Zadatak 081 (Vedrana, studentica)

Odredite x ako je treći član razvoja $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ jednak 240.

Rješenje 081

Ponovimo!

Binomni poučak

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ ...\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$$

ili kraće

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k\ ,\ n\in N.$$

Kako glasi k – ti član u razvoju binoma $(a + b)^n$? Budući da je prvi član $\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0$, k – ti član iznosi

$$\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-(k-1)}\cdot b^{k-1}.$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

Ako je treći član u razvoju $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ jednak 240, broj x iznosi:

$$\binom{6}{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^2=240\Rightarrow\left[\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15\right]\Rightarrow 15\cdot\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^2=240\ /:15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^2=16\Rightarrow\left(2\cdot2^{-\frac{1}{x}}\right)^4\cdot\left(4\cdot4^{-\frac{1}{4-x}}\right)^2=16\Rightarrow\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^4\cdot\left(4^{1-\frac{1}{4-x}}\right)^2=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^4\cdot\left(\left(2^2\right)^{1-\frac{1}{4-x}}\right)^2=16\Rightarrow\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^4\cdot\left(2^{2-\frac{2}{4-x}}\right)^2=16\Rightarrow 2^{4-\frac{4}{x}}\cdot2^{4-\frac{4}{4-x}}=2^4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{4-\frac{4}{x}+4-\frac{4}{4-x}}=2^4\Rightarrow 4-\frac{4}{x}+4-\frac{4}{4-x}=4\Rightarrow-\frac{4}{x}+4-\frac{4}{4-x}=0\Rightarrow-\frac{4}{x}+4-\frac{4}{4-x}=0\ /:(-4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}-1+\frac{1}{4-x}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{diskusija}\\ x\neq0\ ,\ x\neq4\end{array}\right]\Rightarrow\frac{1}{x}-1+\frac{1}{4-x}=0\ /\cdot x\cdot(4-x)\Rightarrow 4-x-x\cdot(4-x)+x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-x-4\cdot x+x^2+x=0\Rightarrow x^2-4\cdot x+4=0\Rightarrow(x-2)^2=0\ /\sqrt{\ }\Rightarrow x_1=x_2=2.$$

Vježba 081

Odredite x ako je treći član razvoja $(2\cdot x+1)^5$ jednak 640.

Rezultat: x = 2.

Zadatak 082 (Vedrana, studentica)

U prikazu binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ koeficijenti četvrtog i desetog člana se podudaraju. Odredite onaj član koji ne sadrži x.

Rješenje 082

Ponovimo!

Binomni poučak

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$$

ili kraće

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k \quad , \; n\in N.$$

Kako glasi k – ti član u razvoju binoma $(a + b)^n$? Budući da je prvi član $\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0$, k – ti član iznosi

$$\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-(k-1)}\cdot b^{k-1}.$$

Svojstvo simetrije

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \; k = 0, 1, 2, 3, \dots, n..$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^0 = 1.$$

Najprije odredimo eksponent n. Iz uvjeta slijedi da su četvrti i deseti član jednaki:

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{9} \;\Rightarrow\; \left[\begin{matrix}\text{svojstvo}\\ \text{simetrije}\end{matrix}\right] \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} k = 3 \\ n-k = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow\; n-3 = 9 \;\Rightarrow\; n = 12.$$

Sada tražimo član koji ne sadrži x u razvoju binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$:

$$\binom{12}{k}\cdot\left(x^2\right)^{12-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k \;\Rightarrow\; \binom{12}{k}\cdot x^{24-2\cdot k}\cdot\left(x^{-1}\right)^k \;\Rightarrow\; \binom{12}{k}\cdot x^{24-2\cdot k}\cdot x^{-k} \;\Rightarrow\; \binom{12}{k}\cdot x^{24-2\cdot k-k} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{12}{k}\cdot x^{24-3\cdot k}.$$

Da bi x nestao eksponent mora biti jednak nuli:

$$24 - 3\cdot k = 0 \;\Rightarrow\; -3\cdot k = -24 \;/:(-3) \;\Rightarrow\; k = 8.$$

Član koji ne sadrži x je deveti po redu, on iznosi $\binom{12}{8}$.

Vježba 082

U prikazu binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ koeficijenti četvrtog i desetog člana se podudaraju. Odredite onaj član koji sadrži x^3.

