Zadatak 001 (Nikolina, prehrambena škola)

Izračunaj:

$$2 \cdot 3^2 + 6 : \sqrt{9} + 5 \cdot 2 - 12 : 3.$$

Rješenje 001

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo:

$$2 \cdot 3^2 + 6 : \sqrt{9} + 5 \cdot 2 - 12 : 3 = 2 \cdot 9 + 6 : 3 + 5 \cdot 2 - 12 : 3 = 18 + 2 + 10 - 4 =$$
$$= 20 + 10 - 4 = 30 - 4 = 26.$$

Vježba 001

Izračunaj: $5 \cdot 2^3 - 4 : 2 + 3 \cdot \sqrt{25} + 2 \cdot 4.$

Rezultat: 61.

Zadatak 002 (Jelena, gimnazija)

Izračunaj aritmetičku i geometrijsku sredinu brojeva 2 i 8.

Rješenje 002

Za dva pozitivna realna broja definira se:

$$\text{aritmetička sredina } A = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{geometrijska sredina } G = \sqrt{a \cdot b}.$$

Za $a = 2$ i $b = 8$ je

$$A = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad , \quad G = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$

Vježba 002

Izračunaj aritmetičku i geometrijsku sredinu brojeva 3 i 27.

Rezultat: A = 15, G = 9.

Zadatak 003 (Vedrana, trgovačka škola)

Izračunaj:

$$\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{1}{9+\frac{1}{5}}}\right):\frac{465}{419}\right)-\frac{1}{1995}.$$

Rješenje 003

$$\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{1}{9+\frac{1}{5}}}\right):\frac{465}{419}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{1}{\frac{9}{1}+\frac{1}{5}}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{1}{\frac{45+1}{5}}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{1}{\frac{46}{5}}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{46}{5}}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{9+\frac{5}{46}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{9}{1}+\frac{5}{46}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{414+5}{46}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{419}{46}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{419}{46}}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(1+\frac{46}{419}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{46}{419}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=$$

$$=\left(\left(\frac{419+46}{419}\right)\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=\left(\frac{465}{419}\cdot\frac{419}{465}\right)-\frac{1}{1995}=1-\frac{1}{1995}=\frac{1995-1}{1995}=\frac{1994}{1995}.$$

Vježba 003

Izračunaj:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}:\frac{13}{21}.$$

Rezultat: 3.

Zadatak 004 (Martina, ugostiteljska škola)

Napiši jedan racionalni broj koji se nalazi između racionalnih brojeva: $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$.

Rješenje 004

Aritmetička sredina $\frac{x+y}{2}$ racionalnih brojeva x i y opet je racionalni broj koji se nalazi između tih brojeva.

Ako je x < y, tada je

$$x<\frac{x+y}{2}<y.$$

Izračunajmo aritmetičku sredinu zadanih brojeva:

$$A=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{2+3}{6}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{1}}=\frac{5}{12}.$$

Vrijedi:

$$\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}.$$

Vježba 004

Napiši jedan racionalni broj koji se nalazi između racionalnih brojeva: $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{4}$.

Rezultat: $\frac{1}{5} < \frac{9}{40} < \frac{1}{4}.$

Zadatak 005 (Mirko, obrtnička škola)

Izračunaj:

$$2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left[2 \cdot \left(2 - (-10) \right) + 10 \right] - 100 \right\} + 100.$$

Rješenje 005

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo.

Najprije računamo unutar okruglih zagrada ( ), zatim unutar uglatih zagrada [ ] i napokon unutar vitičastih zagrada { }:

$$2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left[2 \cdot \left(2 - (-10) \right) + 10 \right] - 100 \right\} + 100 = 2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left[2 \cdot \left(2 - (-10) \right) + 10 \right] - 100 \right\} + 100 =$$
$$= 2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left[2 \cdot (2 + 10) + 10 \right] - 100 \right\} + 100 = 2 \cdot \{ 2 \cdot [2 \cdot 12 + 10] - 100 \} + 100 =$$
$$= 2 \cdot \{ 2 \cdot [24 + 10] - 100 \} + 100 = 2 \cdot \{ 2 \cdot 34 - 100 \} + 100 = 2 \cdot \{ 68 - 100 \} + 100 =$$
$$= 2 \cdot \{ -32 \} + 100 = -64 + 100 = 36.$$

Vježba 005

Izračunaj:

$$2 \cdot \left\{ 2 \cdot \left[2 \cdot \left(2 - (-5) \right) + 3 \right] - 10 \right\} + 10.$$

Rezultat: 82.

