Zadatak 101 (4A, TUPŠ)

Zbroj tri uzastopna broja u sustavu s bazom 7 iznosi 132. Koja su to tri broja?

Rješenje 101

Ponovimo!

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od 1. U sustavu s bazom b prirodni broj N zapisujemo kao

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ \dots \ a_2 a_1 a_{0(b)}$$

pri čemu brojevi a_i, i = 0, 1, 2, 3, …, n mogu poprimati vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, ..., b-1\}$. Vrijednost prirodnog broja N zapisanog u sustavu s bazom b je

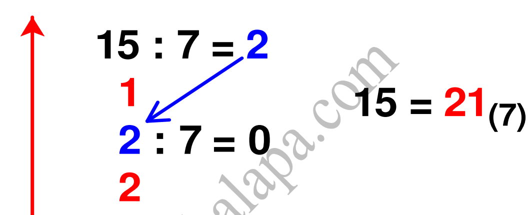
$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ \dots \ a_2 a_1 a_{0(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 =$$

$$= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0.$$

Uočimo da traženi brojevi moraju biti dvoznamenkasti jer najveći zbroj tri uzastopna jednoznamenkasta broja u sustavu s bazom 7 iznosi:

$$4_{(7)} + 5_{(7)} + 6_{(7)} = \underbrace{4+5+6=15}_{\text{dekadski sustav}} = 21_{(7)}.$$

Pretvaranje broja 15 iz dekadskog sustava u sustav s bazom 7 glasi:



1.inačica

$$ab_{(7)} + a(b+1)_{(7)} + a(b+2)_{(7)} = 132_{(7)} \Rightarrow \overset{1}{a}\overset{0}{b}(7) + \overset{1}{a}\overset{0}{(b+1)}_{(7)} + \overset{1}{a}\overset{0}{(b+2)}_{(7)} = \overset{2}{1}\overset{1}{3}\overset{0}{2}(7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 + a \cdot 7^1 + (b+1) \cdot 7^0 + a \cdot 7^1 + (b+2) \cdot 7^0 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot a + b \cdot 1 + 7 \cdot a + (b+1) \cdot 1 + 7 \cdot a + (b+2) \cdot 1 = 1 \cdot 49 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot a + b + 7 \cdot a + b + 1 + 7 \cdot a + b + 2 = 49 + 21 + 2 \Rightarrow 21 \cdot a + 3 \cdot b + 3 = 72 \Rightarrow 21 \cdot a + 3 \cdot b = 72 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 \cdot a + 3 \cdot b = 69 \ /: 3 \Rightarrow 7 \cdot a + b = 23 \Rightarrow b = 23 - 7 \cdot a.$$

Budući da je baza sustava broj 7, znamenke a i b mogu biti samo brojevi od 0 do 6.

$$\left.\begin{array}{l} b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 0 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 1 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 2 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 3 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 4 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 5 \\ b = 23 - 7 \cdot a \ , \ a = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 23 - 7 \cdot 0 \\ b = 23 - 7 \cdot 1 \\ b = 23 - 7 \cdot 2 \\ b = 23 - 7 \cdot 3 \\ b = 23 - 7 \cdot 4 \\ b = 23 - 7 \cdot 5 \\ b = 23 - 7 \cdot 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 23 - 0 \\ b = 23 - 7 \\ b = 23 - 14 \\ b = 23 - 21 \\ b = 23 - 28 \\ b = 23 - 35 \\ b = 23 - 42 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 23 \text{ nema smisla} \\ b = 16 \text{ nema smisla} \\ b = 9 \text{ nema smisla} \\ b = 2 \text{ rješenje} \\ b = -5 \text{ nema smisla} \\ b = -12 \text{ nema smisla} \\ b = -19 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array}\right\}$$

Rješenje je: a = 3, b = 2. Brojevi su: $32_{(7)}$, $33_{(7)}$, $34_{(7)}$.