Rezultat: $\binom{12}{7}\cdot x^3.$

Zadatak 083 (Igor, hotelijerska škola)

Riješite jednadžbu: $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}.$

Rješenje 083

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ ... \ \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1! = 1, \\ 2! = 1 \cdot 2, \\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{ itd.} \end{array}}$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)! \cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

$$\boxed{\begin{array}{l} 9! = 8! \cdot 9, \\ 9! = 7! \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \text{ itd.} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n! = (n-1)! \cdot n, \\ n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-4)! \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-5)! \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \text{ itd.} \end{array}}$$

$$\frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)! \cdot n - (n-1)!}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)! \cdot (n-1)}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n-1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot (n-1) = n \cdot (n+1) \Rightarrow 6 \cdot n - 6 = n^2 + n \Rightarrow n^2 - 5 \cdot n + 6 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_1 = \frac{5+1}{2} \\ n_2 = \frac{5-1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_1 = 3 \\ n_2 = 2 \end{array} \right\}.$$

Vježba 083

Riješite jednadžbu: $\frac{n! - (n-1)!}{n!} = \frac{1}{2}.$

Rezultat: n = 2.

Zadatak 084 (Dino, gimnazija)

Velika i mala kazaljka na satu su se poklopile. Koliko će vremena proći dok se kazaljke ponovno ne poklope?

Rješenje 084

Mala kazaljka pokazuje sate. Za 12 sati napravi na brojčaniku puni kut (360º) pa je njezina kutna brzina:

$$\omega_m = \frac{360^0}{12 \cdot 60 \text{ min}} = \frac{0.5^0}{\text{min}}.$$

Velika kazaljka pokazuje minute. Za 1 sat napravi na brojčaniku puni kut (360º) pa je njezina kutna brzina:

$$\omega_v = \frac{360^0}{1 \cdot 60 \text{ min}} = \frac{6^0}{\text{min}}.$$

Kada mala kazaljka prijeđe kut α, velika kazaljka da bi se s njom poklopila mora prijeći puni kut i još kut α:

$$360^0 + \alpha.$$

Računamo vrijeme t kada se kazaljke ponovno poklope:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_v \cdot t = 360^0 + \alpha \\ \omega_m \cdot t = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \omega_v \cdot t - \omega_m \cdot t = 360^0 + \alpha - \alpha \Rightarrow \omega_v \cdot t - \omega_m \cdot t = 360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot t - 0.5 \cdot t = 360 \Rightarrow 5.5 \cdot t = 360 \Rightarrow t = \frac{360}{5.5} \text{ min} \Rightarrow t = \frac{360}{5.5} \cdot \frac{1}{60} h \Rightarrow t = \frac{6}{5.5} h \Rightarrow \quad h = \frac{60}{55} h \Rightarrow t = \frac{12}{11} h.$$

Vježba 084

Velika i mala kazaljka na satu su se poklopile u 12 sati. Koliko će vremena proći dok se kazaljke ponovno ne poklope?

Rezultat: $t = \frac{12}{11} h.$

Zadatak 085 (Goga, gimnazija)

Zbroj binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(2 \cdot n \cdot x + \frac{1}{2 \cdot n \cdot x^2}\right)^{3 \cdot n}$ je 64. Odredite član u razvoju koji ne sadrži x.

Rješenje 085

Ponovimo!

U razvoju binoma $(a+b)^n$ zbroj binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$ jednak je 2^n.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x) \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^0 = 1, a \neq 0.$$

Zbroj binomnih koeficijenata u razvoju zadanog binoma iznosi $2^{3 \cdot n}$. Slijedi:

$$2^{3 \cdot n} = 64 \Rightarrow 2^{3 \cdot n} = 2^6 \Rightarrow 3 \cdot n = 6 \; /:3 \Rightarrow n = 2.$$

Dakle, radi se o binomu:

$$\left(2 \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot x^2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(4 \cdot x + \frac{1}{4 \cdot x^2}\right)^6,$$

sa općim članom:

$$\binom{6}{k} \cdot (4 \cdot x)^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot x^2}\right)^k = \binom{6}{k} \cdot 4^{6-k} \cdot x^{6-k} \cdot 4^{-k} \cdot x^{-2 \cdot k} = \binom{6}{k} \cdot 4^{6-2 \cdot k} \cdot x^{6-3 \cdot k}.$$

Budući da prema zahtjevu zadatka tražimo član koji ne sadrži x znači da je

$$x^{6-3 \cdot k} = x^0 \Rightarrow 6 - 3 \cdot k = 0 \Rightarrow -3 \cdot k = -6 \; /:(-3) \Rightarrow k = 2.$$

Traženi član u raspisu je treći član čija je vrijednost $\binom{6}{2} \cdot 4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 16 = 240.$

Vježba 085

Zbroj binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(2 \cdot n \cdot x + \frac{1}{2 \cdot n \cdot x^2}\right)^{3 \cdot n}$ je 64. Odredite član u razvoju koji sadrži x^3.