Zadatak 006 (Nikolina, prehrambena škola)

Izračunaj:

$$3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot \left[8 \cdot (19 \cdot 21 - 36 \cdot 11) - 23 \right] \right\}.$$

Rješenje 006

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Kada se u zadatku pojave zagrade, najprije računamo u okrugloj zagradi, zatim u uglatoj zagradi i tek na kraju u vitičastoj zagradi.

$3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot \left[8 \cdot (19 \cdot 21 - 36 \cdot 11) - 23 \right] \right\} =$ [prvo u okrugloj zagradi množimo] =

$= 3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot \left[8 \cdot (399 - 396) - 23 \right] \right\} =$ [zatim u okrugloj zagradi oduzimamo] =

$= 3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot \left[8 \cdot 3 - 23 \right] \right\} =$ [sada prvo množimo u uglatoj zagradi] =

$= 3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot \left[24 - 23 \right] \right\} = 3 + 2 \cdot \left\{ 3 \cdot 1 \right\} = 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9.$

Vježba 006

Izračunaj:

$$7 \cdot \left[(42 \cdot 7 - 14) \cdot 2 - 5 \cdot (105 - 3 \cdot 25) \right].$$

Rezultat: 2 870.

Zadatak 007 (Nina, gimnazija)

U kojem brojevnom sustavu vrijedi jednakost:

$$101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}.$$

Rješenje 007

Svaki broj napišimo pomoću potencija broja x pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}_{(x)} + \overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1}_{(x)} = \overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{1}\overset{0}{0}_{(x)}.$$

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0,$$

$$x^2 + 0 + x^0 + x^3 + 0 + 0 + x^0 = x^3 + x^2 + x^1 + 0,$$

$$x^2 + 1 + x^3 + 1 = x^3 + x^2 + x^1,$$

[poništimo slijeve i desne strane potencije x^3 i x^2].

$$2 = x \quad => \quad x = 2.$$

Baza je broj 2, dakle, riječ je o binarnom sustavu.

Vježba 007

U kojem brojevnom sustavu vrijedi jednakost:

$$1120_{(x)} + 21_{(x)} = 1211_{(x)}.$$

Rezultat: x = 3, to je sustav s bazom 3.

Zadatak 008 (Nina, gimnazija)

Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

Rješenje 008

1.inačica

Zbog jednostavnosti pretvorimo zadani račun u dekadski sustav. Tri uzastopna broja možemo zapisati na razne načine:

x	x + 1	x + 2
x – 1	x	x + 1
x – 2	x – 1	x
...	...	...

Najelegantnije je računati s x – 1, x, x + 1.

Zato pišemo:

$$x - 1 + x + x + 1 = 121_{(5)}.$$

$$x-1+x+x+1=\overset{2}{1}\overset{1}{2}\overset{0}{1}_{(5)} \Rightarrow 3x = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 \Rightarrow 3x = 25+10+1 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 12.$$

Dakle, tri tražena broja u dekadskom sustavu su 11, 12 i 13. Zapišimo ih u sustavu s bazom 5.

$$\left.\begin{aligned} &11:5=2\\ &1\\ &2:5=0\\ &2\uparrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow 11 = 21_{(5)} \qquad \left.\begin{aligned} &12:5=2\\ &2\\ &2:5=0\\ &2\uparrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12 = 22_{(5)} \qquad \left.\begin{aligned} &13:5=2\\ &3\\ &2:5=0\\ &2\uparrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow 13 = 23_{(5)}$$

To su brojevi $21_{(5)}$, $22_{(5)}$, $23_{(5)}$.

2.inačica

Budući da je rezultat troznamenkasti broj $121_{(5)}$ pretpostavljamo da su brojevi dvoznamenkasti:

$$ab_{(5)} - 1,\ ab_{(5)},\ ab_{(5)} + 1.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$ab_{(5)} - 1 + ab_{(5)} + ab_{(5)} + 1 = 121_{(5)},$$

$$3ab_{(5)} = 121_{(5)}.$$

Sada račun prebacimo u dekadski sustav:

$$3\cdot \overset{1}{a}\overset{0}{b}(5) = \overset{2}{1}\,\overset{1}{2}\,\overset{0}{1}(5) \Rightarrow 3\cdot\left(a\cdot 5^1 + b\cdot 5^0\right) = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 \Rightarrow 3\cdot(5a+b) = 25+10+1 \Rightarrow$$

$$3\cdot(5a+b) = 36\ /:3 \Rightarrow 5a+b = 12.$$

Očito je da mora bit a = 2 i b = 2.