2.inačica

$$ab_{(7)} + ab_{(7)} + 1_{(7)} + ab_{(7)} + 2_{(7)} = 132_{(7)} \Rightarrow ab_{(7)} + ab_{(7)} + ab_{(7)} + 3_{(7)} = 132_{(7)} \Rightarrow 3_{(7)} \cdot ab_{(7)} + 3_{(7)} = 132_{(7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3_{(7)}\cdot \overset{10}{ab}(7)+3_{(7)}=\overset{210}{132}(7) \Rightarrow 3\cdot\left(a\cdot 7^{1}+b\cdot 7^{0}\right)+3=1\cdot 7^{2}+3\cdot 7^{1}+2\cdot 7^{0} \Rightarrow 3\cdot(7\cdot a+b\cdot 1)+3=1\cdot 49+3\cdot 7+2\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(7\cdot a+b)+3=49+21+2 \Rightarrow 21\cdot a+3\cdot b+3=72 \Rightarrow 21\cdot a+3\cdot b=72-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21\cdot a+3\cdot b=69 \;/:3 \Rightarrow 7\cdot a+b=23 \Rightarrow b=23-7\cdot a.$$

Budući da je baza sustava broj 7, znamenke a i b mogu biti samo brojevi od 0 do 6.

$$\left.\begin{array}{l} b=23-7\cdot a\ ,\ a=0 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=1 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=2 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=3 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=4 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=5 \\ b=23-7\cdot a\ ,\ a=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=23-7\cdot 0 \\ b=23-7\cdot 1 \\ b=23-7\cdot 2 \\ b=23-7\cdot 3 \\ b=23-7\cdot 4 \\ b=23-7\cdot 5 \\ b=23-7\cdot 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=23-0 \\ b=23-7 \\ b=23-14 \\ b=23-21 \\ b=23-28 \\ b=23-35 \\ b=23-42 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=23 \text{ nema smisla} \\ b=16 \text{ nema smisla} \\ b=9 \text{ nema smisla} \\ b=2 \text{ rješenje} \\ b=-5 \text{ nema smisla} \\ b=-12 \text{ nema smisla} \\ b=-19 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \end{array}\right\}$$

Rješenje je: a = 3, b = 2. Brojevi su: $32_{(7)}$, $33_{(7)}$, $34_{(7)}$.

Vježba 101

Zbroj tri uzastopna broja u sustavu s bazom 7 iznosi 264. Koja su to tri broja?

Rezultat: $65_{(7)}$, $66_{(7)}$, $100_{(7)}$.

Zadatak 102 (Željko, srednja škola)

Izračunajte bez uporabe kalkulatora: $\sqrt{333^{2}+444^{2}}$.

Rješenje 102

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^{2}}=a\ ,\ a\geq 0.$$

$$\sqrt{333^{2}+444^{2}}=\sqrt{(111\cdot 3)^{2}+(111\cdot 4)^{2}}=\sqrt{111^{2}\cdot 3^{2}+111^{2}\cdot 4^{2}}=\sqrt{111^{2}\cdot\left(3^{2}+4^{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{111^{2}}\cdot\sqrt{3^{2}+4^{2}}=111\cdot\sqrt{9+16}=111\cdot\sqrt{25}=111\cdot 5=555.$$

Vježba 102

Izračunajte bez uporabe kalkulatora: $\sqrt{33^{2}+44^{2}}$.

Rezultat: 55.

Zadatak 103 (Ana, gimnazija)

Ako je 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … + n = 1012036, nađite n.

Rješenje 103

Ponovimo!

Zbroj prvih k neparnih prirodnih brojeva računa se po formuli

$$1+3+5+7+9+\ldots+(2\cdot k-1)=k^{2}.$$

Uočimo da je u zadatku broj na desnoj strani jednakosti potpuni kvadrat:

$$1+3+5+7+9+\ldots+n=1012036 \Rightarrow 1+3+5+7+9+\ldots+n=1006^{2}.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} 1+3+5+7+9+\ldots+(2\cdot k-1)=k^{2} \\ 1+3+5+7+9+\ldots+(2\cdot k-1)=1006^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow k=1006.$$

Broj n iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} 1+3+5+7+9+...+n=1006^2 \\ 1+3+5+7+9+...+(2\cdot k-1)=1006^2 \end{array}\right\} \Rightarrow n=2\cdot k-1 \Rightarrow n=2\cdot 1006-1 \Rightarrow n=2012-1 \Rightarrow n=2011.$$

Vježba 103

Ako je 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … + n = 400, nađite n.

Rezultat: 39.

Zadatak 104 (Josipa, maturantica)

S koliko znamenki nula završava zapis broja 140! u dekadskom sustavu?

