.
Broj na desnoj strani znaka jednakosti napisat ćemo pomoću potencija broja x pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$2110_{(x)} = 148 \ \Rightarrow \ \overset{3210}{2110}_{(x)} = 148 \ \Rightarrow \ 2\cdot x^3 + 1\cdot x^2 + 1\cdot x^1 + 0\cdot x^0 = 148 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot x^3 + x^2 + x = 148 \ \Rightarrow \ 2\cdot x^3 + x^2 + x - 148 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot x^3 - 128 + x^2 - 16 + x - 4 = 0 \ \Rightarrow \ 2\cdot\left(x^3 - 64\right) + \left(x^2 - 16\right) + (x-4) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot\left(x^3 - 4^3\right) + \left(x^2 - 4^2\right) + (x-4) = 0 \ \Rightarrow \ 2\cdot(x-4)\cdot\left(x^2 + 4\cdot x + 16\right) + (x-4)\cdot(x+4) + (x-4) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-4)\cdot\left[2\cdot\left(x^2 + 4\cdot x + 16\right) + (x+4) + 1\right] = 0 \ \Rightarrow \ (x-4)\cdot\left[2\cdot x^2 + 8\cdot x + 32 + x + 4 + 1\right] = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-4)\cdot\left[2\cdot x^2 + 9\cdot x + 37\right] = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x - 4 = 0 \\ 2\cdot x^2 + 9\cdot x + 37 = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = 4 \ \text{ rješenje} \\ 2\cdot x^2 + 9\cdot x + 37 = 0 \ \text{ nema realnih rješenja} \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba $2 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 37 = 0$ nema realnih rješenja jer je diskriminanta negativna:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2 + 9\cdot x + 37 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = 9 \ , \ c = 37 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} a = 2 \ , \ b = 9 \ , \ c = 37 \\ D = b^2 - 4\cdot a\cdot c \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ D = 9^2 - 4\cdot 2\cdot 37 \ \Rightarrow \ D = -215 < 0.$$

Baza brojevnog sustava je broj 4.

Vježba 130

Odredi bazu brojevnog sustava ako je $11212_{(x)} = 131$.

Rezultat: 3. Naputak: $11212_{(x)}=131 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x^4+x^3+2\cdot x^2+x+2=131 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4+x^3+2\cdot x^2+x-129=0 \Rightarrow x^4-81+x^3-27+2\cdot x^2-18+x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-3^4\right)+\left(x^3-3^3\right)+2\cdot\left(x^2-3^2\right)+\left(x-3\right)=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x=3.$$

Zadatak 131 (Jole, tehnička škola)

U kojem je brojevnom sustavu izvršeno množenje 12 · 13 + 14 · 11 = 321?

Rješenje 131

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^0=1.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}.
Brojeve u jednakosti napisat ćemo pomoću potencija broja x pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$12\cdot 13+14\cdot 11=321 \Rightarrow 12_{(x)}\cdot 13_{(x)}+14_{(x)}\cdot 11_{(x)}=321_{(x)} \Rightarrow \overset{1}{1}\overset{0}{2}_{(x)}\cdot \overset{1}{1}\overset{0}{3}_{(x)}+\overset{1}{1}\overset{0}{4}_{(x)}\cdot \overset{1}{1}\overset{0}{1}_{(x)}=\overset{2}{3}\overset{1}{2}\overset{0}{1}_{(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1\cdot x^1+2\cdot x^0\right)\cdot\left(1\cdot x^1+3\cdot x^0\right)+\left(1\cdot x^1+4\cdot x^0\right)\cdot\left(1\cdot x^1+1\cdot x^0\right)=3\cdot x^2+2\cdot x^1+1\cdot x^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1\cdot x+2\cdot 1\right)\cdot\left(1\cdot x+3\cdot 1\right)+\left(1\cdot x+4\cdot 1\right)\cdot\left(1\cdot x+1\cdot 1\right)=3\cdot x^2+2\cdot x+1\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+2\right)\cdot\left(x+3\right)+\left(x+4\right)\cdot\left(x+1\right)=3\cdot x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+3\cdot x+2\cdot x+6+x^2+x+4\cdot x+4=3\cdot x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow 2\cdot x^2+10\cdot x+10=3\cdot x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2+10\cdot x+10-3\cdot x^2-2\cdot x-1=0 \Rightarrow -x^2+8\cdot x+9=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2-8\cdot x-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-8\cdot x-9=0 \\ a=1 \;,\; b=-8 \;,\; c=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-8 \;,\; c=-9 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+10}{2} \\ x_2=\dfrac{8-10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{18}{2} \\ x_2=\dfrac{-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=9 \text{ rješenje} \\ x_2=-1 \text{ nije rješenje} \end{array}\right\}.$$

Budući da baza brojevnog sustava može biti svaki prirodni broj veći od 1, množenje je izvršeno u brojevnom sustavu s bazom 9.

