

Zadatak 261 (Maja, gimnazija)

Odredite jednadžbu kružnice kojom je opisan trokut ABC ako je A(8, 1), B(0, 7), C(0, 1).

Rješenje 261

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad \left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a-c = b-d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.

Promjer ili dijametar kružnice dužina je koja spaja dvije točke kružnice i prolazi njezinim središtem. Duljina promjera označava se slovom d.

$$d = 2 \cdot r.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Koordinate polovišta P dužine \overline{AB} , A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Talesov poučak

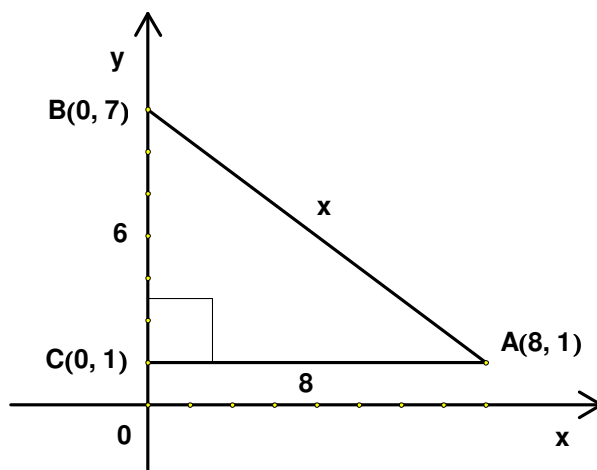
Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Opišemo li pravokutnom trokutu kružnicu njezin promjer je hipotenuza tog trokuta.

Udaljenost točaka A(x₁, y₁) i B(x₂, y₂):

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

1.inačica



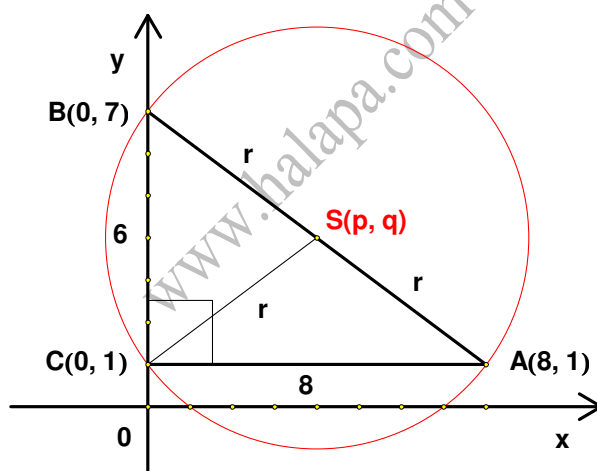
Sa slike vidi se:

$$|BC|=6 \quad , \quad |CA|=8 \quad , \quad |AB|=x.$$

Trokut ABC je pravokutan. Uporabom Pitagorina poučka izračunamo duljinu hipotenuze x.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 64 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 / \sqrt{\quad} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \sqrt{100} \Rightarrow x = 10.$$

Kružnica je opisana pravokutnom trokutu ABC. Njezin promjer je hipotenuza pravokutnog trokuta.



Polovište S hipotenuze je središte kružnice.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(8, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(0, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[S(p, q) = S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow S(p, q) = S\left(\frac{8+0}{2}, \frac{1+7}{2}\right) \Rightarrow S(p, q) = S\left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}\right) \Rightarrow S(p, q) = S\left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow S(p, q) = S(4, 4).$$

Za polumjer r vrijedi:

$$r = |SA| \quad , \quad r = |SB| \quad , \quad r = |SC|.$$

Uzet ćemo

$$r = |SC|.$$

$$\left. \begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(4, 4) \\ C(x_2, y_2) = C(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[r = |SC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(0-4)^2 + (1-4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{16+9} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\begin{aligned} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=4, q=4 \\ r=5 \end{array} \right] \Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25. \end{aligned}$$

2. inačica

Budući da točke A, B i C pripadaju kružnici, njihove koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(8, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(0, 7) \\ C(x_3, y_3) = C(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (8-p)^2 + (1-q)^2 = r^2 \\ (0-p)^2 + (7-q)^2 = r^2 \\ (0-p)^2 + (1-q)^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 64 - 16 \cdot p + p^2 + 1 - 2 \cdot q + q^2 = r^2 \\ p^2 + 49 - 14 \cdot q + q^2 = r^2 \\ p^2 + 1 - 2 \cdot q + q^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \end{array} \right\}.$$

Dobili smo sustav jednadžba.

