Zadatak 061 (Anita, gimnazija)

Zadane su točke A(2, 1) i B(26, 10). Na dužini $\overline{AB}$ zadana je točka C tako da je $\left|AC\right| : \left|CB\right| = 1 : 2.$ Koje su koordinate točke C?

Rješenje 061

Ponovimo!

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada vrijedi: $\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$.

Ako su $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x = b_x$ i $a_y = b_y$.

Ako je $a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j}$, onda je $a = c$ i $b = d$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ, λ ≠ 0, ako vrijedi

$$\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}.$$

Ako su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije različite točke ravnine i $\lambda \in R \setminus \{0, -1\}$, tada točka C koja dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ima koordinate

$$C\left(\frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}\right).$$

www.halapa.com

1.inačica

U našem primjeru točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru 1 : 2 ili $\frac{1}{2}$ pa vrijedi

$$\vec{AC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{CB}.$$

Odredimo vektore $\vec{AC}$ i $\vec{CB}$.

- $$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1) = A(2, 1) \\ C(x_2, y_2) = C(x, y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{AC} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{AC} = (x - 2) \cdot \vec{i} + (y - 1) \cdot \vec{j}$$
- $$\left.\begin{matrix} C(x_1, y_1) = C(x, y) \\ B(x_2, y_2) = B(26, 10) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{CB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{CB} = (26 - x) \cdot \vec{i} + (10 - y) \cdot \vec{j}.$$

Iz uvjeta

$$\vec{AC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{CB}$$

dobije se

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}\\ \overrightarrow{CB}=(26-x)\cdot\vec{i}+(10-y)\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CB}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}=\frac{1}{2}\cdot\left[(26-x)\cdot\vec{i}+(10-y)\cdot\vec{j}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}=\frac{1}{2}\cdot(26-x)\cdot\vec{i}+\frac{1}{2}\cdot(10-y)\cdot\vec{j}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{vektora}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-2=\frac{1}{2}\cdot(26-x)\\ y-1=\frac{1}{2}\cdot(10-y)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-2=\frac{1}{2}\cdot(26-x)\ /\cdot 2\\ y-1=\frac{1}{2}\cdot(10-y)\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x-4=26-x\\ 2\cdot y-2=10-y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x+x=26+4\\ 2\cdot y+y=10+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x=30\\ 3\cdot y=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x=30\ /:3\\ 3\cdot y=12\ /:3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10\\ y=4\end{array}\right\}.$$

Koordinate točke C su

$$C(x,\ y)=C(10,\ 4).$$

2.inačica

Budući da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru 1 : 2 ili $\frac{1}{2}$, računamo njezine koordinate.

<table>
<tr><td colspan="2">$A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 1)$, $B(x_2,\ y_2)=B(26,\ 10)$
$\lambda=\frac{1}{2}=0.5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C(x,\ y)$</td></tr>
<tr><td>$x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$
$x=\frac{2+0.5\cdot 26}{1+0.5}$
$x=\frac{2+13}{1.5}$
$x=\frac{15}{1.5}$
$x=10$</td><td>$y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$
$y=\frac{1+0.5\cdot 10}{1+0.5}$
$y=\frac{1+5}{1.5}$
$y=\frac{6}{1.5}$
$y=4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C(10,\ 4)$</td></tr>
</table>

3.inačica

Vektor $\overrightarrow{AB}$ podijelimo na 1 + 2 = 3 dijela i zbog

$$|AC|:|CB|=1:2$$

vrijedi

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

www.halapa.com

Odredimo vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB}$.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, 1) \\ C(x_2, y_2) = C(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC} = (x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x-2)\cdot \vec{i} + (y-1)\cdot \vec{j}$$
- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(26, 10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (26-2)\cdot \vec{i} + (10-1)\cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 24\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j}.$$

Iz uvjeta

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\cdot \overrightarrow{AB}$$

dobije se

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (x-2)\cdot \vec{i} + (y-1)\cdot \vec{j} \\ \overrightarrow{AB} = 24\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\cdot \overrightarrow{AB}\right] \Rightarrow (x-2)\cdot \vec{i} + (y-1)\cdot \vec{j} = \frac{1}{3}\cdot\left[24\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot \vec{i} + (y-1)\cdot \vec{j} = 8\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost} \\ \text{vektora}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=8 \\ y-1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=8+2 \\ y=3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=4 \end{array}\right\}.$$

Koordinate točke C su

$$C(x, y) = C(10, 4).$$

4.inačica

Vektor $\overrightarrow{AB}$ podijelimo na 1 + 2 = 3 dijela i zbog

$$|AC| : |CB| = 1 : 2$$

vrijedi

$$\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\cdot \overrightarrow{AB}.$$

Odredimo vektore $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{AB}$.

- $$\left.\begin{array}{l} C(x_1, y_1) = C(x, y) \\ B(x_2, y_2) = B(26, 10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{CB} = (x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (26-x)\cdot \vec{i} + (10-y)\cdot \vec{j}$$
- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(26, 10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (26-2)\cdot \vec{i} + (10-1)\cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 24\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j}.$$

Iz uvjeta

$$\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\cdot \overrightarrow{AB}$$