Brojevi su:

$$ab_{(5)} - 1,\ ab_{(5)},\ ab_{(5)} + 1,$$

$$22_{(5)} - 1,\ 22_{(5)},\ 22_{(5)} + 1,$$

$$21_{(5)},\ 22_{(5)},\ 23_{(5)}.$$

Vježba 008

Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 33. Koji su to brojevi?

Rezultat: $10_{(5)},\ 11_{(5)},\ 12_{(5)}.$

Zadatak 009 (Nikolina, prehrambena škola)

Izračunaj:

$$\frac{25}{7}\%\ \text{ od } \frac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25}.$$

Rješenje 009

U postotnom računu postoje tri veličine: P – postotni iznos, p – postotak i C – osnovna vrijednost. Ovdje su zadane sljedeće veličine:

$$p = \frac{25}{7} \text{ i } C = \frac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25}.$$

Treba odrediti postotni iznos P. Najprije računamo C tako da decimalne brojeve pretvorimo u razlomke i riješimo dvojni razlomak:

$$C = \frac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25} = \frac{\frac{7}{24}:\frac{125}{1000}+\frac{35}{10}}{\frac{2}{3}-\frac{25}{100}} = [\text{razlomke skratimo}] = \frac{\frac{7}{24}:\frac{1}{8}+\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{24}\cdot\frac{8}{1}+\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1}+\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{14+21}{6}}{\frac{8-3}{12}} = \frac{\frac{35}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{35\cdot 12}{6\cdot 5} = \frac{7\cdot 2}{1\cdot 1} = 14.$$

Sada je

$p = \frac{25}{7}$, C = 14, P = ?

$$100\cdot P = C\cdot p \ \Rightarrow\ P = \frac{C\cdot p}{100} = \frac{14\cdot\frac{25}{7}}{100} = \frac{2\cdot 25}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Vježba 009

Izračunaj:

$$16\% \text{ od } \frac{3+\frac{4}{25}+0.59}{\left(\frac{3}{4}-0.15\right):4}.$$

Rezultat: 4.

Zadatak 010 (Nina, gimnazija)

Odredi brojeve a, b i c iz jednakosti:

$$abc_{(5)} = cba_{(8)}.$$

Rješenje 010

Budući da je najmanja baza 5, brojevi a, b i c mogu samo biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Također a i c ne mogu biti jednaki nuli jer su na početku brojeva.
Sada pišemo:

$$\overset{2}{a}\overset{1}{b}\overset{0}{c}_{(5)} = \overset{2}{c}\overset{1}{b}\overset{0}{a}_{(8)},$$

$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = c \cdot 8^2 + b \cdot 8^1 + a \cdot 8^0,$$

$$25a + 5b + c = 64c + 8b + a \;\Rightarrow\; 25a - a = 64c + 8b - 5b - c \;\Rightarrow\; 24a = 63c + 3b \;\; / : 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 8a = 21c + b.$$

Probom dobijemo rezultat: $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$.

Vježba 010

Odredi brojeve a i b iz jednakosti:

$$aba_{(4)} = bab_{(6)}.$$

Rezultat: $a = 3$, $b = 1$.

Zadatak 011 (Marija, gimnazija)

U nekom razredu bilo je 200 učenika i to 33 dječaka i 101 djevojčica. Kako je to moguće?

Rješenje 011

Marija sve je moguće, ali ne u dekadskom sustavu, tj. u sustavu s bazom 10, nego u sustavu s nekom drugom bazom.
Baza mora biti prirodan broj veći od 1. Označimo bazu slovom x. Tada zadatak možemo ovako zapisati:

$$200_{(x)} = 33_{(x)} + 101_{(x)}.$$

Svaki broj napišimo pomoću potencija broja x pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$\overset{2}{2}\overset{1}{0}\overset{0}{0}(x) = \overset{1}{3}\overset{0}{3}(x) + \overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}(x)$$

$$2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = 3 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0,$$

[Pamti! $x^0 = 1$]

$$2x^2 + 0 + 0 = 3x + 3 + x^2 + 0 + 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 3x + 3 + x^2 + 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Kvadratnu jednadžbu možemo riješiti pomoću Vièteove formule ili pomoću izraza

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bit će:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{8}{2} = 4, \;\; x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \,(\text{nema smisla}).$$

Dakle, zadatak ima smisla u brojevnom sustavi s bazom 4.