Vježba 131

U kojem je brojevnom sustavu izvršeno množenje 11 · 15 + 12 · 14 = 355?

Rezultat: 8.

Zadatak 132 (4A, TUPŠ)

Koji realni broj ima za binarni zapis broj $1100.011_{(2)}$?

Rješenje 132

Ponovimo!

$$a^0=1 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}.
Zadani broj napisat ćemo pomoću potencija broja 2 pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$1100.011_{(2)}=\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{0}.\overset{-1}{0}\ \overset{-2}{1}\ \overset{-3}{1}{}_{(2)}=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}=$$

$$=1\cdot 8+1\cdot 4+0\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}=8+4+0+0+0+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{8}=$$

$$=8+4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=8+4+0.25+0.125=12.375.$$

Vježba 132

Koji realni broj ima za binarni zapis broj $11.01_{(2)}$?

Rezultat: 3.25.

Zadatak 133 (Goga, srednja škola)

Izračunaj $11_{(2)}+11_{(3)}+11_{(4)}+11_{(5)}+\ldots+11_{(2002)}$.

Rješenje 133

Ponovimo!

$$a^0=1 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad 1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}.
Zadane brojeve u ovom zbroju napisat ćemo pomoću potencija broja 2 pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$11_{(2)}+11_{(3)}+11_{(4)}+11_{(5)}+\ldots+11_{(2002)}=\left[\begin{array}{l}\text{uoči da zbroj ima 2001 član}\\ \text{jer brojimo od 2 do 2002}\end{array}\right]=$$

$$=\overset{10}{11}(2)+\overset{10}{11}(3)+\overset{10}{11}(4)+\overset{10}{11}(5)+\ldots+\overset{10}{11}(2002)=$$

$$=1\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 3^1+1\cdot 3^0+1\cdot 4^1+1\cdot 4^0+1\cdot 5^1+1\cdot 5^0+\ldots+1\cdot 2002^1+1\cdot 2002^0=$$

$$=1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 1+1\cdot 5+1\cdot 1+\ldots+1\cdot 2002+1\cdot 1=2+1+3+1+4+1+5+1+\ldots+2002+1=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{jedinica}\\ \text{ima 2001}\end{array}\right]=(1+2+3+4+5+\ldots+2002)+\underbrace{(1+1+1+1+1+\ldots+1)}_{\text{ukupno 2000 jedinica}}=$$

$$=\frac{2002\cdot(2002+1)}{2}+2000\cdot 1=\frac{2002\cdot 2003}{2}+2000=101\cdot 2003+2000=2\,007\,003.$$

Vježba 133

Izračunaj $11_{(2)}+11_{(3)}+11_{(4)}+11_{(5)}+\ldots+11_{(2009)}$.

Rezultat: 2021052.

Zadatak 134 (Goga, srednja škola)

Ako znamenke a i b dvoznamenkastog broja u sustavu s bazom 9 zamijene mjesta dobije se broj iz sustava s bazom 7 koji ima istu dekadsku vrijednost. Odredi a i b.

Rješenje 134

Ponovimo!

$$x^0=1 \quad , \quad x^1=x.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}.
U zadatku se spominju dvoznamenkasti brojevi u brojevnim sustavima s bazom 9 i 7 pa znamenke a i b mogu biti

$$a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Budući da oba broja imaju istu dekadsku vrijednost, slijedi:

$$ab_{(9)} = ba_{(7)}.$$

Broj na lijevoj strani jednakosti napisat ćemo pomoću potencija broja 9, a broj na desnoj strani jednakosti pomoću potencija broja 7 pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$ab_{(9)} = ba_{(7)} \Rightarrow \overset{1}{a}\overset{0}{b}(9) = \overset{1}{b}\overset{0}{a}(7) \Rightarrow a \cdot 9^1 + b \cdot 9^0 = b \cdot 7^1 + a \cdot 7^0 \Rightarrow a \cdot 9 + b \cdot 1 = b \cdot 7 + a \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot a + b = 7 \cdot b + a \Rightarrow 9 \cdot a - a = 7 \cdot b - b \Rightarrow 8 \cdot a = 6 \cdot b \;/:8 \Rightarrow a = \frac{6}{8} \cdot b \Rightarrow a = \frac{3}{4} \cdot b \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = 4 \\ a = 3 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 134

Ako znamenke a i b dvoznamenkastog broja u sustavu s bazom 9 zamijene mjesta dobije se broj iz sustava s bazom 5 koji ima istu dekadsku vrijednost. Odredi a i b.