dobije se

www.halapa.com

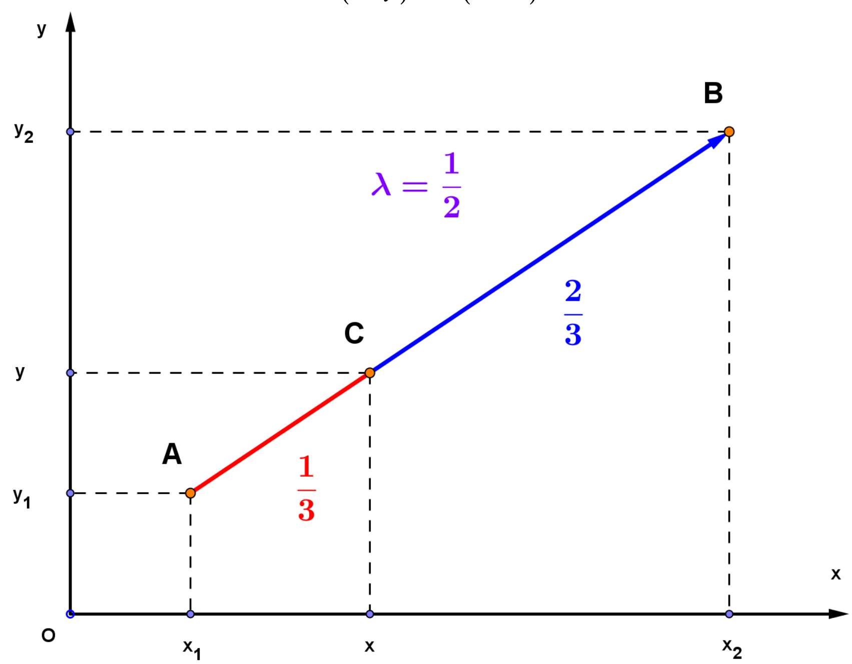
$$\left.\begin{array}{l}\vec{CB}=(26-x)\cdot\vec{i}+(10-y)\cdot\vec{j}\\ \vec{AB}=24\cdot\vec{i}+9\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{CB}=\frac{2}{3}\cdot\vec{AB}\right]\Rightarrow(26-x)\cdot\vec{i}+(10-y)\cdot\vec{j}=\frac{2}{3}\cdot\left[24\cdot\vec{i}+9\cdot\vec{j}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(26-x)\cdot\vec{i}+(10-y)\cdot\vec{j}=16\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{vektora}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}26-x=16\\ 10-y=6\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x=16-26\\ -y=6-10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x=-10\\ -y=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x=-10\ /\cdot(-1)\\ -y=-4\ /\cdot(-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10\\ y=4\end{array}\right\}.$$

Koordinate točke C su

$$C(x,\ y)=C(10,\ 4).$$



Vježba 061

Zadane su točke A(4, 2) i B(10, 20). Na dužini $\overline{AB}$ zadana je točka C tako da je $|AC|:|CB|=1:2$. Koje su koordinate točke C?

Rezultat: C(6, 8).

Zadatak 062 (Zvonimir, veleučilište)

Odredi parametar λ tako da vektori $\vec{a}=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$ budu međusobno okomiti.

Rješenje 062

Ponovimo!

Formula za skalarni produkt vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$ pomoću njihovih komponenata u pravokutnom koordinatnom sustavu (Kartezijevom koordinatnom sustavu) glasi:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Budući da vektori trebaju biti međusobno okomiti, skalarni produkt vektora mora biti jednak nuli.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \left(3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}\right) \circ \left(\lambda \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}\right) = 0 \Rightarrow \left[a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \lambda + 4 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \lambda - 8 - 6 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \lambda = 8 + 6 \Rightarrow 3 \cdot \lambda = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \lambda = 14 \;/ : 3 \Rightarrow \lambda = \frac{14}{3}.$$

Vježba 062

Odredi parametar λ tako da vektori $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$ i $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ budu međusobno okomiti.

Rezultat: $\lambda = 7.$

Zadatak 063 (Zvonimir, veleučilište)

Dokaži vektorski kosinusov poučak.

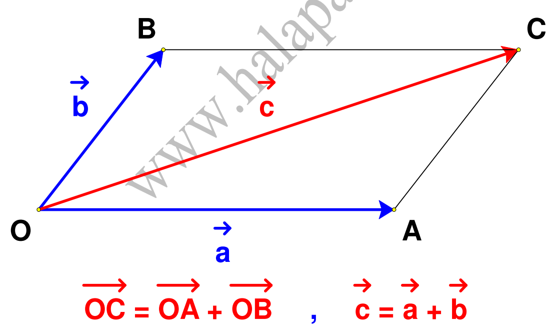
Rješenje 063

Ponovimo!

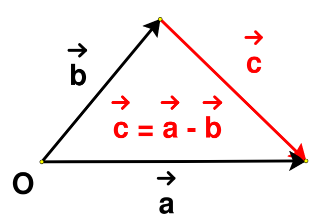
Vektor $\vec{AB}$ je usmjerena dužina $\overline{AB}$ kod koje razlikujemo početnu točku ili hvatište A i završnu točku ili kraj B.

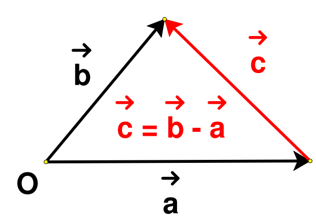
Zbroj dvaju vektora $\vec{OA} = \vec{a}$ i $\vec{OB} = \vec{b}$ s istim početkom O je vektor $\vec{OC} = \vec{c}$ takav da je dužina $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma OACB.

www.halapa.com



Dva se vektora oduzimaju tako da se dovedu u zajedničko hvatište O. Razlici odgovara vektor kome je početak u završetku drugog vektora, a završetak u završetku prvog vektora.





Duljina (iznos, norma) vektora $\vec{a} = \vec{OA}$ je udaljenost između njegove početne i završne točke, a označava se:

$$\left|\vec{a}\right| \quad , \quad \left|\vec{AB}\right|.$$

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar (broj) koji označavamo sa $\vec{a} \circ \vec{b}$ i definiramo ovako:

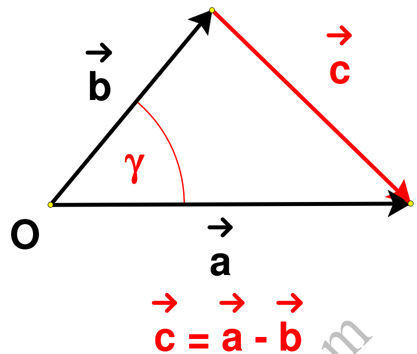
$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i uzimamo da je $0 \le \varphi \le \pi$.
Vrijedi:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0 \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot 1 \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2.$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} \quad , \quad \vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}.$$

Vektore stranica trokuta orijentiramo kao na slici i prikažemo vektor $\vec{c}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



www.halapa.com

Skalarnim kvadriranjem vektorske jednadžbe dobijemo:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \;/^2 \Rightarrow \vec{c} \circ \vec{c} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \circ \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c} \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{a} - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 - 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma + \left|\vec{b}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma.$$

Vježba 063

Dokaži vektorski Talesov poučak: obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 064 (Zvonimir, veleučilište)

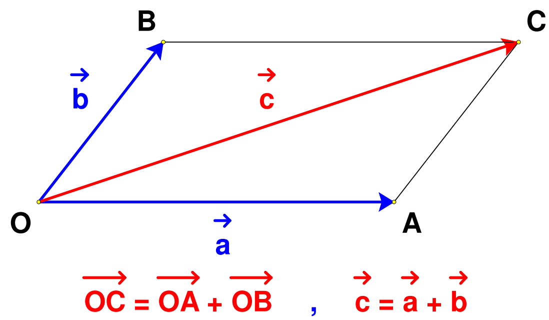
Dokaži vektorski Pitagorin poučak.