Uvjerimo se tako da zadatak napišemo u dekadskom sustavu.

Broj $200_{(4)}$ prevedemo u dekadski broj:

$$200_{(4)} = \overset{2}{2}\overset{1}{0}\overset{0}{0}(4) = 2\cdot 4^{2} + 0\cdot 4^{1} + 0\cdot 4^{0} = 2\cdot 16 + 0 + 0 = 32.$$

Broj $33_{(4)}$ također napišemo u dekadskom zapisu:

$$33_{(4)} = \overset{1}{3}\overset{0}{3}(4) = 3\cdot 4^{1} + 3\cdot 4^{0} = 12 + 3 = 15.$$

Broj $101_{(4)}$ isto transformiramo u broj s bazom 10:

$$101_{(4)} = \overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1}(4) = 1\cdot 4^{2} + 0\cdot 4^{1} + 1\cdot 4^{0} = 1\cdot 16 + 1 = 17.$$

U razredu je bilo 32 učenika i to 15 dječaka i 17 djevojčica (a među njima je i Marija...haha).

Vježba 011

U kojem brojevnom sustavu vrijedi jednakost: $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$?

Rezultat: $x = 2.$

Zadatak 012 (Ivan, gimnazija)

Dokažite matematičkom indukcijom $9 \mid 4^{n} + 15n - 1$, za sve prirodne brojeve.

Rješenje 012

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika $n + 1$.

U zadatku treba dokazati da je broj 9 djelitelj zadanog izraza $4^{n} + 15n - 1$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) s $f(n) = 4^{n} + 15n - 1$.

Zapamti!

Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi $a = c \cdot b$. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije

$n = 1$

$$f(1) = 4^{1} + 15\cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18 = \mathbf{9}\cdot 2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 9. Tada pišemo:

$$f(n) = 4^{n} + 15n - 1 = \mathbf{9}\cdot N. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj N je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 9.

$n + 1$

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika $n + 1$:

$$f(n+1) = 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4\cdot 4^{n} + \mathbf{15n} + 15 \mathbf{- 1} = 4\cdot 4^{n} + \mathbf{4\cdot 15n - 3\cdot 15n} + 15 \mathbf{- 4 + 3} =$$

$$= 4\cdot 4^{n} + 4\cdot 15n - 4 + 15 + 3 - 3\cdot 15n = 4\cdot 4^{n} + 4\cdot 15n - 4 + 18 - 45n =$$

$$= 4\cdot (4^{n} + 15n - 1) + 18 - 45n = [\text{koristimo induktivnu pretpostavku}] = 4\cdot f(n) + 18 - 45n =$$

$$= 4\cdot \mathbf{9}\cdot N + 9\cdot (2 - 5n) = \mathbf{9}\cdot (4N + 2 - 5n).$$

Dobili smo na kraju faktor 9 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 012

Dokažite matematičkom indukcijom $2 \mid 4^n$, za sve prirodne brojeve.

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 013 (Đurđica, Andrijana, Minela i Jelena, hotelijerska škola)

Zapiši broj 341 000 u standardnom obliku.

Rješenje 013

Za standardni oblik još ćete u literaturi naći izraze: standardni zapis, znanstvena notacija, E-notacija itd.

Vrlo velike i vrlo male brojeve često je spretno izraziti pomoću potencije od 10. Pritom se broj ispred potencije piše kao decimalni broj s jednim cijelim mjestom.

Tako ćemo, na primjer, broj 270 000 zapisati kao $2.7 \cdot 10^5$,

a ne $27 \cdot 10^4$ ili $270 \cdot 10^3$ ili $0.27 \cdot 10^6$.

Zapamti!

Broj se može zapisati kao decimalni broj s jednim cijelim mjestom puta potencija s bazom deset.

Ponovimo kako decimalni broj množimo dekadskim jedinicama
(10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ...).