Rezultat: a = 1 i b = 2 , a = 2 i b = 4.

Zadatak 135 (1B, TUPŠ)

Izračunaj: $3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot (19 \cdot 21 - 36 \cdot 11) - 23]\}.$

Rješenje 135

Ponovimo!
Osnovne računske operacije su:
- prvog stupnja: zbrajanje, oduzimanje
- drugog stupnja: množenje, dijeljenje
- trećeg stupnja: potenciranje, korjenovanje, logaritmiranje.

U zadatku se najprije računaju operacije trećeg stupnja, zatim drugog, a tek na kraju operacije prvog stupnja.

$$\left.\begin{matrix} \text{prvo se računa} \\ \text{potenciranje} \\ \text{korjenovanje} \\ \text{logaritmiranje} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{drugo se računa} \\ \text{množenje} \\ \text{dijeljenje} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{zadnje se računa} \\ \text{zbrajanje} \\ \text{oduzimanje} \end{matrix}\right\}.$$

Vrste zagrada:
- okrugle (,) male
- uglate [,] srednje
- vitičaste { , } velike

U zadatku se najprije rješavaju okrugle zagrade, zatim uglate, a tek na kraju vitičaste zagrade.
Ako u zagradi ima više računskih operacija, rješavamo ih dogovorenim redoslijedom. Kada u zagradi ostane samo jedna računska operacija, izračunamo je, a zagrada nestaje.

$$3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot (19 \cdot 21 - 36 \cdot 11) - 23]\} = 3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot (19 \cdot 21 - 36 \cdot 11) - 23]\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{u okrugloj zagradi najprije računamo} \\ \text{operacije drugog stupnja, tj. množenja} \end{bmatrix} = 3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot (399 - 396) - 23]\} =$$

$$= 3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot (399 - 396) - 23]\} = \begin{bmatrix} \text{u okrugloj zagradi računamo} \\ \text{oduzimanje i zagrada nestaje} \end{bmatrix} = 3 + 2 \cdot \{3 \cdot [8 \cdot 3 - 23]\} =$$

$$=3+2\cdot\left\{3\cdot\left[8\cdot 3-23\right]\right\}=\left[\begin{array}{l}\text{u uglatoj zagradi najprije računamo}\\ \text{operaciju drugog stupnja, tj. množenje}\end{array}\right]=3+2\cdot\left\{3\cdot\left[24-23\right]\right\}=$$

$$=3+2\cdot\left\{3\cdot\left[24-23\right]\right\}=\left[\begin{array}{l}\text{u uglatoj zagradi računamo}\\ \text{oduzimanje i zagrada nestaje}\end{array}\right]=3+2\cdot\left\{3\cdot 1\right\}=$$

$$=3+2\cdot\left\{3\cdot 1\right\}=\left[\begin{array}{l}\text{u vitičastoj zagradi računamo}\\ \text{množenje i zagrada nestaje}\end{array}\right]=3+2\cdot 3=\left[\begin{array}{l}\text{prvo}\\ \text{množimo}\end{array}\right]=3+6=9.$$

Vježba 135

Izračunaj: $14+9\cdot\left\{23\cdot\left[15\cdot\left(14\cdot 19-16\cdot 13\right)+24\right]-129\cdot 118\right\}$.

Rezultat: 48 074.

Zadatak 136 (Ivan, gimnazija)

$$\text{Izračunaj:}\ \frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^{8}\cdot 49}.$$

Rješenje 136

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\quad,\quad\frac{n}{1}=n\quad,\quad\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad\left(a\cdot b\right)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}\quad,\quad a^{1}=a.$$

$$\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^{8}\cdot 49}=\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{9}{1}\right)^{2}}{\left(\frac{21}{1}\right)^{-8}\cdot 49}=\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot 9^{2}}{21^{-8}\cdot 49}=\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot\left(3^{2}\right)^{2}}{\left(3\cdot 7\right)^{-8}\cdot 7^{2}}=$$

$$=\frac{3^{-10}\cdot 7^{-5}\cdot 3^{4}}{3^{-8}\cdot 7^{-8}\cdot 7^{2}}=\frac{3^{-10+4}\cdot 7^{-5}}{3^{-8}\cdot 7^{-8+2}}=\frac{3^{-6}\cdot 7^{-5}}{3^{-8}\cdot 7^{-6}}=3^{-6}\cdot 7^{-5}\cdot 3^{8}\cdot 7^{6}=$$

$$=3^{-6+8}\cdot 7^{-5+6}=3^{2}\cdot 7^{1}=9\cdot 7=63.$$

Vježba 136

$$\text{Izračunaj:}\ \frac{3^{-10}\cdot 5^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{15}\right)^{8}\cdot 25}.$$

Rezultat: 45.