Rješenje 064

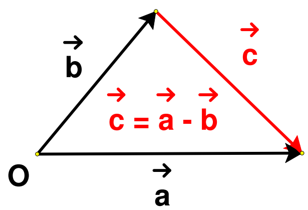
Ponovimo!

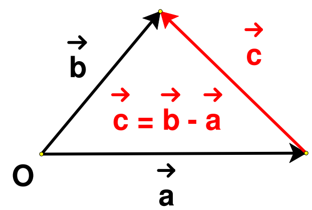
Vektor $\overrightarrow{AB}$ je usmjerena dužina $\overline{AB}$ kod koje razlikujemo početnu točku ili hvatište A i završnu točku ili kraj B.

Zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ s istim početkom O je vektor $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ takav da je dužina $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma OACB.



Dva se vektora oduzimaju tako da se dovedu u zajedničko hvatište O. Razlici odgovara vektor kome je početak u završetku drugog vektora, a završetak u završetku prvog vektora.





Duljina (iznos, norma) vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ je udaljenost između njegove početne i završne točke, a označava se:

$$\left|\vec{a}\right| \quad , \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

www.halapa.com

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar (broj) koji označavamo sa $\vec{a} \circ \vec{b}$ i definiramo ovako:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i uzimamo da je $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

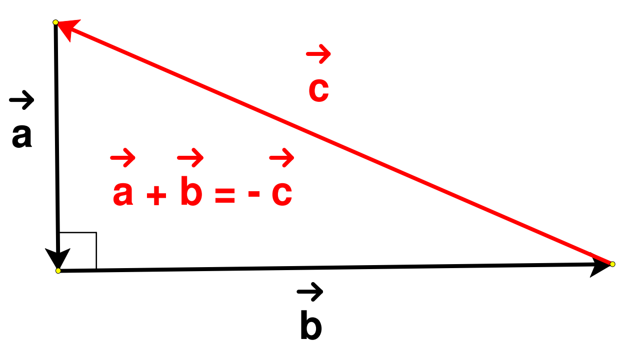
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Vrijedi:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0 \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot 1 \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2.$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a} \quad , \quad \vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}.$$

Vektore stranica pravokutnog trokuta orijentiramo kao na slici i prikažemo zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su međusobno okomiti pa vrijedi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Skalarnim kvadriranjem vektorske jednadžbe dobijemo:

$$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \; /^2 \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\vec{c} \circ \left(-\vec{c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b} = \vec{c} \circ \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{a} + 0 + 0 + \vec{b} \circ \vec{b} = \vec{c} \circ \vec{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2.$$

Vježba 064

Dokaži vektorski Talesov poučak: obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 065 (Pax, gimnazija)

Ako je vektor $\vec{a} = \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ okomit na vektore $\vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$, izračunaj koordinate y i z.

Rješenje 065

Ponovimo!

Skalarni umnožak vektora

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \end{array}\right\}$$

u Kartezijevu koordinatnom sustavu jednak je zbroju umnožaka odgovarajućih koordinata vektora.

www.halapa.com

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Budući da je vektor $\vec{a} = \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ okomit na vektore $\vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$, skalarni produkti $\vec{a} \circ \vec{b}$ i $\vec{a} \circ \vec{c}$ moraju biti jednaki nuli. Vrijedi:

- $$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ a_x = 1 \; , \; a_y = y \; , \; a_z = z \\ \vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k} \\ b_x = 1 \; , \; b_y = -2 \; , \; b_z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 + y \cdot (-2) + z \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cdot y + z = 0 \Rightarrow -2 \cdot y + z = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot y + z = -1 \ / \cdot (-1) \Rightarrow 2 \cdot y - z = 1.$$

- $$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ a_x = 1 \ , \ a_y = y \ , \ a_z = z \\ \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \\ c_x = -1 \ , \ c_y = 1 \ , \ c_z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a_x \cdot c_x + a_y \cdot c_y + a_z \cdot c_z = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (-1) + y \cdot 1 + z \cdot 2 = 0 \Rightarrow -1 + y + 2 \cdot z = 0 \Rightarrow y + 2 \cdot z = 1.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo y i z.

$$\left.\begin{array}{r} 2 \cdot y - z = 1 \\ y + 2 \cdot z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot y - z = 1 \ / \cdot 2 \\ y + 2 \cdot z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot y - 2 \cdot z = 2 \\ y + 2 \cdot z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot y = 3 \Rightarrow 5 \cdot y = 3 \ /: 5 \Rightarrow y = \frac{3}{5}.$$

Računamo z.

$$\left.\begin{array}{l} y + 2 \cdot z = 1 \\ y = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{5} + 2 \cdot z = 1 \Rightarrow \frac{3}{5} + 2 \cdot z = 1 \ / \cdot 5 \Rightarrow 3 + 10 \cdot z = 5 \Rightarrow 10 \cdot z = 5 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot z = 2 \Rightarrow 10 \cdot z = 2 \ /: 10 \Rightarrow z = \frac{2}{10} \Rightarrow z = \frac{2}{10} \Rightarrow z = \frac{1}{5}.$$

Vježba 065

Ako je vektor $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + \frac{1}{5} \cdot \vec{k}$ okomit na vektore $\vec{b} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$, izračunaj koordinate y i z.

www.halapa.com

Rezultat: $x = 1, \ y = \frac{3}{5}.$

Zadatak 066 (Paula, Nora, srednja škola ☺)

Odredi jedinični vektor istog smjera i iste orijentacije kao i vektor $\vec{AB}$, ako je A(3, 1), B(– 1, – 2).

Rješenje 066

Ponovimo!

$$\frac{a - b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Neka su A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) dvije točke ravnine. Tada vrijedi:

- vektor $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

- duljina vektora $\left|\vec{AB}\right|$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Jedinični vektor $\vec{e}$ vektora $\vec{AB}$ računa se po formuli

$$\vec{e} = \frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|} \Rightarrow \vec{e} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Jedinični vektor iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(-1, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{e} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \frac{(-1-3) \cdot \vec{i} + (-2-1) \cdot \vec{j}}{\sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2}} \Rightarrow \vec{e} = \frac{-4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} \Rightarrow \vec{e} = \frac{-4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \frac{-4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{\sqrt{25}} \Rightarrow \vec{e} = \frac{-4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{5} \Rightarrow \vec{e} = -\frac{4}{5} \cdot \vec{i} - \frac{3}{5} \cdot \vec{j}.$$

Vježba 066

Odredi jedinični vektor istog smjera i iste orijentacije kao i vektor $\vec{AB}$, ako je A(4, 2), B(0, – 1).