Promatramo drugu i treću jednadžbu sustava.

$$\left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 - (p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1) = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 - p^2 - q^2 + 2 \cdot q - 1 = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 - p^2 - q^2 + 2 \cdot q - 1 = 0 \Rightarrow -14 \cdot q + 49 + 2 \cdot q - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 \cdot q + 2 \cdot q = -49 + 1 \Rightarrow -12 \cdot q = -48 \Rightarrow -12 \cdot q = -48 \quad /: (-12) \Rightarrow q = 4.$$

Sada promatramo prvu i treću jednadžbu sustava.

$$\left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[q = 4 \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p^2 + 4^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot 4 + 65 = r^2 \\ p^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} p^2 + 16 - 16 \cdot p - 8 + 65 = r^2 \\ p^2 + 16 - 8 + 1 = r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} p^2 - 16 \cdot p + 73 = r^2 \\ p^2 + 9 = r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow p^2 - 16 \cdot p + 73 - (p^2 + 9) = r^2 - r^2 \Rightarrow p^2 - 16 \cdot p + 73 - p^2 - 9 = r^2 - r^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow p^2 - 16 \cdot p + 73 - p^2 - 9 = 0 \Rightarrow -16 \cdot p + 73 - 9 = 0 \Rightarrow -16 \cdot p = -73 + 9 \Rightarrow -16 \cdot p - 64 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -16 \cdot p - 64 : (-16) \Rightarrow p = 4. \end{aligned}$$

Računamo r^2 .

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} p = 4, q = 4 \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = r^2 \Rightarrow 16 + 16 - 8 + 1 = r^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 25 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25. \end{aligned}$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 4, q = 4 \\ r^2 = 25 \end{array} \right] \Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Vježba 261

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 262 (Josip, maturant)

Točka $T(x, -3)$ u trećem kvadrantu jednako je udaljena od ishodišta kao i točka $P(7, 0)$. Koliki je x ?

Rješenje 262

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je $S(0, 0)$ središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

1. inačica

Primijetimo da je točka $O(0, 0)$ središte kružnice polumjera $r = 7$.

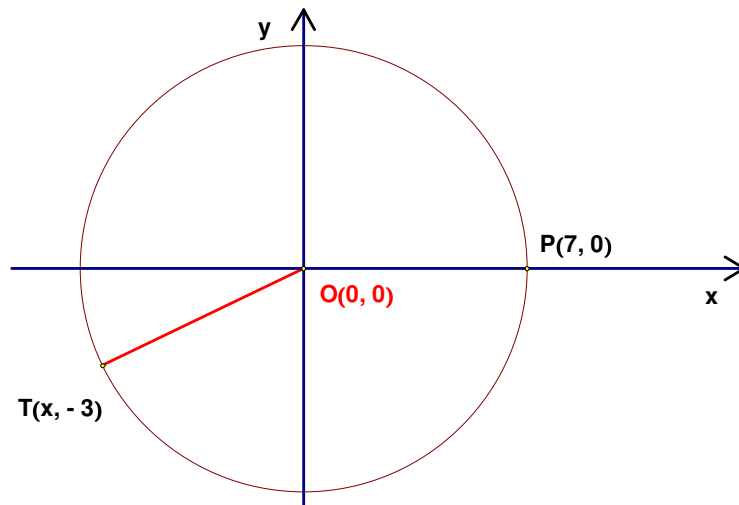
$$x^2 + y^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49.$$

Točka $T(x, -3)$ pripada kružnici pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu kružnice i izračunati x .

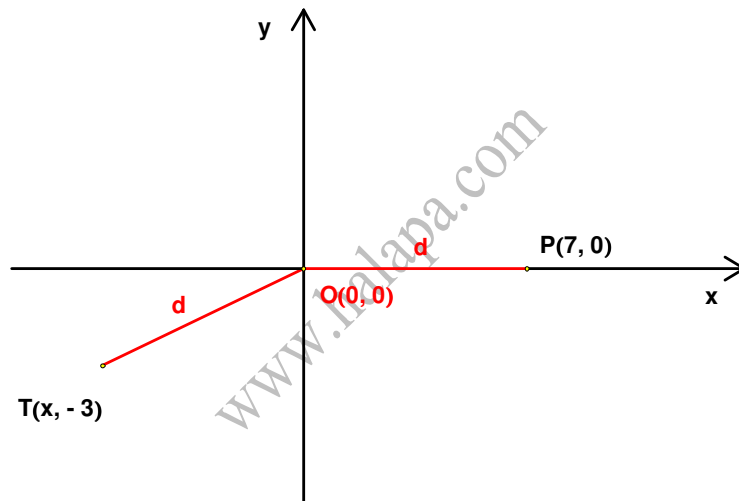
$$\left. \begin{aligned} T(x, y) = T(x, -3) \\ x^2 + y^2 = 49 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + (-3)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + 9 = 49 \Rightarrow x^2 = 49 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 / \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{40} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{4 \cdot 10} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \cdot \sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{treći kvadrant} \\ x < 0 \end{array} \right] \Rightarrow x = -2 \cdot \sqrt{10}.$$