Zadatak 137 (Iva, gimnazija)

Dokaži da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Rješenje 137

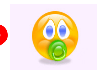
Ponovimo!

$$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad\left(a-b\right)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}.$$

Napišimo kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva:

$$\left(a^2+b^2\right)^2 \ , \ a, b \in Z.$$

Pomoću transformacija pokušajmo dobiti zbroj opet kvadrata dvaju cijelih brojeva:

?  ?

$$\left(a^2+b^2\right)^2 = \ldots = (\qquad)^2 + (\qquad)^2.$$

Računamo:

$$\left(a^2+b^2\right)^2 = \left(a^2\right)^2 + 2\cdot a^2\cdot b^2 + \left(b^2\right)^2 = a^4 + 2\cdot a^2\cdot b^2 + b^4 = a^4 + 2\cdot a^2\cdot b^2 + b^4 =$$

$$= a^4 - 2\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a^2\cdot b^2 + b^4 = a^4 - 2\cdot a^2\cdot b^2 + b^4 + 4\cdot a^2\cdot b^2 =$$

$$= \left(a^4 - 2\cdot a^2\cdot b^2 + b^4\right) + 4\cdot a^2\cdot b^2 = \left(a^2-b^2\right)^2 + (2\cdot a\cdot b)^2 = \underbrace{\left(a^2-b^2\right)^2}_{\text{kvadrat}} + \underbrace{(2\cdot a\cdot b)^2}_{\text{kvadrat}}.$$

Dokaz gotov.

Vježba 137

Dokaži da je za sve $n \in N \setminus \{1\}$, broj $n^4 + 4$ uvijek složen.

Rezultat: Naputak:

$$n^4+4 = n^4+4\cdot n^2+4-4\cdot n^2 = \left(n^2+2\right)^2 - (2\cdot n)^2 = \left(n^2+2-2\cdot n\right)\cdot\left(n^2+2+2\cdot n\right).$$

Zadatak 138 (Marko, gimnazija)

Dokaži da je zbroj dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva djeljiv sa 4.

Rješenje 138

Ponovimo!

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2\cdot k \ , \ k \in N.$$

Na primjer,

$$8 = 2\cdot 4 \quad , \quad 24 = 2\cdot 12 \quad , \quad 198 = 2\cdot 99 \quad , \quad 2570 = 2\cdot 1285.$$

Parni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2\cdot n,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Uoči da parni brojevi rastu za 2:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ \ldots$$

$$2\cdot n,\ 2\cdot n+2,\ 2\cdot n+4,\ 2\cdot n+6,\ 2\cdot n+8,\ 2\cdot n+10,\ 2\cdot n+12,\ 2\cdot n+14,\ 2\cdot n+16,\ 2\cdot n+18,\ 2\cdot n+20,\ \ldots$$

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) - 1 \quad , \quad m = 2\cdot k - 1 \ , \ k \in N.$$

Na primjer,

$$9 = 2\cdot 5 - 1 \quad , \quad 25 = 2\cdot 13 - 1 \quad , \quad 199 = 2\cdot 100 - 1 \quad , \quad 2573 = 2\cdot 1287 - 1.$$

Neparni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2\cdot n - 1,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Uoči da neparni brojevi rastu za 2:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ \ldots$$

$$2\cdot n-1,\ 2\cdot n+1,\ 2\cdot n+3,\ 2\cdot n+5,\ 2\cdot n+7,\ 2\cdot n+9,\ 2\cdot n+11,\ 2\cdot n+13,\ 2\cdot n+15,\ 2\cdot n+17,\ 2\cdot n+19,\ \ldots$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$a : b = k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = k.$$

1.inačica

Promatramo uzastopne prirodne brojeve $2 \cdot n - 1$ i $2 \cdot n + 1$. Tada je:

$$(2 \cdot n - 1) + (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 = 4 \cdot n = 4 \cdot n.$$

2.inačica

Promatramo uzastopne prirodne brojeve $2 \cdot n + 1$ i $2 \cdot n + 3$. Tada je:

$$(2 \cdot n + 1) + (2 \cdot n + 3) = 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 4 \cdot n + 4 = 4 \cdot (n + 1) = 4 \cdot (n + 1).$$

Dokaz gotov.