Rješenje 104

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ ...\ \cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi:

$$140!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ ...\ \cdot 139\cdot 140.$$

Za svako $x\in R$ postoji jedinstven cijeli broj $n\in Z$, takav da je

$$n\le x<n+1.$$

Broj n označava se s $\lfloor x\rfloor$ i zove najveće cijelo od x ("pod" od x).

Primjeri

$$\lfloor 3.2\rfloor=3\quad,\quad\lfloor 3.9\rfloor=3\quad,\quad\lfloor 5.61\rfloor=5\quad,\quad\lfloor -3.2\rfloor=-4\quad,\quad\lfloor -1.8\rfloor=-2\quad,\quad\lfloor -5.1\rfloor=-6.$$

Broj n! ima onoliko nula koliko se puta broj 5 pojavljuje kao faktor. Svaka petica pomnožena sa 2 daje faktor 10, tj. u n!, en faktorijela, pojavit će se znamenka 0.

$$\left\lfloor\frac{140}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{5^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{5^4}\right\rfloor+\ ....=\left\lfloor\frac{140}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{25}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{125}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{140}{625}\right\rfloor+\ ....=$$

$$=\lfloor 28\rfloor+\lfloor 5.6\rfloor+\lfloor 1.12\rfloor+\lfloor 0.224\rfloor+\ ....=28+5+1+0=34.$$

Zapis broja 140! u dekadskom sustavu završava sa 34 nule.

Vježba 104

S koliko znamenki nula završava zapis broja 60! u dekadskom sustavu?

Rezultat: 14 nula.

Zadatak 105 (Iva, gimnazija)

Izračunajte: 1 · 3 · 5 · 7 · … · 93 · 95 · 97 · 99.

Rješenje 105

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ ...\ \cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Kažemo da je "en faktorijela" umnožak prvih n prirodnih brojeva. Tako na primjer, vrijedi:

$$\begin{aligned} &1!=1\\ &2!=1\cdot 2=2\\ &3!=1\cdot 2\cdot 3=6\\ &4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24\\ &5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120\\ &6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720. \end{aligned}$$

Sada računamo:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ ...\ \cdot 93\cdot 95\cdot 97\cdot 99=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ ...\ \cdot 93\cdot 95\cdot 97\cdot 99}{1}=\left[\begin{array}{l}\text{razlomak proširimo sa prvih}\\ \text{50 parnih prirodnih brojeva}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot\ \dots\ \cdot 93\cdot 94\cdot 95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ \dots\ \cdot 94\cdot 96\cdot 98\cdot 100}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot\ \dots\ \cdot 93\cdot 94\cdot 95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ \dots\ \cdot 94\cdot 96\cdot 98\cdot 100}=$$

$$=\frac{100\,!}{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot\ \dots\ \cdot(2\cdot 47)\cdot(2\cdot 48)\cdot(2\cdot 49)\cdot(2\cdot 50)}=\frac{100\,!}{2^{50}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \dots\ \cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50)}=$$

$$=\frac{100\,!}{2^{50}\cdot 50\,!}.$$

Funkcija faktorijela raste jako brzo. Njezine vrijednosti možemo očitati na svakom boljem džepnom računalu, ali samo za umjerene vrijednosti broja n, obično za $n \le 69$. Tako je

$$69! \approx 1.711224524 \cdot 10^{98}.$$

Vježba 105

Izračunajte: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 993 \cdot 995 \cdot 997 \cdot 999$.

Rezultat: $\frac{1000\,!}{2^{500}\cdot 500\,!}$.

Zadatak 106 (Deny, gimnazija)

Umnožak četiri uzastopna prirodna broja uvećan za 1 kvadrat je nekog prirodnog broja. Dokaži.

Rješenje 106

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Neka je n prirodan broj. Tada se dobije sljedeći niz jednakosti:

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=n\cdot(n+3)\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1=\left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(n^2+2\cdot n+n+2\right)+1=$$

$$=\left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(n^2+3\cdot n+2\right)+1=\left(n^2+3\cdot n\right)\cdot\left(\left(n^2+3\cdot n\right)+2\right)+1=$$

$$\left(n^2+3\cdot n\right)^2+2\cdot\left(n^2+3\cdot n\right)+1=\left(n^2+3\cdot n+1\right)^2.$$

Vježba 106

Zbroj tri uzastopna cijela broja djeljiv je sa 3. Dokaži.

