Zadatak 041 (Ivana, hotelijerska škola)

Dokažite da je zbroj dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 4.

Rješenje 041

Dva uzastopna neparna prirodna broja a i b možemo predočiti u obliku a = 2k – 1, b = 2k +1, gdje je k neki prirodan broj. Odavde je:

$$a+b=2k-1+2k+1=4\cdot k$$

i tvrdnja je dokazana.

Vježba 041

Dokažite da je razlika dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednaka 2.

Rezultat: $(2k+1)-(2k-1)=2k+1-2k+1=2.$

Zadatak 042 (1A, hotelijerska škola)

Što je veće: $2\cdot\sqrt{5}$ ili $\sqrt{45}$?

Rješenje 042

1.inačica

Za drugi korijen vrijedi nejednakost:

$$0<a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2^2\cdot 5}=\sqrt{20} \\ \sqrt{45}=\sqrt{45} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{20}<\sqrt{45} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{5}<\sqrt{45}.$$

2.inačica

Za kvadrate vrijedi nejednakost:

$$1<a<b \Rightarrow a^2<b^2.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} \left(2\cdot\sqrt{5}\right)^2=4\cdot 5=20 \\ \left(\sqrt{45}\right)^2=45 \end{array}\right\} \Rightarrow 20<45 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{5}<\sqrt{45}.$$

Vježba 042

Što je veće: $\sqrt{8}$ ili $3\cdot\sqrt{2}$?

Rezultat: $\sqrt{8}<3\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 043 (Robert, gimnazija)

Nađite ostatak pri dijeljenju broja $A=13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$ brojem 3.

Rješenje 043

Ako su $a, b\in Z$ i $m\in N$ i ako m $\mid$ a – b, onda kažemo da su a i b kongruentni modulo m i to pišemo ovako:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Posljednji zapis zovemo još i kongruencijom. Svaka kongruencija mod m je:

- refleksivna $a \equiv a \pmod{m}$, za svako a
- simetrična $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- tranzitivna $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Svojstva kongruencije:

① ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, onda je

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
- $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$, za svaki cijeli broj k

② ako je $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$ i M(k, m) = d, onda slijedi $a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

③ ako je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $a \equiv b \pmod{m}$, onda vrijedi $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

④ brojevi a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s brojem m ako i samo ako je $a \equiv b \pmod{m}$

Uporabom svojstva ② i ④ dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} 13 \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 \equiv -1 \pmod{3} \\ 5 \equiv -1 \pmod{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13^{16} \equiv 1^{16} \pmod{3} \\ 2^{25} \equiv (-1)^{25} \pmod{3} \\ 5^{15} \equiv (-1)^{15} \pmod{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1^{16} - (-1)^{25} \cdot (-1)^{15} \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1 - (-1) \cdot (-1) \pmod{3} \Rightarrow 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 0 \pmod{3}$$

pa je A djeljiv sa 3.

Vježba 043

Nađite ostatak pri dijeljenju broja 2^9 brojem 3.

Rezultat: $$2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^9 \equiv (-1)^9 \pmod{3} \Rightarrow 2^9 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^9 \equiv -1 \pmod{3} \\ 0 \equiv 3 \pmod{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^9 \equiv -1 + 3 \pmod{3} \Rightarrow 2^9 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \text{ostatak je } 2.$$

Zadatak 044 (Robert, gimnazija)

Riješi kongruenciju $5x \equiv 7 \pmod{8}$.

Rješenje 044

Ako su $a, b \in Z$ i $m \in N$ i ako m | a – b, onda kažemo da su a i b kongruentni modulo m i to pišemo ovako:

$a \equiv b \pmod{m}$.