Rezultat: $\vec{e} = -\frac{4}{5} \cdot \vec{i} - \frac{3}{5} \cdot \vec{j}.$

Zadatak 067 (Paula, Nora, srednja škola ☺)

Odredi $\left|\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}\right|$ i $\left|3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}\right|$, ako je $\vec{a} = \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$ i $\vec{b} = 2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$.

www.halapa.com

Rješenje 067

Ponovimo!

Duljina vektora $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ definira se $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Računamo $\left|\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}\right|$.

$$\left|\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}\right| = \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = 2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} \end{array}\right] = \left|\vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \left(2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}\right)\right| = \left|\vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{i} + 15 \cdot \vec{j}\right| =$$

$$= \left|-5 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Računamo $\left|3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}\right|$.

$$\left|3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}\right| = \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = 2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} \end{array}\right] = \left|3 \cdot \left(\vec{i} - 3 \cdot \vec{j}\right) - 2 \cdot \left(2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}\right)\right| =$$

$$=\left|3\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{i}+10\cdot\vec{j}\right|=\left|-\vec{i}+\vec{j}\right|=\left|-1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Vježba 067

Odredi $\left|3\cdot\vec{b}-\vec{a}\right|$ i $\left|2\cdot\vec{b}-3\cdot\vec{a}\right|$, ako je $\vec{a}=\vec{i}-3\cdot\vec{j}$ i $\vec{b}=2\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}$.

Rezultat: 13 i $\sqrt{2}$.

Zadatak 068 (Paula, Nora, srednja škola ☺)

Zadani su vektori $\vec{a}=3\cdot\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}$, $\vec{c}=-\vec{i}+7\cdot\vec{j}$. Vektor $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ prikaži kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje 068

Ponovimo!

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori i α, β realni brojevi. Vektor $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ nazivamo linearnom kombinacijom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima α i β.

Ako su $\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}$, $\vec{b}=b_x\,\vec{i}+b_y\,\vec{j}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x=b_x$ i $a_y=b_y$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Odredimo vektor $\vec{v}$.

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\begin{bmatrix}\vec{a}=3\cdot\vec{i}-\vec{j}\\ \vec{b}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}\\ \vec{c}=-\vec{i}+7\cdot\vec{j}\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{v}=3\cdot\vec{i}-\vec{j}+\vec{i}-2\cdot\vec{j}-\vec{i}+7\cdot\vec{j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{v}=3\cdot\vec{i}-\vec{j}+\vec{i}-2\cdot\vec{j}-\vec{i}+7\cdot\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}.$$

Prikažimo vektor $\vec{v}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\vec{v}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Rightarrow\begin{bmatrix}\vec{v}=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}\\ \vec{a}=3\cdot\vec{i}-\vec{j}\\ \vec{b}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}\end{bmatrix}\Rightarrow 3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}=\alpha\cdot\left(3\cdot\vec{i}-\vec{j}\right)+\beta\cdot\left(\vec{i}-2\cdot\vec{j}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}=3\cdot\alpha\cdot\vec{i}-\alpha\cdot\vec{j}\,\alpha\cdot+\beta\cdot\vec{i}-2\cdot\beta\cdot\vec{j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}=(3\cdot\alpha+\beta)\cdot\vec{i}+(-\alpha-2\cdot\beta)\cdot\vec{j}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{vektora}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}3=3\cdot\alpha+\beta\\ 4=-\alpha-2\cdot\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3\cdot\alpha+\beta=3\\ -\alpha-2\cdot\beta=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3\cdot\alpha+\beta=3\ /\cdot 2\\ -\alpha-2\cdot\beta=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}6\cdot\alpha+2\cdot\beta=6\\ -\alpha-2\cdot\beta=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5\cdot\alpha=10\Rightarrow 5\cdot\alpha=10\ /:5\Rightarrow\alpha=2.$$

www.halapa.com

Računamo β.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot\alpha+\beta=3 \\ \alpha=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 2+\beta=3 \Rightarrow 6+\beta=3 \Rightarrow \beta=3-6 \Rightarrow \beta=-3.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=2\ ,\ \beta=-3 \\ \vec{v}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}.$$

Vježba 068

Zadani su vektori $\vec{a}=3\cdot\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}$. Vektor $\vec{v}=8\cdot\vec{i}-6\cdot\vec{j}$ prikaži kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rezultat: $\vec{v}=2\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}.$

Zadatak 069 (Tihomir, gimnazija)

Odredi parametar n tako da iznosi (duljine) vektora $\vec{a}=2\cdot e^{n}\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}+(n-1)\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=(n+1)\cdot\vec{i}+(n-2)\cdot\vec{j}$ budu jednaki.

Rješenje 069

Ponovimo!

Duljina vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ definira se $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^0=1\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=2\cdot e^{n}\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}+(n-1)\cdot\vec{k} \\ \vec{b}=(n+1)\cdot\vec{i}+(n-2)\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_x=2\cdot e^{n}\ ,\ a_y=n\ ,\ a_z=n-1 \\ b_x=n+1\ ,\ b_y=n-2\ ,\ b_z=0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(2\cdot e^{n}\right)^2+n^2+(n-1)^2} \\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{(n+1)^2+(n-2)^2+0^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right| \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(2\cdot e^{n}\right)^2+n^2+(n-1)^2}=\sqrt{(n+1)^2+(n-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(2\cdot e^{n}\right)^2+n^2+(n-1)^2}=\sqrt{(n+1)^2+(n-2)^2}\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(2\cdot e^{n}\right)^{2}+n^{2}+(n-1)^{2}}\right)^{2}=\left(\sqrt{(n+1)^{2}+(n-2)^{2}}\right)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot e^{n}\right)^{2}+n^{2}+(n-1)^{2}=(n+1)^{2}+(n-2)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}+n^{2}+n^{2}-2\cdot n+1=n^{2}+2\cdot n+1+n^{2}-4\cdot n+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}+n^{2}+n^{2}-2\cdot n+1=n^{2}+2\cdot n+1+n^{2}-4\cdot n+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}-2\cdot n=2\cdot n-4\cdot n+4 \Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}-2\cdot n=2\cdot n-4\cdot n+4 \Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot e^{2\cdot n}=4 \;/:4 \Rightarrow e^{2\cdot n}=1 \Rightarrow e^{2\cdot n}=e^{0} \Rightarrow 2\cdot n=0 \Rightarrow n=0.$$

Vježba 069

Odredi parametar n tako da iznosi vektora $\vec{a}=2\cdot e^{n}\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}+(n-1)\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=(n+1)\cdot\vec{i}+(n-2)\cdot\vec{k}$ budu jednaki.