Rezultat: $n + (n + 1) + (n + 2) = \ldots = 3 \cdot (n+1)$.

Zadatak 107 (Deny, gimnazija)

Ako je svaki od dva broja zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva, onda je i njihov umnožak zbroj dvaju kvadrata. Dokaži.

Rješenje 107

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Neka su x i y zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva:

$$x=a^2+b^2 \quad , \quad y=c^2+d^2.$$

Pokažimo da je i njihov umnožak zbroj dvaju kvadrata:

$$x\cdot y=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=a^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2=a^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{u jednakost dodamo}\\ +2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d-2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d\end{array}\right]=a^2\cdot c^2+2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d+b^2\cdot d^2+a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d+b^2\cdot c^2=$$

$$=\left(a^2\cdot c^2+2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d+b^2\cdot d^2\right)+\left(a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot c\cdot b\cdot d+b^2\cdot c^2\right)=(a\cdot c+b\cdot d)^2+(a\cdot d-b\cdot c)^2.$$

Vježba 107

Zbroj kvadrata dva uzastopna cijela broja umanjen za 1 djeljiv je s 4. Dokaži.

Rezultat: $n^2+(n+1)^2-1= \ldots =2\cdot n\cdot(n+1)$. Umnožak $n\cdot(n+1)$ uvijek je paran broj.

Zadatak 108 (Domi_99, gimnazija)

Ispiši sve troznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenaka 6.

Rješenje 108

Ponovimo!

Troznamenkasti broj ima oblik

$$\overline{abc},$$

gdje je $a\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, i $b, c\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Budući da umnožak znamenaka mora biti 6, slijedi (brojeve pišemo u leksikografskom ili abecednom poretku):

$$116 \quad (1\cdot1\cdot6=6)$$
$$161 \quad (1\cdot6\cdot1=6)$$
$$611 \quad (6\cdot1\cdot1=6)$$

$$123 \quad (1\cdot2\cdot3=6)$$
$$132 \quad (1\cdot3\cdot2=6)$$
$$213 \quad (2\cdot1\cdot3=6)$$
$$231 \quad (2\cdot3\cdot1=6)$$
$$312 \quad (3\cdot1\cdot2=6)$$
$$321 \quad (3\cdot2\cdot1=6)$$

Vježba 108

Ispiši sve troznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenaka 4.

Rezultat: 114, 141, 411, 122, 212, 221.

Zadatak 109 (Tena, gimnazija)

Izračunaj na najbrži mogući način (bez računala): $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Rješenje 109

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Uočimo da je u svakoj zagradi razlika kvadrata:

$$1-\frac{1}{4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$
$$1-\frac{1}{9}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3},$$
$$1-\frac{1}{16}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4},$$
$$1-\frac{1}{25}=\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1-\frac{1}{81}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9},$$
$$1-\frac{1}{100}=\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}.$$

Sada je:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10}=\frac{11}{20}.$$

Vježba 109

Izračunaj na najbrži mogući način (bez računala): $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{81}\right).$

Rezultat: $\frac{5}{9}.$

Zadatak 110 (Gimnazijalka, gimnazija)

Dokaži da je zbroj svakih pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 5.

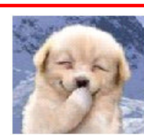
Rješenje 110

Ponovimo!

Prethodnik prirodnog broja n (n ≠ 1) je prirodni broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.

Vježba! Popunite prazna mjesta u tablici:

Prethodnik	Broj	Sljedbenik
	3	
x – 1		
		α + 3
a		
		a – 1
	b + 4	
a – 6		
		10
	n – 1	



Prethodnik	Broj	Sljedbenik
2	3	4
x – 1	x	x + 1
α +1	α + 2	α + 3
a	a + 1	a + 2
a – 3	a – 2	a – 1
b + 3	b + 4	b + 5
a – 6	a – 5	a – 4
8	9	10
n – 2	n – 1	n

Pet uzastopnih cijelih brojeva možemo napisati na razne načine:

- n – 4, n – 3, n – 2, n – 1, n
- n – 3, n – 2, n – 1, n, n + 1
- n – 2, n – 1, n, n + 1, n + 2
- n – 1, n, n + 1, n + 2, n + 3
- n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4
- n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5 itd.