- Decimalni broj množimo brojem 10 tako da decimalnu točku pomaknemo za jedno mjesto udesno (naprijed)

$$5.628 \cdot 10 = 5.\underline{6}28 \cdot 10 = 56.28$$

$$3.41 \cdot 10 = 3.\underline{4}1 \cdot 10 = 34.1$$

$$4.7 \cdot 10 = 4.\underline{7} \cdot 10 = 47$$

$$28.5 \cdot 10 = 28.\underline{5} \cdot 10 = 285$$

$$0.3 \cdot 10 = 0.\underline{3} \cdot 10 = 3$$

$$0.074 \cdot 10 = 0.\underline{0}74 \cdot 10 = 0.74$$

$$0.00069 \cdot 10 = 0.\underline{0}0069 \cdot 10 = 0.0069$$

$$0.101 \cdot 10 = 0.\underline{1}01 \cdot 10 = 1.01$$

- Decimalni broj množimo brojem 100 tako da decimalnu točku pomaknemo za dva mjesta udesno (naprijed)

$$3.628 \cdot 100 = 3.\underline{6}\,\underline{2}8 \cdot 100 = 362.8$$

$$81.54 \cdot 100 = 81.\underline{5}\,\underline{4} \cdot 100 = 8154$$

$$0.7 \cdot 100 = 0.\underline{7}\,\underline{0} \cdot 100 = 70$$

$$0.58 \cdot 100 = 0.\underline{5}\,\underline{8} \cdot 100 = 58$$

$$0.104 \cdot 100 = 0.\underline{1}\,\underline{0}4 \cdot 100 = 10.4$$

$$384.004 \cdot 100 = 384.\underline{0}\,\underline{0}4 \cdot 100 = 38400.4$$

$$0.01 \cdot 100 = 0.\underline{0}\,\underline{1} \cdot 100 = 1$$

$$0.0001 \cdot 100 = 0.\underline{0}\,\underline{0}01 = 0.01$$

- Decimalni broj množimo brojem 1 000 tako da decimalnu točku pomaknemo za tri mjesta udesno (naprijed)

$$4.3686 \cdot 1000 = 4.\underline{368}6 \cdot 1000 = 4368.6$$

$$24.156 \cdot 1000 = 24.\underline{156} \cdot 1000 = 24156$$

$$8.34 \cdot 1000 = 8.\underline{340} \cdot 1000 = 8340$$

$$91.8 \cdot 1000 = 91.\underline{800} \cdot 1000 = 91800$$

$$0.2 \cdot 1000 = 0.\underline{200} \cdot 1000 = 200$$

$$0.08 \cdot 1000 = 0.\underline{080} \cdot 1000 = 80$$

$$0.0056 \cdot 1000 = 0.\underline{005}6 \cdot 1000 = 5.6$$

$$0.000084 \cdot 1000 = 0.\underline{000}084 \cdot 1000 = 0.084$$

UKRATKO!

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom tako da se decimalna točka pomakne za toliko mjesta udesno (naprijed) koliko dekadska jedinica ima nula.

Napišimo potencije dekadskih jedinica:

Dekadska jedinica	Potencija
10	10^1
100	10^2
1 000	10^3
10 000	10^4
100 000	10^5
1 000 000 ...	10^6 ...

Sada se svaki broj može lako zapisati u standardnom obliku. Na primjer:

$1500\,000 = 1.5 \cdot 100\,000 = 1.5 \cdot 10^5$,
$234\,000 = 2.34 \cdot 100\,000 = 2.34 \cdot 10^5$,
$84\,000 = 8.4 \cdot 10\,000 = 8.\,4 \cdot 10^4$,
$532 = 5.32 \cdot 100 = 5.32 \cdot 10^2$,
$87 = 8.7 \cdot 10 = 8.7 \cdot 10^1$,
$3\,000 = 3 \cdot 1000 = 3 \cdot 10^3$,
$84\,000\,000\,000 = 8.4 \cdot 10\,000\,000\,000 = 8.4 \cdot 10^{10}$.
Broj koji je zadan u zadatku zapisujemo ovako: $341\,000 = 3.41 \cdot 10^5$.

Vježba 013

Zapiši broj 101 000 u standardnom obliku.

Rezultat: $1.01 \cdot 10^4$.

Zadatak 014 (Sanja, Roberta, Sabina i Stipo, hotelijerska škola)

Zapiši broj 0.00000000845 u standardnom obliku.