2. inačica



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$|TO| = |PO|.$$

Računamo $|TO|$.

$$\left. \begin{array}{l} T(x_1, y_1) = T(x, -3) \\ O(x_2, y_2) = O(0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[|TO| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |TO| = \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - (-3))^2} \Rightarrow |TO| = \sqrt{x^2 + 3^2} \Rightarrow |TO| = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Računamo $|PO|$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x_1, y_1) = P(7, 0) \\ O(x_2, y_2) = O(0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[|PO| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PO| = \sqrt{(0 - 7)^2 + (0 - 0)^2} \Rightarrow |PO| = \sqrt{49} \Rightarrow |PO| = 7.$$

Zbog

$$|TO| = |PO|$$

slijedi:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+9} = 7 &\Rightarrow \sqrt{x^2+9} = 7 \quad / \text{ }^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2+9 = 49 \Rightarrow x^2 = 49-9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 \quad / \sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{40} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4 \cdot 10} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \cdot \sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{treći kvadrant} \\ x < 0 \end{array} \right] \Rightarrow x = -2 \cdot \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Vježba 262

Točka T(x, -3) u četvrtom kvadrantu jednako je udaljena od ishodišta kao i točka P(7, 0). Koliki je x?

Rezultat: $x = 2 \cdot \sqrt{10}.$

Zadatak 263 (Ana, gimnazija)

Ako pravac $y = k \cdot x$ siječe kružnicu $(x-5)^2 + y^2 = 9$ tada za k vrijedi:

A. $-1 \leq k \leq 1$ B. $-\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$ C. $k \geq 1$ D. $0 \leq k \leq 1$

Rješenje 263

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a \geq b, \quad c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj -x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Uvjet presjeka pravca i kružnice

Pravac s jednadžbom $y = k \cdot x$ siječe kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, onda i samo onda ako vrijedi

$$r^2 \cdot (1+k^2) \geq (q-k \cdot p-l)^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1. inačica

Da bismo našli presjek pravca i kružnice moramo riješiti sustav jednačba.

$$\left. \begin{array}{l} y = k \cdot x \\ (x-5)^2 + y^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zaljene} \end{array} \right] \Rightarrow (x-5)^2 + (k \cdot x)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 25 + k^2 \cdot x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 25 + k^2 \cdot x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (1+k^2) \cdot x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0.$$

Pravac siječe kružnicu pa jednačba mora imati realna rješenja, tj. njezina diskriminanta je nenegativna.

$$\left. \begin{array}{l} (1+k^2) \cdot x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0 \Rightarrow \\ a = 1+k^2, \quad b = -10, \quad c = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet} \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \end{array} \right] \Rightarrow (-10)^2 - 4 \cdot (1+k^2) \cdot 16 \geq 0 \Rightarrow 100 - 64 \cdot (1+k^2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 64 - 64 \cdot k^2 \geq 0 \Rightarrow -64 \cdot k^2 \geq -100 + 64 \Rightarrow -64 \cdot k^2 \geq -36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -64 \cdot k^2 \geq -36 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{64} \right) \Rightarrow k^2 \leq \frac{36}{64} \Rightarrow k^2 \leq \frac{36}{64} \Rightarrow k^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow k^2 \leq \frac{9}{16} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow |k| \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Zadani pravac ima koeficijent smjera k i odsječak na y osi l .

$$y = k \cdot x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k = k \\ l = 0 \end{array} \right\}.$$

Središte kružnice i polumjer iznose:

$$\left. \begin{array}{l} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \\ (x-5)^2 + y^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 5, \quad q = 0 \\ r^2 = 9 \end{array} \right\}.$$

Budući da pravac siječe kružnicu vrijedi:

$$r^2 \cdot (1+k^2) \geq (q-k \cdot p-l)^2 \Rightarrow 9 \cdot (1+k^2) \geq (0-5 \cdot k-0)^2 \Rightarrow 9+9 \cdot k^2 \geq (-5 \cdot k)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+9 \cdot k^2 \geq 25 \cdot k^2 \Rightarrow 9 \cdot k^2 - 25 \cdot k^2 \geq -9 \Rightarrow -16 \cdot k^2 \geq -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot k^2 \geq -9 \quad / : (-16) \Rightarrow k^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow k^2 \leq \frac{9}{16} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow |k| \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 263

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 264 (Dario, gimnazija)

Koje elipse imaju linearni ekscentricitet jednak aritmetičkoj sredini poluosi?