Najpogodniji način zapisivanja je: n – 2, n – 1, n, n + 1, n + 2 jer će se pri zbrajanju suprotni brojevi poništiti. Zbrajamo, dakle, pet uzastopnih prirodnih brojeva:

$$n-2+n-1+n+n+1+n+2=n-2+n-1+n+n+1+n+2=5\cdot n.$$

Očito je taj broj djeljiv s 5.

Vježba 110

Dokaži da je zbroj svaka tri uzastopna cijela broja djeljiv sa 3.

Rezultat: 3 · n. Zbroj je djeljiv sa 3.

Zadatak 111 (Gimnazijalka, gimnazija)

Svaki broj iz skupa { 10, 11, 12, 13, 14 } pomnožen je sa svakim brojem iz skupa { 20, 21, 22 }. Koliki je zbroj svih tih umnožaka?

Rješenje 111

Ponovimo!

Aritmetička sredina

Neka je zadano n brojeva: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Broj

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n}$$

je njihova aritmetička sredina.

Aritmetička sredina brojeva prvog skupa { 10, 11, 12, 13, 14 } je:

$$A_1 = \frac{10+11+12+13+14}{5} \Rightarrow A_1 = \frac{60}{5} \Rightarrow A_1 = 12.$$

Aritmetička sredina brojeva drugog skupa { 20, 21, 22 } je:

$$A_2 = \frac{20+21+22}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{63}{3} \Rightarrow A_2 = 21.$$

Traženi je zbroj zato jednak:

$$5 \cdot A_1 \cdot 3 \cdot A_2 = 5 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 21 = 3780.$$

Vježba 111

Svaki broj iz skupa { 10, 11, 12, 13, …, 20 } pomnožen je sa svakim brojem iz skupa { 21, 22, 23, …, 30 }. Koliki je zbroj svih tih umnožaka?

Rezultat: 42075.

Zadatak 112 (Željko, gimnazija)

Koji broj je veći: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ili $\sqrt{11}$?

Rješenje 112

Ponovimo!

$$a>0\ ,\ b>0\ ,\ a>b \Rightarrow a^2>b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a\ ,\ a \ge 0 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}.$$

Za svaku tvrdnju postoji njoj suprotna. Ono što jedna tvrdi, druga poriče. Razumije se, istinita je jedna i samo jedna od te dvije tvrdnje jer prihvaćamo "načelo o isključenju trećeg" koje glasi:
Od dvije suprotne tvrdnje uvijek je jedna i samo jedna istinita.
Kao primjer dviju suprotnih tvrdnji je:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \ge \sqrt{11} \quad \text{i} \quad \sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11}.$$

1.inačica

Pretpostavimo da je

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \ge \sqrt{11}.$$

Kvadriranjem nejednakosti dobije se:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \ge \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} \ge \sqrt{11}\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 \ge \left(\sqrt{11}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2\cdot\sqrt{6}+3 \ge 11 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{6} \ge 11-2-3 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{6} \ge 6\ /:2 \Rightarrow \sqrt{6} \ge 3\ /^2 \Rightarrow 6 \ge 9,$$

a to nije moguće. Pretpostavka je bila kriva pa je, dakle,

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11}.$$

Dokaz smo proveli na indirektan način.

2.inačica

Pretpostavimo da je

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11}.$$

Kvadriranjem nejednakosti dobije se:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{11}\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 < \left(\sqrt{11}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2\cdot\sqrt{6}+3 < 11 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{6} < 11-2-3 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{6} < 6\ /:2 \Rightarrow \sqrt{6} < 3\ /^2 \Rightarrow 6 < 9,$$

a to je istinito. Pretpostavka je bila točna pa je, dakle,

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{11}.$$

Dokaz smo proveli na direktan način.

Vježba 112

Koji broj je manji: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ili $\sqrt{10}$?

Rezultat: $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}.$

Zadatak 113 (Ines, srednja škola)

Koliko je: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$?

Rješenje 113

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Uočimo da je svaki faktor razlika kvadrata:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}\cdot\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}\cdot\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\left[\begin{array}{c}\text{kratimo}\\ \text{razlomke}\end{array}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2\cdot n}.$$

Vježba 113

Koliko je: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$?