Rezultat: n = 0.

Zadatak 070 (Toni, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a}=5\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=12\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}$. Koliki je iznos (modul) vektora $\vec{c}=2\cdot\vec{a}-\vec{b}$.

www.halapa.com

Rješenje 070

Ponovimo!

Duljina vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ definira se $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=5\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}\\ \vec{b}=12\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{c}=2\cdot\vec{a}-\vec{b}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c}=2\cdot\left(5\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}\right)-\left(12\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c}=10\cdot\vec{i}+16\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}-12\cdot\vec{i}+9\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k} \Rightarrow \vec{c}=-2\cdot\vec{i}+25\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}.$$

Računamo iznos (modul) vektora $\vec{c}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{c}=-2\cdot\vec{i}+25\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}\\ c_x=-2\ ,\ c_y=25\ ,\ c_z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}c_x=-2\ ,\ c_y=25\ ,\ c_z=2\\ \left|\vec{c}\right|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-2)^2+25^2+2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{c}\right|=\sqrt{4+625+4} \Rightarrow \left|\vec{c}\right|=\sqrt{633} \Rightarrow \left|\vec{c}\right|=25.16.$$

Vježba 070

Zadani su vektori $\vec{a}=5\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$ i $\vec{b}=12\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}$. Koliki je iznos (modul) vektora $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Rezultat: 18.41.

Zadatak 071 (Vox, gimnazija)

U vektorima $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + \beta \cdot \vec{k}$ i $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ odredite α i β tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.

Rješenje 071

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Za dva vektora dana sa svojim koordinatama

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \text{ i } \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$$

kažemo da su kolinearni ako je

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Za dvije promjenjive međusobno zavisne veličine x i y kažemo da su proporcionalne s koeficijentom razmjernosti k, k ≠ 0, ako je

$$\frac{y}{x} = k \text{ ili } y = k \cdot x.$$

Da bi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili kolinearni njihove koordinate moraju biti proporcionalne.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + \beta \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = \alpha \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{3}{-6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{3}{-6} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{-2}{\alpha} = \frac{-1}{2} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{-\alpha}{2} = \frac{-2}{1} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{-\alpha}{2} = \frac{-2}{1} \; / \cdot (-2) \\ \frac{\beta}{2} = \frac{-1}{2} \; / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 071

U vektorima $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + \beta \cdot \vec{k}$ i $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ odredite α i β tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.

Rezultat: $\alpha = 4, \beta = -1.$

Zadatak 072 (Vjekoslav, gimnazija)

Odredi jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao i vektor $\vec{AB}$, $A(3, 1)$, $B(-1, -2)$.

Rješenje 072

Ponovimo!

www.halapa.com

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki A(x_1, y_1) i završetkom u točki B(x_2, y_2) ima prikaz

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\cdot\overrightarrow{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\overrightarrow{j}$$

Duljina vektora $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\cdot\overrightarrow{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\overrightarrow{j}$ je

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Za vektor $\overrightarrow{a}$ kažemo da je jedinični vektor ili ort ako je njegova duljina

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=1.$$

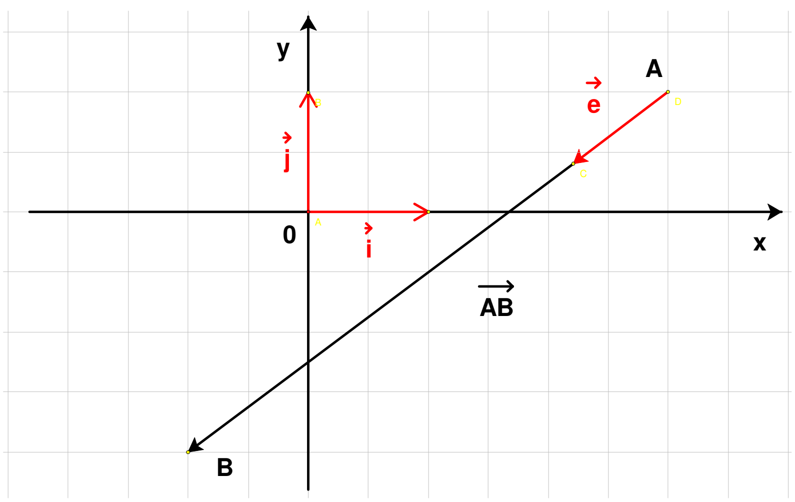
Podijelimo li bilo koji vektor $\overrightarrow{a}$ (različit od nulvektora) njegovom duljinom dobit ćemo jedinični vektor $\overrightarrow{a_0}\left(\text{ili }\overrightarrow{e}\right)$.

$$\overrightarrow{e}=\frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|}.$$

$$\left.\begin{array}{l}A\left(x_1,y_1\right)=A(3,1)\\ B\left(x_2,y_2\right)=B(-1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right]\Rightarrow\left[\overrightarrow{e}=\frac{\left(x_2-x_1\right)\cdot\overrightarrow{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\overrightarrow{j}}{\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{e}=\frac{(-1-3)\cdot\overrightarrow{i}+(-2-1)\cdot\overrightarrow{j}}{\sqrt{(-1-3)^2+(-2-1)^2}}\Rightarrow\overrightarrow{e}=\frac{-4\cdot\overrightarrow{i}-3\cdot\overrightarrow{j}}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}\Rightarrow\overrightarrow{e}=\frac{-4\cdot\overrightarrow{i}-3\cdot\overrightarrow{j}}{\sqrt{16+9}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{e}=\frac{-4\cdot\overrightarrow{i}-3\cdot\overrightarrow{j}}{\sqrt{25}}\Rightarrow\overrightarrow{e}=\frac{-4\cdot\overrightarrow{i}-3\cdot\overrightarrow{j}}{5}\Rightarrow\overrightarrow{e}=-\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{i}-\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{j}.$$



www.halapa.com

Vježba 072

Odredi jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao i vektor $\overrightarrow{AB},\ A(-1,-2),\ B(3,1)$.