Vježba 138

Dokaži da je zbroj tri uzastopna neparna prirodna broja djeljiv sa 3.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 139 (Marko, gimnazija)

Dokaži da je poluzbroj kvadrata dvaju neparnih prirodnih brojeva opet neparan broj.

Rješenje 139

Ponovimo!

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \; , \; k \in N.$$

Na primjer,

$$8 = 2 \cdot 4 \quad , \quad 24 = 2 \cdot 12 \quad , \quad 198 = 2 \cdot 99 \quad , \quad 2570 = 2 \cdot 1285.$$

Parni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2 \cdot n,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Uoči da parni brojevi rastu za 2:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, \ldots$$

$$2 \cdot n, \; 2 \cdot n + 2, \; 2 \cdot n + 4, \; 2 \cdot n + 6, \; 2 \cdot n + 8, \; 2 \cdot n + 10, \; 2 \cdot n + 12, \; 2 \cdot n + 14, \; 2 \cdot n + 16, \; 2 \cdot n + 18, \; 2 \cdot n + 20, \ldots$$

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) - 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k - 1 \; , \; k \in N.$$

Na primjer,

$$9 = 2 \cdot 5 - 1 \quad , \quad 25 = 2 \cdot 13 - 1 \quad , \quad 199 = 2 \cdot 100 - 1 \quad , \quad 2573 = 2 \cdot 1287 - 1.$$

Neparni brojevi mogu se prikazati općom formulom

$$2 \cdot n - 1,$$

gdje n pripada skupu prirodnih brojeva.

Uoči da neparni brojevi rastu za 2:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, \ldots$$

$$2 \cdot n - 1, \; 2 \cdot n + 1, \; 2 \cdot n + 3, \; 2 \cdot n + 5, \; 2 \cdot n + 7, \; 2 \cdot n + 9, \; 2 \cdot n + 11, \; 2 \cdot n + 13, \; 2 \cdot n + 15, \; 2 \cdot n + 17, \; 2 \cdot n + 19, \ldots$$

Napišimo poluzbroj kvadrata dvaju neparnih prirodnih brojeva

$$\frac{1}{2} \cdot \left((2 \cdot m + 1)^2 + (2 \cdot n + 1)^2 \right) \; , \; m, n \in N$$

i pokažimo da se opet dobije neparan broj.

$$\frac{1}{2}\cdot\left((2\cdot m+1)^2+(2\cdot n+1)^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot m^2+4\cdot m+1+4\cdot n^2+4\cdot n+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot m^2+4\cdot n^2+4\cdot m+4\cdot n+2\right)=2\cdot m^2+2\cdot n^2+2\cdot m+2\cdot n+1=2\cdot\left(m^2+n^2+m+n\right)+1=$$

$$=2\cdot\underbrace{\left(m^2+n^2+m+n\right)}_{k\ -\ \text{prirodan broj}}+1=2\cdot k+1.$$

Dokaz gotov.

Vježba 139

Dokaži da je zbroj kvadrata dvaju neparnih prirodnih brojeva paran broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 140 (Petar, gimnazija)

Dokažite matematičkom indukcijom $6 \mid 7^n - 1$, za sve prirodne brojeve.

Rješenje 140

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika $n + 1$.

U zadatku treba dokazati da je broj 6 djelitelj zadanog izraza $7^n - 1$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) sa $f(n) = 7^n - 1$.

Zapamti!

Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi $a = c \cdot b$. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije

$n = 1$

$$f(1) = 7^1 - 1 = 7 - 1 = 6 = \mathbf{6} \cdot 1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 6. Tada pišemo:

$$f(n) = 7^n - 1 = \mathbf{6} \cdot N. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj N je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 6.

$n + 1$

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika $n + 1$:

$$f(n+1) = 7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = (1 + 6) \cdot 7^n - 1 = 1 \cdot 7^n + 6 \cdot 7^n - 1 =$$

$$= 7^n + 6 \cdot 7^n - 1 = 7^n - 1 + 6 \cdot 7^n = (7^n - 1) + 6 \cdot 7^n = (7^n - 1) + 6 \cdot 7^n =$$

$$= [\text{koristimo induktivnu pretpostavku}] = f(n) + 6 \cdot 7^n = 6 \cdot N + 6 \cdot 7^n = \mathbf{6} \cdot (N + 7^n).$$

Dobili smo na kraju faktor 6 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 140

Dokažite matematičkom indukcijom $2 \mid 4^n + 2$, za sve prirodne brojeve.

Rezultat: Tvrdnja je točna.