Rezultat: $\frac{11}{20}.$

Zadatak 114 (Marija, trgovačka škola)

Izračunaj na najracionalniji način: $382^2 - 615^2 + 233 \cdot 797$.

Rješenje 114

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Uočimo da su prva dva člana razlika kvadrata:

$$382^2-615^2+233\cdot797=(382-615)\cdot(382+615)+233\cdot797=-233\cdot997+233\cdot797=$$

$$=233\cdot797-233\cdot997=233\cdot(797-997)=233\cdot(-200)=-46\,600.$$

Vježba 114

Izračunaj na najracionalniji način: $45^2 - 25^2 + 220 \cdot 30$.

Rezultat: 2000.

Zadatak 115 (Robert, gimnazija)

Ako su $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi i ako je $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = 1$, dokaži da je $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot(1+a_3)\cdot ... \cdot(1+a_n) \geq 2^n$.

Rješenje 115

Ponovimo!

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A=\frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G=\sqrt{a\cdot b}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A \geq G \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\cdot b}.$$

Budući da je aritmetička sredina brojeva veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1\cdot a_1} \\ \frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1\cdot a_2} \\ \ldots \\ \frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{1\cdot a_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{a_1} \\ \frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_2} \\ \ldots \\ \frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{pomnožimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+a_1}{2}\cdot\frac{1+a_2}{2}\cdot ... \cdot\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot ... \cdot\sqrt{a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{a_1\cdot a_2\cdot ... \cdot a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ... \cdot a_n = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n)}{2^n} \geq 1 \; / \cdot 2^n \Rightarrow (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n) \geq 2^n.$$

Vježba 115

Ako su $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi i ako je $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = 4$, dokaži da je $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot(1+a_3)\cdot ... \cdot(1+a_n) \geq 2^{n+1}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 116 (Martina, trgovačka škola)

Izračunaj na najjednostavniji način umnožak: $4^2 \cdot 5^3$.

Rješenje 116

Ponovimo!

Potencija a^n jednaka je umnošku n jednakih faktora

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{\text{n puta}}.$$

Realni je broj a baza (ili osnovica) potencije, a prirodni broj n njezin je eksponent.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^1 = a.$$

$$4^2 \cdot 5^3 = \left(2^2\right)^2 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3 = 2^1 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot 1000 = 2000.$$

Vježba 116

Izračunaj na najjednostavniji način umnožak: $8 \cdot 5^3$.

Rezultat: 1000.

Zadatak 117 (Nikolina, gimnazija)

Kolika je vrijednost zbroja $\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} + \ \dots \ + \frac{1}{2002 \cdot 2006}$?

Rješenje 117

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Parnost brojeva

Broj je paran ako je djeljiv s 2. Opća formula za parne brojeve glasi:

$$2 \cdot n.$$

Broj je neparan ako nije djeljiv s 2. Opća formula za neparne brojeve glasi:

$$2 \cdot n - 1.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} + \ \dots \ + \frac{1}{2002 \cdot 2006} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7} + \ \dots \ + \frac{1}{2 \cdot 1001 \cdot 2 \cdot 1003} =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 7} + \ \dots \ + \frac{1}{4 \cdot 1001 \cdot 1003} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ \dots \ + \frac{1}{1001 \cdot 1003} \right).$$

Uočimo da se u nazivnicima razlomaka nalaze produkti dva uzastopna neparna broja (brojevi se razlikuju za 2):

$$(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1).$$

Pokažimo u općem slučaju kako svaki takav razlomak možemo rastaviti na zbroj dva razlomka kojima su nazivnici ti neparni brojevi. Prema toj metodi treba odrediti realne brojeve A i B takve da vrijedi:

$$\frac{1}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{A}{2 \cdot n - 1} + \frac{B}{2 \cdot n + 1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)$, dobit ćemo:

$$\frac{1}{(2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{A}{2 \cdot n - 1} + \frac{B}{2 \cdot n + 1} \ / \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1) \Rightarrow 1 = A \cdot (2 \cdot n + 1) + B \cdot (2 \cdot n - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \cdot A \cdot n + A + 2 \cdot B \cdot n - B \Rightarrow 1 = (2 \cdot A + 2 \cdot B) \cdot n + (A - B).$$