Posljednji zapis zovemo još i kongruencijom. Svaka kongruencija mod m je:

- refleksivna $a \equiv a \pmod{m}$, za svako a
- simetrična $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- tranzitivna $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Svojstva kongruencije:

① ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, onda je

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$
- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
- $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$, za svaki cijeli broj k

② ako je $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$ i M(k, m) = d, onda slijedi $a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

③ ako je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $a \equiv b \pmod{m}$, onda vrijedi $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

④ brojevi a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s brojem m ako i samo ako je $a \equiv b \pmod{m}$

Zadatak ćemo riješiti metodom transformacije koeficijenata.

$$5x \equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x \equiv 7 \pmod 8 \\ 0 \equiv 8 \pmod 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x \equiv 7+8 \pmod 8 \Rightarrow 5x \equiv 15 \pmod 8 \Rightarrow [\text{dijelimo s } 5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod 8.$$

Vježba 044

Riješi kongruenciju 7x ≡ 6 (mod 15).

Rezultat:

$$7x \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7x \equiv 6 \pmod{15} \\ 0 \equiv 15 \pmod{15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7x \equiv 21 \pmod{15} \Rightarrow [\text{dijelimo sa } 7] \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{15}.$$

Zadatak 045 (4A, hotelijerska škola)

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i, j \in \{1, 2, 3, \dots 20\}$ i $|i-j| \le 2$?

Rješenje 045

Iz $|i-j| \le 2$ slijedi $-2 \le i-j \le 2.$ Pokažimo tablični sve mogućnosti.

Na prvom mjestu je znamenka:	Na drugom mjestu može biti znamenka:	Ukupan broj parova
1	1, 2, 3	3
2	1, 2, 3, 4	4
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	2, 3, 4, 5, 6	5
5	3, 4, 5, 6, 7	5
6	4, 5, 6, 7, 8	5
7	5, 6, 7, 8, 9	5
8	6, 7, 8, 9, 10	5
9	7, 8, 9, 10, 11	5
10	8, 9, 10, 11, 12	5
11	9, 10, 11, 12, 13	5
12	10, 11, 12, 13, 14	5
13	11, 12, 13, 14, 15	5
14	12, 13, 14, 15, 16	5
15	13, 14, 15, 16, 17	5
16	14, 15, 16, 17, 18	5
17	15, 16, 17, 18, 19	5
18	16, 17, 18, 19, 20	5
19	17, 18, 19, 20	4
20	18, 19, 20	3

Uređenih parova ima:

$$3 + 4 + 16 \cdot 5 + 4 + 3 = 7 + 80 + 7 = 94.$$

Vježba 045

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i, j \in \{1, 2, 3, \dots 10\}$ i $|i-j| \le 1$?

Rezultat: 28.

Zadatak 046 (Sanela, ekonomska škola)

Prva, treća i peta znamenka šesteroznamenkastog prirodnog broja su međusobno jednake, a druga, četvrta i šesta također. Dokažite da je takav broj djeljiv sa 7.

Rješenje 046

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što ju nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava. Sada pišemo:

$$\overline{ababab} = \overset{5}{a}\overset{4}{b}\overset{3}{a}\overset{2}{b}\overset{1}{a}\overset{0}{b} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b = 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b =$$

$$= 101010a + 10101b = 10101 \cdot (10a + b) = 7 \cdot 1443 \cdot (10a + b).$$

Budući da zadani broj u svojem rastavu ima faktor 7, znači da je djeljiv sa 7.

Vježba 046

Prva, treća i peta znamenka šesteroznamenkastog prirodnog broja su međusobno jednake, a druga, četvrta i šesta također. Dokažite da je takav broj djeljiv s 21.

Rezultat: U rastavu broja je faktor 21.

Zadatak 047 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite da je za svaki $n \in N$ broj $n^3 - n$ djeljiv s 6.

Rješenje 047

Podsjetimo se da vrijedi:

- u produktu dvaju uzastopnih prirodnih brojeva jedan je djeljiv s 2:
  na primjer, ...14, 15 .... 17, 18 ....
- u produktu triju uzastopnih prirodnih brojeva jedan je djeljiv s 3:
  na primjer, ...12, 13, 14 .... 20, 21, 22 .... 40, 41, 42 ....

Zadani izraz rastavimo na faktore:

$$n^3 - n = n \cdot \left(n^2 - 1\right) = n \cdot (n-1) \cdot (n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1).$$

Budući da je u produktu triju uzastopnih prirodnih brojeva $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ bar jedan paran i jedan djeljiv s 3, znači da je taj produkt djeljiv s 6.