Rješenje 014

Za standardni oblik još ćete u literaturi naći izraze: standardni zapis, znanstvena notacija, E-notacija itd.

Vrlo velike i vrlo male brojeve često je spretno izraziti pomoću potencije od 10. Pritom se broj ispred potencije piše kao decimalni broj s jednim cijelim mjestom.

Tako ćemo, na primjer, decimalni broj 0.000076 zapisati kao $7.6 \cdot 10^{-5}$, a ne $76 \cdot 10^{-6}$ ili $0.76 \cdot 10^{-4}$ ili $0.076 \cdot 10^{-3}$.

Zapamti!

Broj se može zapisati kao decimalni broj s jednim cijelim mjestom puta potencija s bazom deset.

Ponovimo kako decimalni broj dijelimo dekadskim jedinicama:
(10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, ...).

- Decimalni broj dijelimo brojem 10 tako da decimalnu točku pomaknemo za jedno mjesto ulijevo (unatrag)

$4143.8 : 10 = 414\underline{3}.8 : 10 = 414.38.28$

$368.56 : 10 = 36\underline{8}.56 : 10 = 36.856$

$49.8 : 10 = 4\underline{9}.8 : 10 = 4.98$

$7.36 : 10 = \underline{7}.36 : 10 = 0.736$

$0.8 : 10 = \underline{0}.8 : 10 = 0.08$

$0.56 : 10 = \underline{0}.56 : 10 = 0.056$

$0.032 : 10 = \underline{0}.0328 : 10 = 0.0032$

$306 : 10 = 30\underline{6} : 10 = 30.6$

$54 : 10 = 5\underline{4} : 10 = 5.4$

$8 : 10 = \underline{8} : 10 = 0.8$

- Decimalni broj dijelimo brojem 100 tako da decimalnu točku pomaknemo za dva mjesta ulijevo (unatrag)

$8364.4 : 100 = 83\underline{6}\,\underline{9}.8 : 100 = 83.644$

$503.8 : 100 = 5\underline{0}\,\underline{3}.8 = 5.038$

$46.32 : 100 = \underline{4}\,\underline{6}.32 : 100 = 0.4632$

$8.9 : 100 = \underline{0}\,\underline{8}.9 : 100 = 0.089$

$0.3 : 100 = \underline{0}\,\underline{0}.3 : 100 = 0.003$

$0.0574 : 100 = \underline{0}\,\underline{0}.057 : 100 = 0.00057$

$9 : 100 = \underline{0}\,\underline{9} : 100 = 0.09$

$48 : 100 = \underline{4}\,\underline{8} : 100 = 0.48$

- Decimalni broj dijelimo brojem 1 000 tako da decimalnu točku pomaknemo za tri mjesta ulijevo (unatrag)

$4368.7 : 1000 = 4\underline{3}\,\underline{6}\,\underline{8}.7 : 1000 = 4.3687$

$805.3 : 1000 = \underline{8}\,\underline{0}\,\underline{5}.3 : 1000 = 0.8053$

$46.43 : 1000 = \underline{0}\,\underline{4}\,\underline{6}.43 : 1000 = 0.04643$

$7.8 : 1000 = \underline{0}\,\underline{0}\,\underline{7}.8 : 1000 = 0.0078$

$0.32 : 1000 = \underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}.32 : 1000 = 0.00032$

$0.05 : 1000 = \underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}.05 : 1000 = 0.00005$

$89 : 1000 = \underline{0}\,\underline{8}\,\underline{9} : 1000 = 0.089$

$561:1000 = \underline{5}\,\underline{6}\,\underline{1}:1000 = 0.561$

UKRATKO!

Decimalni broj dijelimo dekadskom jedinicom tako da se decimalna točka pomakne za toliko mjesta ulijevo (unatrag) koliko dekadska jedinica ima nula.