Prema poučku o jednakosti polinoma mora vrijediti:

$$1 = (2 \cdot A + 2 \cdot B) \cdot n + (A - B) \Rightarrow 0 \cdot n + 1 = (2 \cdot A + 2 \cdot B) \cdot n + (A - B) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot A + 2 \cdot B = 0 \\ A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot A + 2 \cdot B = 0 \ /:2 \\ A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot A = 1 \ /:2 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}+B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}.$$

Traženi rastav glasi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{A}{2\cdot n-1}+\frac{B}{2\cdot n+1} \\ A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot n-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2\cdot n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n+1}\right).$$

Metoda koju smo ovdje uporabili zove se metoda neodređenih koeficijenata.
Sada računamo vrijednost zbroja:

$$\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ \dots\ +\frac{1}{2002\cdot 2006}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{1001\cdot 1003}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ \dots\ +\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \dots\ +\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \dots\ +\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{1003}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1003-1}{1003}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1002}{1003}=\frac{1}{4}\cdot\frac{501}{1003}=\frac{501}{4012}.$$

Vježba 117

Kolika je vrijednost zbroja $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{9\cdot 10}$?

Rezultat: $\frac{9}{10}.$

Zadatak 118 (Petra, gimnazija)

Odredi zbroj: $1\cdot 1\,!+2\cdot 2\,!+3\cdot 3\,!+4\cdot 4\,!+5\cdot 5\,!+\ \dots\ +n\cdot n\,!.$

Rješenje 118

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n\,!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \dots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n ! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1 ! = 1,
2 ! = 1 · 2,
3 ! = 1 · 2 · 3,
4 ! = 1 · 2 · 3 · 4,
5 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Zapamti!

$$0\,!=1.$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n\,!=(n-1)\,!\cdot n.$$

Uočimo da vrijedi

$$n\cdot n\,!=(n+1)\,!-n\,!.$$

Dokaz

Zbog jednostavnosti dokaz provodimo zdesna na lijevu stranu jednakosti.

$$(n+1)!-n!=n!\cdot(n+1)-n!=n!\cdot\left[(n+1)-1\right]=n!\cdot\left[n+1-1\right]=n!\cdot\left[n+1-1\right]=n!\cdot n=n\cdot n!.$$

Dokaz gotov.

Zadani zbroj iznosi:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+5\cdot 5!+\ ...\ +(n-1)\cdot(n-1)!+n\cdot n!=$$
$$=2!-1!+3!-2!+4!-3!+5!-4!+6!-5!+\ ...\ +n!-(n-1)!+(n+1)!-n!=$$
$$=2!-1!+3!-2!+4!-3!+5!-4!+6!-5!+\ ...\ +n!-(n-1)!+(n+1)!-n!=$$
$$=-1+(n+1)!=(n+1)!-1.$$

Vježba 118

Odredi zbroj: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+5\cdot 5!+\ ...\ +555\cdot 555!.$

Rezultat: $556!-1.$

Zadatak 119 (Kristina, gimnazija)

Zbroj tri uzastopna cijela broja uvijek je djeljiv sa tri. Dokaži.

Rješenje 119

Ponovimo!

Svaki prirodni broj ima slijednika (sljedbenika). Slijednik broja $n\in N$ je prirodan broj n + 1.

Broj i njegov slijednik mogu se zapisati na razne načine:

$$n-2,\ n-1\quad,\quad n-1,\ n\quad n,\ n+1\quad,\quad n+1,\ n+2\quad,\quad n+2,\ n+3\quad,\quad n-m-1,\ n-m$$
$$n-m,\ n-m+1\quad n+m-2,\ n+m-1\quad,\quad n+m-1,\ n+m\quad,\quad n+m,\ n+m+1\ \text{itd.}$$

Prirodni broj m ≠ 1 višekratnik je prirodnog broja n ako postoji prirodni broj k ≠ 1 takav da vrijedi

m = k · n.

Prirodni broj m djeljiv je prirodnim brojem n ako je m višekratnik broja n.

1.inačica

Neka su brojevi

n, n + 1, n + 2

tri uzastopna cijela broja. Tada je njihov zbroj:

$$n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3\cdot n+3=3\cdot(n+1)=3\cdot(n+1).$$

Zbroj je djeljiv sa tri.