Rezultat: Traženi član u raspisu je drugi član čija je vrijednost $1536 \cdot x^3$.

Zadatak 086 (Goga, gimnazija)

Izračunajte $\sqrt{\left(4-2\cdot\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}-6\right)^2}$.

Rješenje 086

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |a|=\begin{cases} a, & a\ge 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}.$$

$$\sqrt{\left(4-2\cdot\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}-6\right)^2}=\left|\underbrace{4-2\cdot\sqrt{5}}_{\text{negativno}}\right|+\left|\underbrace{2\cdot\sqrt{5}-6}_{\text{negativno}}\right|=$$

$$=-\left(4-2\cdot\sqrt{5}\right)-\left(2\cdot\sqrt{5}-6\right)=-4+2\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5}+6=-4+2\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5}+6=2.$$

Vježba 086

Izračunajte $\sqrt{\left(4-2\cdot\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}-6\right)^2}$.

Rezultat: $4\cdot\sqrt{5}-10.$

Zadatak 087 (Maturant, gimnazija)

Nađite bazu brojevnog sustava u kojem vrijedi 32 + 135 = 211.

Rješenje 087

Neka je x (x > 1, prirodan broj) tražena baza brojevnog sustava. Tada vrijedi:

$$32_{(x)}+135_{(x)}=211_{(x)} \Rightarrow \overset{10}{32}_{(x)}+\overset{210}{135}_{(x)}=\overset{210}{211}_{(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^1+2\cdot x^0+1\cdot x^2+3\cdot x^1+5\cdot x^0=2\cdot x^2+1\cdot x^1+1\cdot x^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x+2\cdot 1+1\cdot x^2+3\cdot x+5\cdot 1=2\cdot x^2+x+1\cdot 1 \Rightarrow 3\cdot x+2+x^2+3\cdot x+5=2\cdot x^2+x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x+2+x^2+3\cdot x+5-2\cdot x^2-x-1=0 \Rightarrow -x^2+5\cdot x+6=0 \; /\cdot(-1) \Rightarrow x^2-5\cdot x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \; , \; b=-5 \; , \; c=-6 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5+7}{2} \\ x_2=\dfrac{5-7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{12}{2}=6 \;\; \text{tražena baza} \\ x_2=\dfrac{-2}{2}=-1 \;\; \text{nema smisla} \end{array}\right\}.$$

Vježba 087

Nađite bazu brojevnog sustava u kojem vrijedi 101 + 1001 = 1110.

Rezultat: Baza je 2.

Zadatak 088 (Maturant, gimnazija)

Izračunajte: $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ \dots\ +\frac{1}{2756}$.

Rješenje 088

Ponovimo!

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Svaki nazivnik rastavimo na dva faktora (umnožak broja i njegovog sljedbenika):

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ ...\ +\frac{1}{2756}=\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ ...\ +\frac{1}{52\cdot 53}=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ ...\ +\frac{1}{52}-\frac{1}{53}=\frac{1}{4}-\frac{1}{53}=\frac{53-4}{212}=\frac{49}{212}.$$

Vježba 088

Izračunajte: $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}.$

Rezultat: $\frac{1}{8}.$

Zadatak 089 (Carmen, ekomomska škola)

Izračunajte: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ ...\ +\frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}.$

Rješenje 089

Ponovimo!

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2\quad,\quad\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ ...\ +\frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\ ...\ +\frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}\cdot\frac{\sqrt{624}-\sqrt{625}}{\sqrt{624}-\sqrt{625}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{4-5}+\ ...\ +\frac{\sqrt{624}-\sqrt{625}}{624-625}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1}+\ ...\ +\frac{\sqrt{624}-\sqrt{625}}{-1}=$$
$$=-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ ...\ -\sqrt{624}+\sqrt{625}=25-\sqrt{2}.$$

Vježba 089

Izračunajte: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ ...\ +\frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}+\sqrt{2}.$

Rezultat: 25.

Zadatak 090 (Aleksandra)

Racionalan broj ima periodičan decimalni zapis $0.\dot{3}5\dot{7}$. Napišite ga u obliku $\frac{a}{b}$, $a, b\in Z$.

Rješenje 090

Ponovimo!