Vježba 047

Dokažite da je za svaki $n \in N$ broj $n^2 - n$ djeljiv s 2.

Rezultat: $(n - 1) \cdot n$.

Zadatak 048 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite da je produkt četiriju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek djeljiv s 24.

Rješenje 048

Produkt 4 uzastopna prirodna broja uvijek možemo predočiti u obliku $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$.

[Svaki se prirodni broj može prikazati na jedan od ova četiri načina:
$n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$]

Promatramo slučajeva:

① $n = 4k$ ② $n = 4k + 1$ ③ $n = 4k + 2$ ④ $n = 4k + 3$

Slučaj ①:

$$\left.\begin{array}{l} n = 4k \\ n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \end{array}\right\} \Rightarrow 4k \cdot (4k+1) \cdot (4k+2) \cdot (4k+3) = 4k \cdot (4k+1) \cdot 2 \cdot (2k+1) \cdot (4k+3) =$$

$$= 8 \cdot k \cdot (4k+1) \cdot (2k+1) \cdot (4k+3).$$

[Svaki se prirodni broj može prikazati na jedan od ova tri načina:
$n = 3r$, $n = 3r + 1$, $n = 3r + 2$]

Sada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ za } k = 3r \\ 8 \cdot k \cdot (4k+1) \cdot (2k+1) \cdot (4k+3) \end{array}\right\} \Rightarrow 8 \cdot 3r \cdot (12r+1) \cdot (6r+1) \cdot (12r+3) = 24 \cdot r \cdot (12r+1) \cdot (6r+1) \cdot (12r+3).$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ za } k = 3r+1 \\ 8 \cdot k \cdot (4k+1) \cdot (2k+1) \cdot (4k+3) \end{array}\right\} \Rightarrow 8 \cdot (3r+1) \cdot (12r+5) \cdot (6r+3) \cdot (12r+7) =$$

$$=8\cdot(3r+1)\cdot(12r+5)\cdot 3\cdot(2r+1)\cdot(12r+7)=24\cdot(3r+1)\cdot(12r+5)\cdot(2r+1)\cdot(12r+7).$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ za } k=3r+2\\ 8\cdot k\cdot(4k+1)\cdot(2k+1)\cdot(4k+3)\end{array}\right\}\Rightarrow 8\cdot(3r+2)\cdot(12r+9)\cdot(6r+5)\cdot(12r+11)=$$

$$=8\cdot(3r+2)\cdot 3\cdot(4r+3)\cdot(6r+5)\cdot(12r+11)=24\cdot(3r+2)\cdot(4r+3)\cdot(6r+5)\cdot(12r+11).$$

Analogno se dokazuju tvrdnje u slučajevima: ② n = 4k + 1 ③ n = 4k + 2 ④ n = 4k + 3.

Vježba 048

Dokažite da je izraz $2n^2 - 2n$ uvijek djeljiv s 4.

Rezultat: $2\cdot(n-1)\cdot n$.

Zadatak 049 (Ivana, hotelijerska škola)

Aritmetička sredina 16 različitih prirodnih brojeva je 16. Koja je najveća moguća vrijednost koju može poprimiti prirodni broj iz tog skupa?

A. 16 B. 24 C. 32 D. 136 E. 256

Rješenje 049

Neka je s zbroj 16 različitih prirodnih brojeva. Budući da je aritmetička sredina 16 različitih prirodnih brojeva 16, slijedi:

$$\frac{s}{16}=16 \Rightarrow s=16\cdot 16=256.$$

Nađimo zbroj prvih 15 prirodnih brojeva:

$$\left.\begin{array}{l}1+2+3+\ ...\ +n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\\ 1+2+3+\ ...\ +15=?\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2+3+\ ...\ +15=\frac{15\cdot 16}{2}=120.$$

Tada je najveća moguća vrijednost koju može poprimiti prirodni broj iz tog akupa jednaka: 256 – 120 = 136.
Odgovor je pod D.