Rezultat: $\overrightarrow{e}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{i}+\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{j}$.

Zadatak 073 (Dario, tehnička škola)

Iznos vektora pomaka je 810 m. Sa pozitivnim smjerom x – osi zatvara kut od 18°. Odrediti skalarne komponente vektora pomaka te dobiveni rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.

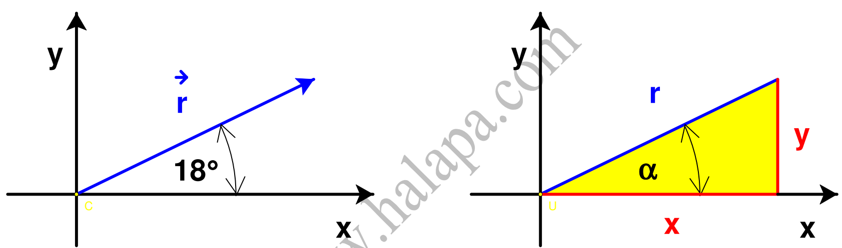
$A.\ x=710\ m,\ y=360\ m$ $\quad B.\ x=550\ m,\ y=570\ m$ $\quad C.\ x=580\ m,\ y=660\ m$

$D.\ x=250\ m,\ y=700\ m$ $\quad E.\ x=770\ m,\ y=250\ m$

Rješenje 073

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



www.halapa.com

Uočimo pravokutan trokut čija je hipotenuza r, a katete su x i y, skalarne komponente vektora pomaka. Pomoću funkcija kosinus i sinus dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{x}{r}\\ \sin\alpha=\frac{y}{r}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{r}=\cos\alpha\\ \frac{y}{r}=\sin\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{r}=\cos\alpha\ /\cdot r\\ \frac{y}{r}=\sin\alpha\ /\cdot r\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=r\cdot\cos\alpha\\ y=r\cdot\sin\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}r=810\ m\\ \alpha=18^\circ\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=810\ m\cdot\cos 18^\circ\\ y=810\ m\cdot\sin 18^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=770.36\ m\\ y=250.30\ m\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{najbliži}\\ \text{cijeli broj}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=770\ m\\ y=250\ m\end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod E.

Vježba 073

Iznos vektora pomaka je 810 m. Sa pozitivnim smjerom y – osi zatvara kut od 72°. Odrediti skalarne komponente vektora pomaka te dobiveni rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.

$A.\ x=710\ m,\ y=360\ m$ $\quad B.\ x=550\ m,\ y=570\ m$ $\quad C.\ x=580\ m,\ y=660\ m$

$D.\ x=250\ m,\ y=700\ m$ $\quad E.\ x=770\ m,\ y=250\ m$

Rezultat: E.

Zadatak 074 (Filip, tehnička škola)

Vektori $\vec{v} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$ i $\vec{w} = c\cdot\vec{i} + d\cdot\vec{j}$ okomiti su ako i samo ako je:

$$A.\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = -1 \qquad B.\ a\cdot c = b\cdot d \qquad C.\ \frac{a\cdot b}{c\cdot d} = -1 \qquad D.\ a\cdot d - b\cdot c = 0$$

Rješenje 074

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Formula za skalarni produkt vektora $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j}$ pomoću njihovih komponenata u pravokutnom koordinatnom sustavu (Kartezijevom koordinatnom sustavu) glasi:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y = 0.$$

Budući da vektori trebaju biti međusobno okomiti, skalarni produkt vektora mora biti jednak nuli.

$$\vec{v}\circ\vec{w} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j} \\ \vec{w} = c\cdot\vec{i} + d\cdot\vec{j} \end{bmatrix} \Rightarrow a\cdot c + b\cdot d = 0 \Rightarrow a\cdot c = -b\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot c = -b\cdot d \ /\cdot\frac{1}{b\cdot d} \Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot d} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = -1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 074

Vektori $\vec{v} = a\cdot\vec{i} - b\cdot\vec{j}$ i $\vec{w} = c\cdot\vec{i} - d\cdot\vec{j}$ okomiti su ako i samo ako je:

$$A.\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = -1 \qquad B.\ a\cdot c = b\cdot d \qquad C.\ \frac{a\cdot b}{c\cdot d} = -1 \qquad D.\ a\cdot d - b\cdot c = 0$$

Rezultat: A.

Zadatak 075 (Mirela, srednja škola)

Vektori $\vec{a} = 3\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j}$ i $\vec{b} = x\cdot\vec{i} + 9\cdot\vec{j}$ međusobno su okomiti. Koliko je puta duljina vektora $\vec{b}$ veća od duljine vektora $\vec{a}$?

$$A.\ 1.5\ puta \qquad B.\ 2\ puta \qquad C.\ 2.25\ puta \qquad D.\ 3\ puta$$

Rješenje 075

Ponovimo!

Formula za skalarni produkt vektora $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j}$ pomoću njihovih komponenata u pravokutnom koordinatnom sustavu (Kartezijevom koordinatnom sustavu) glasi:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y = 0.$$

Kako izračunati koliko je puta broj b veći od broja a?

www.halapa.com

$$\frac{b}{a} = ?$$

Duljina vektora $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ definira se $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Odredimo komponente vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = x \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_x = 3 \; , \; a_y = -4 \\ b_x = x \; , \; b_y = 9 \end{array}\right\}.$$

Budući da su vektori međusobno okomiti, vrijedi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0 \Rightarrow 3 \cdot x + (-4) \cdot 9 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 36 \Rightarrow 3 \cdot x = 36 \; /:3 \Rightarrow x = 12.$$

Vektor $\vec{b}$ glasi

$$\vec{b} = 12 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}.$$

Gledamo omjer:

$$\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \left[\begin{array}{l} b_x = 12 \; , \; b_y = 9 \\ a_x = 3 \; , \; a_y = -4 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{144 + 81}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 075

Vektori $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ i $\vec{b} = x \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}$ međusobno su okomiti. Koliko je puta duljina vektora $\vec{b}$ veća od duljine vektora $\vec{a}$?

$A.\ 1.5 \ puta \qquad B.\ 2 \ puta \qquad C.\ 2.25 \ puta \qquad D.\ 3 \ puta$

Rezultat: D.