Konvergentni geometrijski red ($|q|<1$):

$$\lim_{n\to\infty}s_n=a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+...=\frac{a_1}{1-q}.$$

1.inačica

Periodičan decimalni zapis možemo predočiti kao zbroj članova beskonačnog padajućeg geometrijskog reda:

$$0.\dot{3}5\dot{7}=0.357357357...=0.357+0.000357+0.000000357+...=\frac{357}{1000}+\frac{357}{1000000}+\frac{357}{1000000000}+...=$$
$$=\frac{357}{10^3}+\frac{357}{10^6}+\frac{357}{10^9}+....$$

Kvocijent je $q=\frac{1}{10^3}$, a prvi član $a_1=\frac{357}{10^3}$. Zbroj reda iznosi:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{357}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{\frac{357}{10^3}}{\frac{10^3-1}{10^3}}=\frac{357}{10^3-1}=\frac{357}{1000-1}=\frac{357}{999}=\frac{119}{333}.$$

2.inačica

$$x=0.\dot{3}5\dot{7}\Rightarrow x=0.357357357...\Rightarrow x=0.357357357.../\cdot 1000\Rightarrow 1000\cdot x=357.357357357....$$

Iz sustava jednakosti dobije se x:

$$\left.\begin{matrix} x=0.357357357... \\ 1000\cdot x=357.357357357... \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti}\end{bmatrix}\Rightarrow 1000\cdot x-x=357.357357357...-0.357357357...\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 999\cdot x=357\Rightarrow x=\frac{357}{999}\Rightarrow x=\frac{119}{333}.$$

Vježba 090

Racionalan broj ima periodičan decimalni zapis $0.\dot{1}\dot{2}$. Napišite ga u obliku $\frac{a}{b}$, $a, b\in Z$.

Rezultat: $\frac{12}{99}=\frac{4}{33}.$

Zadatak 091 (Ivan, pomorska škola)

Odredite opći član zadanog niza 1, 4, 7, 10, 13, … .

Rješenje 091

Uočimo da je razlika između dva susjedna člana jednaka 3. Dakle, opći član će imati faktore 3 i n, tj. 3 · n. Promatrajmo sljedeću tablicu:

n	1	2	3	4	5	…
3 · n	3	6	9	12	15	…
naš niz	**1**	**4**	**7**	**10**	**13**	…

Vidimo da su članovi našeg niza za 2 manji od odgovarajućih članova niza $a_n = 3 \cdot n$ pa vrijedi: $a_n = 3 \cdot n - 2$.
Opći član zadanog niza glasi:

$$a_n = 3 \cdot n - 2.$$

Vježba 091

Odredite opći član zadanog niza 1, 5, 9, 13, 17, … .

Rezultat: $a_n = 4 \cdot n - 3$.

Zadatak 092 (Ivan, pomorska škola)

Odredite opći član zadanog niza $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

Rješenje 092

Uočimo da su nazivnici članova zadanog niza redom prirodni brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, itd. Prvi član je pozitivan, drugi član je negativan, treći član je pozitivan, četvrti član je negativan itd.

Pomoću potencije $(-1)^{n+1}$ dobiju se odgovarajući predznaci pa opći član zadanog niza glasi:

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Vježba 092

Odredite opći član zadanog niza $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

Rezultat: $a_n=\frac{1}{n}.$

Zadatak 093 (Ivan, pomorska škola)

Odredite opći član zadanog niza $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$.

Rješenje 093

Uočimo da su nazivnici članova zadanog niza potencije s bazom 2:

$$1 = 2^0 \ , \ 2 = 2^1 \ , \ 4 = 2^2 \ , \ 8 = 2^3 \ , \ 16 = 2^4 \ , \ \ldots$$

Znači da će opći član sadržavati potenciju 2^n. Budući da je prvi član $1 = 2^0$, opći član glasi:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vježba 093

Odredite opći član zadanog niza $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$.

Rezultat: $a_n = \frac{1}{2^n}.$

Zadatak 094 (Ivan, pomorska škola)

Odredite opći član zadanog niza – 1, 2, 7, 14, 23, … .

Rješenje 094

Promatrajmo sljedeću tablicu:

n	1	2	3	4	5	…
n^2	1	4	9	16	25	…
naš niz	**– 1**	**2**	**7**	**14**	**23**	…

Vidimo da su članovi našeg niza za 2 manji od odgovarajućih članova niza $a_n = n^2$ pa vrijedi:

$$a_n = n^2 - 2.$$

Vježba 094

Odredite opći član zadanog niza 2, 5, 10, 17, 26, … .