2.inačica

Neka su brojevi

n – 1, n, n + 1

tri uzastopna cijela broja. Tada je njihov zbroj:

$$(n-1)+n+(n+1)=n-1+n+n+1=n-1+n+n+1=3\cdot n=3\cdot n.$$

Zbroj je djeljiv sa tri.

Vježba 119

Zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva uvijek je djeljiv s pet. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 120 (Kristina, gimnazija)

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja uvijek je djeljiva s 8. Dokaži.

Rješenje 120

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Ako je n prirodan broj, onda je

$$2\cdot n$$

paran broj.

Ako je n prirodan broj, onda je

$$2 \cdot n - 1$$

neparan broj.
Prirodni broj m ≠ 1 višekratnik je prirodnog broja n ako postoji prirodni broj k ≠ 1 takav da vrijedi

$$m = k \cdot n.$$

Prirodni broj m djeljiv je prirodnim brojem n ako je m višekratnik broja n.

Dva uzastopna neparna broja mogu se zapisati na razne načine:

$$2 \cdot n - 7,\ 2 \cdot n - 5 \quad , \quad 2 \cdot n - 5,\ 2 \cdot n - 3 \quad 2 \cdot n - 3,\ 2 \cdot n - 1$$
$$2 \cdot n - 1,\ 2 \cdot n + 1 \quad , \quad 2 \cdot n + 1,\ 2 \cdot n + 3 \quad , \quad 2 \cdot n + 3,\ 2 \cdot n + 5 \ \text{itd.}$$

1.inačica

Neka su brojevi

$$2 \cdot n - 1, 2 \cdot n + 1$$

dva uzastopna neparna broja.
Tada je razlika njihovih kvadrata:

$$(2 \cdot n + 1)^2 - (2 \cdot n - 1)^2 = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 - \left(4 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 1\right) = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 - 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1 =$$
$$= 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 - 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1 = 8 \cdot n = 8 \cdot n.$$

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja uvijek je djeljiva s 8.

2.inačica

Neka su brojevi

$$2 \cdot n - 1, 2 \cdot n + 1$$

dva uzastopna neparna broja.
Tada je razlika njihovih kvadrata:

$$(2 \cdot n + 1)^2 - (2 \cdot n - 1)^2 = \left((2 \cdot n + 1) - (2 \cdot n - 1)\right) \cdot \left((2 \cdot n + 1) + (2 \cdot n - 1)\right) =$$
$$= (2 \cdot n + 1 - 2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n - 1) = (2 \cdot n + 1 - 2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n - 1) = 2 \cdot 4 \cdot n = 8 \cdot n = 8 \cdot n.$$

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja uvijek je djeljiva s 8.

3.inačica

Neka su brojevi

$$2 \cdot n + 1, 2 \cdot n + 3$$

dva uzastopna neparna broja.
Tada je razlika njihovih kvadrata:

$$(2 \cdot n + 3)^2 - (2 \cdot n + 1)^2 = 4 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 9 - \left(4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1\right) = 4 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 9 - 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 1 =$$
$$= 4 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 9 - 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 1 = 8 \cdot n + 8 = 8 \cdot (n + 1).$$

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja uvijek je djeljiva s 8.

4.inačica

Neka su brojevi

$$2 \cdot n + 1, 2 \cdot n + 3$$

dva uzastopna neparna broja.
Tada je razlika njihovih kvadrata:

$$(2 \cdot n + 3)^2 - (2 \cdot n + 1)^2 = \left((2 \cdot n + 3) - (2 \cdot n + 1)\right) \cdot \left((2 \cdot n + 3) + (2 \cdot n + 1)\right) =$$
$$= (2 \cdot n + 3 - 2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 3 + 2 \cdot n + 1) = (2 \cdot n + 3 - 2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 3 + 2 \cdot n + 1) = 2 \cdot (4 \cdot n + 4) =$$
$$= 2 \cdot 4 \cdot (n + 1) = 8 \cdot (n + 1) = 8 \cdot (n + 1).$$

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja uvijek je djeljiva s 8.

Vježba 120

Razlika kvadrata dva uzastopna parna broja uvijek je djeljiva s 4. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.