Napišimo potencije dekadskih jedinica kada s njima dijelimo:

$$1:10 = 0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$1:100 = 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$1:1000 = 0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$1:10000 = 0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

$$1:100000 = 0.00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$$

$$1:1000000 = 0.000001 = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

$$\ldots$$

Sada se svaki decimalni broj može zapisati u standardnom obliku. Na primjer:

$$0.0056 = 5.6:1000 = 5.6 \cdot \frac{1}{1000} = 5.6 \cdot 10^{-3}, \qquad 0.084 = 8.4:100 = 8.4 \cdot \frac{1}{100} = 8.4 \cdot 10^{-2},$$

$$0.000000096 = 9.6:100000000 = 9.6 \cdot \frac{1}{100000000} = 9.6 \cdot 10^{-8},$$

$$0.0003 = 3:10000 = 3 \cdot \frac{1}{10000} = 3 \cdot 10^{-4}, \qquad 0.0000103 = 1.03:100000 = 1.03 \cdot \frac{1}{100000} = 1.03 \cdot 10^{-5}.$$

Broj koji je zadan u zadatku zapisujemo ovako: $0.00000000845 = 8.45 \cdot 10^{-9}$.

Vježba 014

Zapiši broj 0.00000082 u standardnom obliku.

Rezultat: $8.2 \cdot 10^{-7}$.

Zadatak 015 (Ivana, Petra, hotelijerska škola)

Majka ima rođendan u nedjelju, a otac će imati rođendan 55 dana kasnije. U kojem danu će otac imati rođendan?

Rješenje 015

1.inačica (Petra Kupsjak)

Tjedan ima sedam dana.

$$55 \; dana = \overset{\text{NEDJELJA}}{7 \cdot 7 \; dana} + 6 \; dana \;\Rightarrow\; u \; subotu$$

2.inačica (Ivana Orač)

Tjedan ima sedam dana.

$$55 \; dana = \overset{\text{NEDJELJA}}{8 \cdot 7 \; dana} - 1 \; dan \;\Rightarrow\; u \; subotu$$

Vježba 015

Majka ima rođendan u nedjelju, a otac će imati rođendan 23 dana kasnije. U kojem danu će otac imati rođendan?

Rezultat: U utorak.

Zadatak 016 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako je prosjek od A, B i C jednak Z, izrazite prosjek od A i B pomoću C i Z.

Rješenje 016

Ponovino kako se definira aritmetička sredina za dva broja a i b:

$$\frac{a+b}{2}$$

i za tri broja a, b i c:

$$\frac{a+b+c}{3}.$$

Budući da je aritmetička sredina brojeva A, B i C jednaka Z, pišemo

$$\frac{A+B+C}{3}=Z.$$

Izračunamo zbroj A + B:

$$\frac{A+B+C}{3}=Z \ / \cdot 3 \ \Rightarrow \ A+B+C=3Z \ \Rightarrow \ A+B=3Z-C.$$

Tada je aritmetička sredina brojeva A i B jednaka:

$$\frac{A+B}{2}=\frac{3Z-C}{2}.$$

Vježba 016

Ako je prosjek od A, B, C i D jednak Z, izrazite prosjek od A, B i C pomoću D i Z.

Rezultat: $\frac{A+B+C}{3}=\frac{4Z-D}{3}.$

Zadatak 017 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko iznosi:

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{2^k}{k!}\ ?$$

Rješenje 017

Simbol za zbrajanje (sumaciju) je grčko slovo Σ (čitaj: sigma). Na primjer:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\sum_{i=1}^{5}a_i,$$

$$b_0+b_1+b_2+b_3=\sum_{j=0}^{3}b_j,$$

$$x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=\sum_{k=10}^{14}x_k,$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\sum_{n=3}^{7}a_n,$$

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ \dots\ + c_n = \sum_{i=0}^{n} c_i .$$

Tada je:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} = \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} = 5 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}.$$

Vježba 017

Koliko iznosi: $\sum_{k=0}^{3} \frac{k!}{2^k}$?

Rezultat: $\frac{11}{4}.$

Zadatak 018 (4A, hotelijerska škola)

Prikaži u dekadskoj bazi broj $1101101_{(2)}$.

Rješenje 018

1.inačica

U sustavu s bazom b prirodni broj N zapisujemo kao

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_{0\ (b)}$$

pri čemu brojevi a_i , i = 0, 1, 2, ..., n mogu poprimiti vrijednosti iz skupa {0, 1, 2, 3, ..., b – 1}.

Vrijednost prirodnog broja N zapisanog u sustavu s bazom b je

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_{0\ (b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0.$$

Zato računamo ovako:

$$N = 1101101_{(2)} = \overset{6}{1}\,\overset{5}{1}\,\overset{4}{0}\,\overset{3}{1}\,\overset{2}{1}\,\overset{1}{0}\,\overset{0}{1}(2) = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 =$$

$$= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109.$$

2.inačica

Cijeli postupak računanja ispišimo u obliku tablice:

	1	1	0	1	1	0	1
2	1	3	6	13	27	54	109

Svaki se broj u drugom redu dobije tako da se prethodni pomnoži s b = 2 i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak korak po korak.