Rezultat: $a_n = n^2 + 1.$

Zadatak 095 (Tanja, ekonomska škola, Jan, Luka, Zoran, gimnazija)

Koliko postotaka iznosi: $\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9^2}\right)$ od $\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)$?

Rješenje 095

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}.$$

Koliko postotaka iznosi a od b? Odgovor: $\frac{a}{b}\cdot 100\%.$

1.inačica

$$\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)}\cdot 100\% = \frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{81}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{81}\right)}\cdot 100\% = \frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot 100\% = \frac{3}{4}\cdot 100\% = 75\%.$$

2.inačica

$$\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)}\cdot 100\% = \frac{\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\left(3^2\right)^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)}\cdot 100\% = \frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot 100\% = \frac{3}{4}\cdot 100\% = 75\%.$$

Vježba 095

Koliko postotaka iznosi: $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4^2}\right)$ od $\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)$?

Rezultat: 75%.

Zadatak 096 (Radoznala, hotelijerska škola)

Usporedite razlomke: $\frac{127895348567}{765843598721}$ i $\frac{127895348569}{765843598723}$.

Rješenje 096

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ ako je } a\cdot d<b\cdot c, \text{ uz uvjet da je } b>0 \text{ i } d>0.$$

Uočimo da su brojnik i nazivnik drugog razlomka za 2 veći od brojnika i nazivnika prvog razlomka.Zadane razlomke možemo napisati na sljedeći način:

$$\left.\begin{array}{l} x=127895348567 \\ y=765843598721 \\ x<y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} \text{ i } \frac{x+2}{y+2}.$$

Budući da je

$$x\cdot(y+2)<y\cdot(x+2) \Rightarrow x\cdot y+2\cdot x<x\cdot y+2\cdot y \Rightarrow 2\cdot x<2\cdot y \,/:2 \Rightarrow x<y,$$

slijedi

$$\frac{x}{y}<\frac{x+2}{y+2},$$

tj.

$$\frac{127895348567}{765843598721}<\frac{127895348569}{765843598723}.$$

Vježba 096

Usporedite razlomke: $\frac{123453}{987657}$ i $\frac{123451}{987655}$.

Rezultat: $\frac{123453}{987657}>\frac{123451}{987655}.$

Zadatak 097 (Dalija, studentica)

Dokaži matematičkom indukcijom: $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+...+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$

Rješenje 097

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Načelo matematičke indukcije
Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom
Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

i) Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.

ii) Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.

iii) Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{(1+1)^2}\Rightarrow\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}\Rightarrow\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

ii) Pretpostavka indukcije.

Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

iii) Korak indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{2\cdot(n+1)+1}{(n+1)^2\cdot((n+1)+1)^2}=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{2\cdot n+2+1}{(n+1)^2\cdot(n+1+1)^2}=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=\begin{bmatrix}\text{iskoristimo}\\ \text{pretpostavku indukcije}\end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}}_{1-\frac{1}{(n+1)^2}}+\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=$$

$$=1-\left[\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2\cdot n+3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}\right]=1-\frac{(n+2)^2-(2\cdot n+3)}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=1-\frac{n^2+4\cdot n+4-2\cdot n-3}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=$$

$$=1-\frac{n^2+2\cdot n+1}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}.$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, s n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Vježba 097

Dokaži matematičkom indukcijom: $3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}=3\cdot\left(2^n-1\right).$

Rezultat: Formula je točna.

Zadatak 098 (Dalija, studentica)

Dokaži matematičkom indukcijom: $-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)=(-1)^n\cdot n.$

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^1=1.$$

Načelo matematičke indukcije
Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom
Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

i) Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.

ii) Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.

iii) Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.
Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$-1=(-1)^1\cdot 1\Rightarrow -1=-1.$$

ii) Pretpostavka indukcije.
Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)=(-1)^n\cdot n.$$

iii) Korak indukcije.
Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)+(-1)^{n+1}\cdot(2\cdot(n+1)-1)=$$

$$=-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)+(-1)^{n+1}\cdot(2\cdot n+2-1)=$$

$$=-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)+(-1)^{n+1}\cdot(2\cdot n+1)=\begin{bmatrix}\text{iskoristimo}\\ \text{pretpostavku indukcije}\end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{-1+3-5+...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)}_{(-1)^n\cdot n}+(-1)^{n+1}\cdot(2\cdot n+1)=(-1)^n\cdot n+(-1)^{n+1}\cdot(2\cdot n+1)=$$

$$=(-1)^n\cdot n+(-1)^n\cdot(-1)^1\cdot(2\cdot n+1)=(-1)^n\cdot n+(-1)^n\cdot(-1)\cdot(2\cdot n+1)=(-1)^n\cdot(n-2\cdot n-1)=$$

$$=(-1)^n\cdot(-n-1)=(-1)^n\cdot(-1)\cdot(n+1)=(-1)^{n+1}\cdot(n+1).$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, s n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Vježba 098