Vježba 049

Aritmetička sredina 14 različitih prirodnih brojeva je 14. Koja je najveća moguća vrijednost koju može poprimiti prirodni broj iz tog skupa?

Rezultat: 105.

Zadatak 050 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko je: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$

Rješenje 050

Uočimo da je svaki faktor razlika kvadrata [$a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$]:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ ...\ \cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}==\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Vježba 050

Koliko je: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{10^2}\right)?$

Rezultat: $\frac{11}{20}$.

Zadatak 051 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako je a = 3^{40}, b = 4^{30}, c = 2^{70}, tada je b < a < c. Dokažite!

Rješenje 051

Za potenciranje potencija vrijedi: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}\ ,\ a^{n\cdot m} = \left(a^n\right)^m$.

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3^{40} \\ b = 4^{30} \\ c = 2^{70} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3^{4\cdot 10} \\ b = 4^{3\cdot 10} \\ c = 2^{7\cdot 10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \left(3^4\right)^{10} \\ b = \left(4^3\right)^{10} \\ c = \left(2^7\right)^{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 81^{10} \\ b = 64^{10} \\ c = 128^{10} \end{array}\right\} \Rightarrow 64^{10} < 81^{10} < 128^{10} \Rightarrow b < a < c.$$

Vježba 051

Ako je a = 3^{400}, b = 4^{300}, c = 2^{700}, tada je b < a < c. Dokažite!

Rezultat: Analogno kao u zadatku.

Zadatak 052 (Ivana ♥ Marinko, hotelijerska škola, tehnička škola)

Metodom matematičke indukcije dokažite formulu:

$$\left(a+b\right)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n\ ,\ n \in N.$$

Rješenje 052

Formula se zove binomna formula ili Newtonova formula i obično se piše u sljedećem obliku:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

Prije samog dokaza podsjetimo se nekih pravila za binomne koeficijente:

$$\binom{n}{0} = 1\ ,\ \binom{n}{n} = 1\ ,\ \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj k i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika k + 1.

baza indukcije, n = 1

$$\left(a+b\right)^1 = \sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}a^{1-r}b^r = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n = k

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj k:

$$\left(a+b\right)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r. \qquad \text{(induktivna pretpostavka)}$$

n = k + 1

Sada provjeravamo formulu za sljedbenika k + 1:

$$\left(a+b\right)^{k+1} = \left(a+b\right)^k\cdot\left(a+b\right) = \left[\text{koristimo induktivnu pretpostavku}\right] = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r\cdot\left(a+b\right) =$$

$$= \left[\text{pomnožimo zagradu}\right] = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r + \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1} = \left[\begin{array}{l}\text{u prvoj sumi izdvojimo prvi član,} \\ \text{a u drugoj zadnji član}\end{array}\right] =$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}+\binom{k}{k}b^{k+1}=\left[\begin{array}{c}\text{zamijenimo:}\\ \binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\ \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}\end{array}\right]=$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}=\left[\begin{array}{l}\text{u drugoj sumi napravimo}\\ \text{"pomak" u zbrajanju za 1}\end{array}\right]=$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^{r}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}=\left[\begin{array}{l}\text{iz obje sume izlučimo}\\ \text{zajednički faktor}\end{array}\right]=$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}a^{k+1-r}b^{r}\cdot\left[\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right]+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}=\left[\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\binom{k+1}{r}\right]=$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r}.$$

Vježba 052

Izračunaj $(a+b)^5$.

Rezultat: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Zadatak 053 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredi najmanji broj b za koji vrijedi $133_{(b-1)}=111_{(b)}$.