	1	1	0	1	1	0	1	U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom, vrijednost baze b = 2.
2								
	1	1	0	1	1	0	1	Prepišimo vrijednost prve znamenke.
2	1							
	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: 2 · 1 + 1 = 3.
2	1	3						
	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: 2 · 3 + 0 = 6.
2	1	3	6					

	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $2 \cdot 6 + 1 = 13$.
2	1	3	6	13				
	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $2 \cdot 13 + 1 = 27$.
2	1	3	6	13	27			
	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $2 \cdot 27 + 0 = 54$.
2	1	3	6	13	27	54		
	1	1	0	1	1	0	1	Pomnožimo vrijednost baze b = 2 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $2 \cdot 54 + 1 = 109$.
2	1	3	6	13	27	54	109	

Dobili smo konačnu tablicu, N = 109. Ovaj se način računanja naziva **HORNEROV** algoritam.

Vježba 018

Prikaži u dekadskoj bazi broj $1101_{(2)}$.

Rezultat: 13.

Zadatak 019 (4A, hotelijerska škola)

Zapiši broj 27 u binarnom sustavu.

Rješenje 019

1.inačica

Binarni sustav, sustav s bazom 2, za zapisivanje brojeva koristi znamenke 0 i 1.

Broj 27 dijelimo bazom b = 2 i dobijemo količnik 13 i **ostatak 1**.

Broj 13 dijelimo bazom b = 2 i dobijemo količnik 6 i **ostatak 1**.

Broj 6 dijelimo bazom b = 2 i dobijemo količnik 3 i **ostatak 0**.

Broj 3 dijelimo bazom b = 2 i dobijemo količnik 1 i **ostatak 1**.

Broj 1 dijelimo bazom b = 2 i dobijemo količnik 0 i **ostatak 1**.

Postupak prekidamo jer smo dobili količnik 0. Dakle, postupak se prekida kad količnik postane nula.

Cijeli postupak možemo prikazati tablično:

27 : 2 = 13 1
13 : 2 = 6 1
6 : 2 = 3 0
3 : 2 = 1 1
1 : 2 = 0 1

Ostatke pri dijeljenju zapisujemo odozdo prema gore (u obratnom poretku). Dobili smo traženi rezultat: $27 = 11011_{(2)}$.

2.inačica

Cijeli postupak zapisujemo u obliku tablice kojoj su u prvom retku zapisani količnik pri dijeljenju s bazom b = 2, a u drugom ostatci.

27	13	6	3	1	0	kvocijent
1	**1**	**0**	**1**	**1**		ostatak

Ostatak pri dijeljenju s bazom b = 2 zapisujemo direktno ispod broja, a količnik desno od njega. Znamenke broja (rezultata) čitamo zdesna na lijevo (u obratnom poretku): $27 = 11011_{(2)}$.

Vježba 019

Zapiši broj 25 u binarnom sustavu.

Rezultat: $11001_{(2)}$.

Zadatak 020 (4A, hotelijerska škola)

Zapiši binarni broj $1101010011101_{(2)}$ u oktalnom sustavu.

Rješenje 020

Binarni sustav, sustav s bazom 2, za zapisivanje brojeva koristi znamenke 0 i 1.
Oktalni sustav, sustav s bazom 8, za zapisivanje brojeva koristi znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

Za zapis broja u oktalnom sustavu koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. U tablici je dan njihov binarni prikaz:

Oktalni prikaz broja	Binarni prikaz broja
0	**000**
1	**001**
2	**010**
3	**011**
4	**100**
5	**101**
6	**110**
7	**111**

Da bismo binarni broj preveli u oktalni "razdijelit" ćemo binarni broj u skupine od tri znamenke počevši s desna, i svakoj skupini pridružiti odgovarajuću oktalnu znamenku.

Tada je:

$$1101010011101_{(2)} = \underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{101}_{5}{}_{(2)} = 15235_{(8)}.$$

Vježba 020

Zapiši binarni broj $100111101_{(2)}$ u oktalnom sustavu.

Rezultat: $475_{(8)}$.