Dokaži matematičkom indukcijom: $-1+3+7+...+(4\cdot n-5)=n\cdot(2\cdot n-3).$

Rezultat: Formula je točna.

Zadatak 099 (Marijana, maturantica)

Aritmetička sredina 15 brojeva iznosi 20. Ako je aritmetička sredina nekih 10 od tih 15 brojeva jednaka 10, kolika je aritmetička sredina preostalih 5 brojeva?

Rješenje 099

Ponovimo!

Aritmetička sredina n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dana je formulom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{ili} \quad A_n = \frac{s_n}{n},$$

gdje je $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.
Budući da aritmetička sredina 15 brojeva iznosi 20, slijedi:

$$A_{15} = 20 \Rightarrow \frac{s_{15}}{15} = 20 \Rightarrow s_{15} = 20 \cdot 15 \Rightarrow s_{15} = 300.$$

Znači da je zbroj 15 brojeva jednak 300.
Aritmetička sredina nekih 10 od tih 15 brojeva jednaka je 10 pa vrijedi:

$$A_{10} = 10 \Rightarrow \frac{s_{10}}{10} = 10 \Rightarrow s_{10} = 10 \cdot 10 \Rightarrow s_{10} = 100.$$

Znači da je zbroj nekih 10 brojeva od tih 15 jednak 100. Tada je zbroj preostalih 5 brojeva jednak

$$s_5 = s_{15} - s_{10} \Rightarrow s_5 = 300 - 100 \Rightarrow s_5 = 200.$$

Aritmetička sredina preostalih 5 brojeva je:

$$A_5 = \frac{s_5}{5} \Rightarrow A_5 = \frac{200}{5} \Rightarrow A_5 = 40.$$

Vježba 099

Aritmetička sredina 15 brojeva iznosi 20. Ako je aritmetička sredina nekih 5 od tih 15 brojeva jednaka 40, kolika je aritmetička sredina preostalih 10 brojeva?

Rezultat: 10.

Zadatak 100 (Marijana, maturantica)

Geometrijska sredina 6 brojeva iznosi 4. Ako je geometrijska sredina neka 2 od tih 6 brojeva jednaka 3, koliko iznosi geometrijska sredina preostala 4 broja?

Rješenje 100

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Geometrijska sredina n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dana je formulom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad \text{ili} \quad G_n = \sqrt[n]{p_n},$$

gdje je $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$.
Budući da geometrijska sredina 6 brojeva iznosi 4, slijedi:

$$G_6 = 4 \Rightarrow \sqrt[6]{p_6} = 4 \,/^6 \Rightarrow p_6 = 4^6 \Rightarrow p_6 = \left(2^2\right)^6 \Rightarrow p_6 = 2^{12}.$$

Znači da je umnožak 6 brojeva jednak 2^{12}.
Geometrijska sredina neka 2 od tih 6 brojeva jednaka je 3 pa vrijedi:

$$G_2 = 3 \Rightarrow \sqrt{p_2} = 3 \,/^2 \Rightarrow p_2 = 3^2.$$

Znači da je umnožak neka 2 broja od tih 6 jednak 3^2. Tada je umnožak preostala 4 broja jednak

$$p_4 = \frac{p_6}{p_2} \Rightarrow p_4 = \frac{2^{12}}{3^2}.$$

Geometrijska sredina preostala 4 broja je:

$$G_4 = \sqrt[4]{p_4} \Rightarrow G_4 = \sqrt[4]{\frac{2^{12}}{3^2}} \Rightarrow G_4 = \frac{\sqrt[4]{2^{12}}}{\sqrt[4]{3^2}} \Rightarrow G_4 = \frac{2^3}{\sqrt{3}} \Rightarrow G_4 = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Vježba 100

Geometrijska sredina 6 brojeva iznosi 4. Ako je geometrijska sredina neka 4 od tih 6 brojeva jednaka $\frac{8}{\sqrt{3}}$, koliko iznosi geometrijska sredina preostala 2 broja?

Rezultat: 3.