Rješenje 053

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od jedan. Broj različitih znamenaka u sustavu s bazom b ima točno b. Znamenke su iz skupa: {0, 1, 2, 3, 4, ... , b – 1}. Zadane brojeve prevest ćemo u dekadski sustav:

$$133_{(b-1)}=111_{(b)}\Rightarrow \overset{210}{133}_{(b-1)}=\overset{210}{111}_{(b)}\Rightarrow 1\cdot(b-1)^2+3\cdot(b-1)^1+3\cdot(b-1)^0=1\cdot b^2+1\cdot b^1+1\cdot b^0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-1)^2+3\cdot(b-1)+3\cdot 1=b^2+b+1\cdot 1\Rightarrow b^2-2b+1+3b-3+3=b^2+b+1\Rightarrow 0=0.$$

Budući da smo dobili identitet, znači da baza može biti bilo koji prirodni broj veći od jedan. U prvom broju $133_{(b-1)}$ pojavljuju se znamenke 1 i 3 pa za pripadnu bazu vrijedi:

$$b-1\geq 4\Rightarrow b\geq 5.$$

Iz drugog broja $111_{(b)}$ očito je da vrijedi: $b\geq 2$.
Zato je najmanja moguća baza b = 5.

Vježba 053

Odredi najmanji broj b za koji vrijedi $12_{(b-1)}=11_{(b)}$.

Rezultat: b = 4.

Zadatak 054 (Boris, tehnička škola)

Izračunaj na najbrži mogući način bez uporabe kalkulatora: $\frac{328\cdot 288+40}{328+288\cdot 327}$.

Rješenje 054

$$\frac{328\cdot 288+40}{328+288\cdot 327}=\frac{328\cdot 288+\overbrace{(328-288)}^{40}}{328+288\cdot 327}=\frac{328\cdot 288+328-288}{328+288\cdot 327}=\frac{328+328\cdot 288-288}{328+288\cdot 327}=$$

$$=\frac{328+288\cdot(328-1)}{328+288\cdot 327}=\frac{328+288\cdot 327}{328+288\cdot 327}=1.$$

Vježba 054

Izračunaj na najbrži mogući način bez uporabe kalkulatora: $\frac{1103 \cdot 1999 - 896}{1103 + 1999 \cdot 1102}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 055 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko znamenaka ima broj $4^{63} \cdot 25^{59}$?

Rješenje 055

1.inačica

$$n = 4^{63} \cdot 25^{59} = \left(2^2\right)^{63} \cdot \left(5^2\right)^{59} = 2^{126} \cdot 5^{118} = 2^8 \cdot 2^{118} \cdot 5^{118} = 2^8 \cdot (2 \cdot 5)^{118} = 256 \cdot 10^{118} = 2.56 \cdot 10^{120}.$$

Broj n ima 121 znamenku (1 + 120 = 121).

2.inačica

$$n = 4^{63} \cdot 25^{59} = 4^4 \cdot 4^{59} \cdot 25^{59} = 4^4 \cdot (4 \cdot 25)^{59} = 256 \cdot 100^{59} = 256 \cdot \left(10^2\right)^{59} = 256 \cdot 10^{118} = 2.56 \cdot 10^{120}.$$

Broj n ima 121 znamenku (1 + 120 = 121).

Vježba 055

Koliko znamenaka ima broj $4^{30} \cdot 25^{39}$?

Rezultat: 61.

Zadatak 056 (Jelena, komercijalna škola)

Nađi $C(10)$ ako je C zadano rekurzijom $C(1) = 1,\ C(2n) = C(n) + 1,\ C(2n+1) = C(6n+4) + 1,\ n \in N.$

Rješenje 056

$$\left.\begin{array}{l} C(1) = 1, \\ C(2n) = C(n) + 1, \\ C(2) = C(1) + 1 = 1 + 1 = 2, \\ C(4) = C(2) + 1 = 2 + 1 = 3, \\ C(8) = C(4) + 1 = 3 + 1 = 4, \\ C(16) = C(8) + 1 = 4 + 1 = 5. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C(2n+1) = C(6n+4) + 1, \\ C(10) = C(5) + 1 = C(16) + 1 + 1 = 5 + 1 + 1 = 7. \end{array}\right.$$

Vježba 056

Nađi $C(20)$ ako je C zadano rekurzijom $C(1) = 1,\ C(2n) = C(n) + 1,\ C(2n+1) = C(6n+4) + 1,\ n \in N.$

Rezultat: 8.