Zadatak 076 (Ana, gimnazija)

Odredite vektor $\vec{b}$ ako je kolinearan s vektorom $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$, a $\left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5}$.

Rješenje 076

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Duljina vektora $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ definira se $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Za dva vektora dana sa svojim koordinatama

www.halapa.com

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \text{ i } \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$$

kažemo da su kolinearni ako postoji skalar k (realan broj) takav da vrijedi:

- $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$
- $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k.$

Za realan broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad , \quad |x| = a \ , \ a > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{array} \right\}.$$

1.inačica

Vektor $\vec{b}$ kolinearan je s vektorom $\vec{a}$, a to znači da je

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a},$$

pri čemu je k realan broj različit od nule. I nadalje, zahtjeva se

$$\left|\vec{b}\right| = \left|k \cdot \vec{a}\right| \Rightarrow \left|\vec{b}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5} \\ \vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j} \end{array} \right] \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{4+1} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{5} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{5} = |k| \cdot \sqrt{5} \ /: \sqrt{5} \Rightarrow 3 = |k| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |k| = 3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 3 \end{array} \right\}.$$

Odatle slijedi da postoje dva vektora.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{b}_1 = -3 \cdot \left(-2 \cdot \vec{i} + \vec{j}\right) \\ \vec{b}_2 = 3 \cdot \left(-2 \cdot \vec{i} + \vec{j}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{b}_1 = 6 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \\ \vec{b}_2 = -6 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \end{array} \right\}.$$

2.inačica

Neka je $\vec{b} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ i $\left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5}$. Tada je

$$\left. \begin{array}{l} \left|\vec{b}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \left|\vec{b}\right| = 3 \cdot \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \cdot \sqrt{5} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(3 \cdot \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \cdot 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 45.$$

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{a}$ kolinearni su pa vrijedi:

www.halapa.com

$$\left.\begin{array}{l}\vec{b}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}\\ \vec{a}=-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{-2}=k\\ \frac{y}{1}=k\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{-2}=k\ /\cdot(-2)\\ y=k\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2\cdot k\\ y=k\end{array}\right\}.$$

Riješimo jednadžbu po varijabli k.

$$x^2+y^2=45\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\cdot k\\ y=k\end{array}\right]\Rightarrow(-2\cdot k)^2+k^2=45\Rightarrow4\cdot k^2+k^2=45\Rightarrow5\cdot k^2=45\Rightarrow$$

$$\Rightarrow5\cdot k^2=45\ /:5\Rightarrow k^2=9\Rightarrow k^2=9\ /\sqrt{\ }\Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k_1=-3\\ k_2=3\end{array}\right\}.$$

Odatle slijedi da postoje dva vektora.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{b}_1=-3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\\ \vec{b}_2=3\cdot\left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{b}_1=6\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}\\ \vec{b}_2=-6\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}\end{array}\right\}.$$

Vježba 076

Nema vježbe, odmorite se!

Rezultat: ☺

Zadatak 077 (Ana, građevinska škola)

U točki A(2, 1, – 1) djeluje sila $\vec{r}$ iznosa $\left|\vec{r}\right|=7$. Ako imamo dvije komponente sile $r_x = 2$, $r_y = -3$ i $r_z > 0$, odredite krajnju točku B vektora $\vec{r}$ te bar jedan kut koji vektor $\vec{r}=\overrightarrow{AB}$ zatvara s koordinatnim osima. Koliko ima takvih kutova?

www.halapa.com

Rješenje 077

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Duljina vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ definira se $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Ako su dane točke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, onda su koordinate vektora koji ih spaja:

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\cdot\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\cdot\vec{k}.$$

Ako su $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $.a_z=b_z$.

Kutovi koje vektor $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ zatvara s koordinatnim osima x, y i z glase:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}\right)\quad,\quad\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}\Rightarrow\beta=\cos^{-1}\left(\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}\right)$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}\Rightarrow\gamma=\cos^{-1}\left(\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}\right).$$

Najprije nađemo treću koordinatu (komponentu) vektora $\vec{r}$, ako su zadane prve dvije i modul.

$$\vec{r}=r_x\cdot\vec{i}+r_y\cdot\vec{j}+r_z\cdot\vec{k}\Rightarrow\begin{bmatrix}r_x=2\\r_y=-3\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{r}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+r_z\cdot\vec{k}.$$

Iz uvjeta $\left|\vec{r}\right|=7$ slijedi:

$$\vec{r}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+r_z\cdot\vec{k}\Rightarrow\left|\vec{r}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+r_z^2}\Rightarrow\left[\left|\vec{r}\right|=7\right]\Rightarrow 7=\sqrt{4+9+r_z^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7=\sqrt{13+r_z^2}\Rightarrow\sqrt{13+r_z^2}=7\Rightarrow\sqrt{13+r_z^2}=7\ /^2\Rightarrow\left(\sqrt{13+r_z^2}\right)^2=7^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13+r_z^2=49\Rightarrow r_z^2=49-13\Rightarrow r_z^2=36\Rightarrow r_z^2=36\ /\sqrt{\ }\Rightarrow r_z=\pm\sqrt{36}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}r_z=-6\\r_z=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\r_z>0\end{bmatrix}\Rightarrow r_z=6.$$

Vektor glasi:

$$\vec{r}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}.$$

Odredimo vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{matrix}A(x_1,\ y_1,\ z_1)=A(2,\ 1,\ -1)\\B(x_2,\ y_2,\ z_2)=B(x,\ y,\ z)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}+(z-(-1))\cdot\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}+(z+1)\cdot\vec{k}.$$

Budući da je vektor $\vec{r}$ zadan točkama A i B, možemo napisati:

$$\vec{r}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow 2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}=(x-2)\cdot\vec{i}+(y-1)\cdot\vec{j}+(z+1)\cdot\vec{k}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{jednakost}\\\text{vektora}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}2=x-2\\-3=y-1\\6=z+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x-2=2\\y-1=-3\\z+1=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=2+2\\y=-3+1\\z=6-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=4\\y=-2\\z=5\end{matrix}\right\}.$$

Točka B ima koordinate:

$$B(x,\ y,\ z)=B(4,\ -2,\ 5).$$

Kut koji vektor $\vec{r}=\overrightarrow{AB}$ zatvara s koordinatnom osi x iznosi:

$$\cos\alpha=\frac{r_x}{\left|\vec{r}\right|}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{r_x}{\left|\vec{r}\right|}\right)\Rightarrow\begin{bmatrix}r_x=2\\\left|\vec{r}\right|=7\end{bmatrix}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\Rightarrow\alpha=73^\circ 23'5''.$$

Postoje tri kuta:

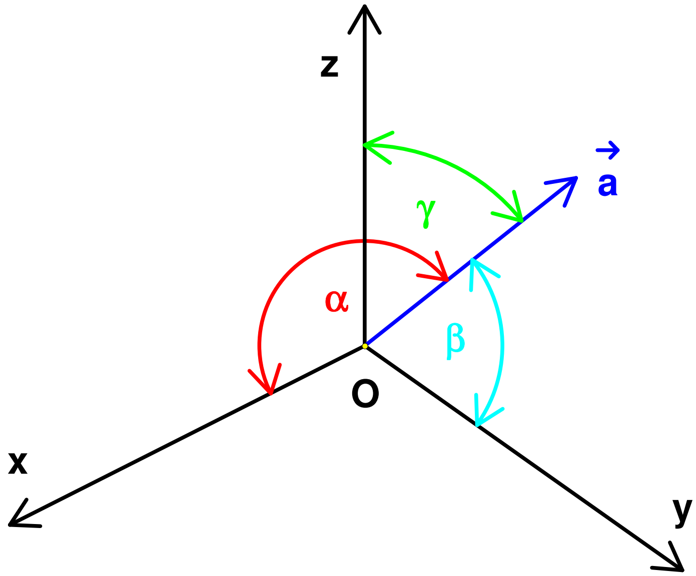
- α – kut koji vektor zatvara s osi x
- β – kut koji vektor zatvara s osi y

www.halapa.com

- γ – kut koji vektor zatvara s osi z.

Za njih vrijedi:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



Vježba 077

U točki A(2, 1, – 1) djeluje sila $\vec{r}$ iznosa $\left|\vec{r}\right| = 7.$ Ako imamo dvije komponente sile $r_x = 2$, $r_z = 6$ i $r_y < 0$, odredite krajnju točku B vektora $\vec{r}$.

Rezultat: $B(4, -2, 5).$

www.halapa.com

Zadatak 078 (Sara, srednja škola)

Odredite α tako da kut između vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ bude $\frac{\pi}{2}$ ako je $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = \alpha \cdot \vec{m} - \vec{n}$, $\left|\vec{m}\right| = 2$, $\left|\vec{n}\right| = 1$, $\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje 078

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha, \qquad \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot 1 = \left|\vec{a}\right|^2 \quad , \quad \vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}.$$

Okomitost vektora:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Kut između vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ mora biti $\frac{\pi}{2}$. To znači da su međusobno okomiti pa je njihov skalarni umnožak (produkt) jednak nuli.

$$\vec{p} \circ \vec{q} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{p} = \vec{m} + \vec{n} \\ \vec{q} = \alpha \cdot \vec{m} - \vec{n} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\vec{m} + \vec{n}\right) \circ \left(\alpha \cdot \vec{m} - \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \vec{m} \circ \vec{m} - \vec{m} \circ \vec{n} + \alpha \cdot \vec{n} \circ \vec{m} - \vec{n} \circ \vec{n} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \left|\vec{m}\right|^2 - \vec{m} \circ \vec{n} + \alpha \cdot \vec{m} \circ \vec{n} - \left|\vec{n}\right|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \left|\vec{m}\right|^2 + \alpha \cdot \vec{m} \circ \vec{n} - \vec{m} \circ \vec{n} - \left|\vec{n}\right|^2 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \left|\vec{m}\right|^2 + (\alpha - 1) \cdot \vec{m} \circ \vec{n} - \left|\vec{n}\right|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \left|\vec{m}\right|^2 + (\alpha - 1) \cdot \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) - \left|\vec{n}\right|^2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \left|\vec{m}\right| = 2 \;,\; \left|\vec{n}\right| = 1 \\ \angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot 2^2 + (\alpha - 1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 1^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \alpha + (\alpha - 1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \alpha + (\alpha - 1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \alpha + \alpha - 1 - 1 = 0 \Rightarrow 5 \cdot \alpha - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \alpha = 2 \Rightarrow 5 \cdot \alpha = 2 \;/:5 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5}.$$

www.halapa.com

Vježba 078

Odredite α tako da kut između vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ bude $\frac{\pi}{2}$ ako je $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{q} = \alpha \cdot \vec{m} - \vec{n}$, $\left|\vec{m}\right| = 4$, $\left|\vec{n}\right| = 1$, $\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Rezultat: $\alpha = \frac{1}{6}$.

Zadatak 079 (Sara, srednja škola)

Nađite vektor $\vec{c}$ koji je kolinearan s vektorom $\vec{a} + \vec{b}$ ako je $\vec{a} \circ \vec{b} = 5$, $\vec{c} \circ \vec{b} = 18$, $\left|\vec{b}\right| = 2$.

Rješenje 079

Ponovimo!

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha, \qquad \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot 1 = \left|\vec{a}\right|^2.$$

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}.$$

Kolinearnost vektora

Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su kolinearni ako postoji neki realni broj λ tako da vrijedi

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je vektor $\vec{c}$ kolinearan s vektorom $\vec{a} + \vec{b}$, mora vrijediti

$$\vec{c} = \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \lambda \in R.$$

Dalje slijedi:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{skalarno množimo} \\ \text{s vektorom } \vec{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) / \circ \vec{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c} \circ \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \circ \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c} \circ \vec{b} = \lambda \cdot \left(\vec{a} \circ \vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{c} \circ \vec{b} = 18 \\ \vec{a} \circ \vec{b} = 5 \\ \left|\vec{b}\right| = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 18 = \lambda \cdot \left(5 + 2^2\right) \Rightarrow 18 = \lambda \cdot (5 + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = 9 \cdot \lambda \Rightarrow 9 \cdot \lambda = 18 \Rightarrow 9 \cdot \lambda = 18 \, / : 9 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Vektor $\vec{c}$ glasi:

$$\vec{c} = 2 \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}.$$

www.halapa.com

Vježba 079

Nađite vektor $\vec{c}$ koji je kolinearan s vektorom $\vec{a} + \vec{b}$ ako je $\vec{a} \circ \vec{b} = 5$, $\vec{c} \circ \vec{b} = 27$, $\left|\vec{b}\right| = 2$.

Rezultat: $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}.$