Zadatak 057 (Beti, gimnazija)

Nađi koeficijent petog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2} \cdot a - \sqrt{3} \cdot b\right)^{10}$.

Rješenje 057

Peti član u razvoju binoma $(x + y)^n$ glasi: $\binom{n}{4} \cdot x^{n-4} \cdot y^4$. Zato je peti član jednak:

$$\binom{10}{4} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot a\right)^6 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot b\right)^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^3 \cdot a^6 \cdot 3^2 \cdot b^4 = 210 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^6 \cdot b^4 = 15120 \cdot a^6 \cdot b^4.$$

Vježba 057

Nađi koeficijent trećeg člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2} \cdot a - \sqrt{3} \cdot b\right)^{10}$.

Rezultat: $2160 \cdot a^8 \cdot b^2$.

Zadatak 058 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko će puta između 00:00 i 23:59 digitalni sat pokazati sve od znamenaka 0, 0, 2 i 6 u bilo kojem redoslijedu?

Rješenje 058

Budući da su dane znamenke 0, 0, 2 i 6 digitalni sat može pokazati sljedeća vremena:

00:26, 02:06, 06:02, 06:20, 20:06. Sat će pokazati pet puta.

Vježba 058

Koliko će puta između 00 : 00 i 23 : 59 digitalni sat pokazati sve od znamenaka 0, 0, 5 i 6 u bilo kojem redoslijedu?

Rezultat: Četiri puta.

Zadatak 059 (Ivana, hotelijerska škola)

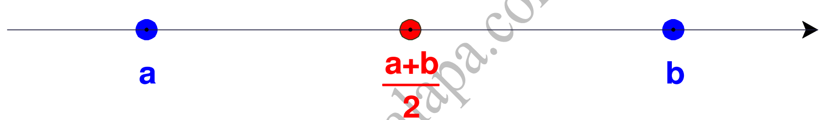
Koji je broj jednako udaljen od 2006 i 6002?

Rješenje 059

Za dva prirodna broja a i b (a < b) aritmetička sredina definira se: $A = \frac{a+b}{2}$.

Za aritmetičku sredinu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2} \\ b - A = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{aritmetička sredina jednako je udaljena od oba broja.}$$



Zato je:

$$A = \frac{2006+6002}{2} = \frac{8008}{2} = 4004.$$

Vježba 059

Koji je broj jednako udaljen od 2004 i 4002?

Rezultat: 3003.

Zadatak 060 (1A, hotelijerska škola)

Brojevi a, b, c, d, e su pozitivni tako da je ab = 2, bc = 3, cd = 4 i de = 5. Koja je vrijednost broja $\frac{e}{a}$?

Rješenje 060

1.inačica

$$\frac{e}{a} = \begin{bmatrix} d \cdot e = 5 \\ e = \frac{5}{d} \end{bmatrix} = \frac{\frac{5}{d}}{a} = \frac{5}{a \cdot d} = \begin{bmatrix} c \cdot d = 4 \\ d = \frac{4}{c} \end{bmatrix} = \frac{5}{a \cdot \frac{4}{c}} = \frac{5 \cdot c}{4 \cdot a} = \begin{bmatrix} b \cdot c = 3 \\ c = \frac{3}{b} \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot \frac{3}{b}}{4 \cdot a} = \frac{15}{4 \cdot a \cdot b} = \left[a \cdot b = 2\right] = \frac{15}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} \frac{de}{cd} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{e}{c} = \frac{5}{4} \\ \frac{ab}{bc} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{e}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{e}{a} = \frac{15}{8}.$$

3.inačica

$$\frac{e}{a} = \frac{b \cdot c \cdot d \cdot e}{a \cdot b \cdot c \cdot d} = \frac{(b \cdot c) \cdot (d \cdot e)}{(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}.$$

Vježba 060

Brojevi a, b, c, d, e su pozitivni tako da je ab = 1, bc = 2, cd = 3 i de = 4. Koja je vrijednost broja $\frac{e}{a}$?

Rezultat: $\frac{8}{3}$.