Rješenje 264

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$a^1 = a.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi $2a$. Velika poluos je a , a mala poluos b .

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

- a – prvi član omjera,
- b – drugi član omjera,
- k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Linearni ekscentricitet jednak je aritmetičkoj sredini poluosi.

$$\begin{aligned} e = \frac{a+b}{2} &\Rightarrow e = \frac{a+b}{2} / 2 \Rightarrow e^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow e^2 = \frac{(a+b)^2}{2^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^2 &= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \Rightarrow \left[e^2 = a^2 - b^2 \right] \Rightarrow a^2 - b^2 = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot (a^2 - b^2) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot b^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot b^2 - a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b - 5 \cdot b^2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b - 5 \cdot b^2 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{b^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cdot \frac{a^2}{b^2} - \frac{2 \cdot a \cdot b}{b^2} - 5 \cdot \frac{b^2}{b^2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{a^2}{b^2} - \frac{2 \cdot a \cdot b}{b^2} - 5 \cdot \frac{b^2}{b^2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} - 5 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ \frac{a}{b} = t \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 5 = 0 \\ a = 3, b = -2, c = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3, b = -2, c = -5 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{2+8}{6} \\ t_2 = \frac{2-8}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{10}{6} \\ t_2 = -\frac{6}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{10}{6} \\ t_2 = -\frac{6}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{5}{3} \\ t_2 = -1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Vraćamo se na zamjenu.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = t \\ t = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow a : b = 5 : 3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 5 \cdot k \\ b = 3 \cdot k, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Prvi skup elipsa glasi:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \cdot k \\ b = 3 \cdot k \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x^2}{(5 \cdot k)^2} + \frac{y^2}{(3 \cdot k)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25 \cdot k^2} + \frac{y^2}{9 \cdot k^2} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{25 \cdot k^2} + \frac{y^2}{9 \cdot k^2} = 1 \quad / \cdot 225 \cdot k^2 \Rightarrow 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \cdot k^2, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = t \\ t = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a : b = -1 : 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -k \\ b = k, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Drugi skup elipsa glasi:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -k \\ b = k \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x^2}{(-k)^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1 \quad / \cdot k^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = k^2, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vježba 264

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 265 (Marija, gimnazija)

Točke na elipsi $9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225$ iz kojih se njezini fokusi vide pod pravim kutom čine vrhove konveksnog četverokuta. Odredite koordinate njegovih vrhova.

Rješenje 265

Ponovimo!

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi $2a$. Velika poluos je a , a mala poluos b .

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Ako je $S(0, 0)$ središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

Odredimo linearni ekscentricitet elipse.

$$\begin{aligned} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 &\Rightarrow 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \cdot \frac{1}{225} \Rightarrow \frac{9 \cdot x^2}{225} + \frac{25 \cdot y^2}{225} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{9 \cdot x^2}{225} + \frac{25 \cdot y^2}{225} = 1 &\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow [e^2 = a^2 - b^2] \Rightarrow \\ \Rightarrow e^2 = 25 - 9 &\Rightarrow e^2 = 16. \end{aligned}$$

Budući da se dužina $\overline{F_1 F_2}$ mora vidjeti iz točaka elipse pod pravim kutom, zaključujemo da te točke pripadaju kružnici

$$x^2 + y^2 = e^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16.$$

Presjeci elipse i kružnice vrhovi su četverokuta čije su koordinate rješenja sustava jednadžba.

$$\left. \begin{array}{l} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \cdot (-9) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 &= 225 \\ -9 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 &= -144 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 16 \cdot y^2 = 81 \Rightarrow 16 \cdot y^2 = 81 \quad /: 16 \Rightarrow y^2 = \frac{81}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{81}{16} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{81}{16}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{9}{4} \\ y_2 &= -\frac{9}{4} \end{aligned} \right\}$$

Računamo x.

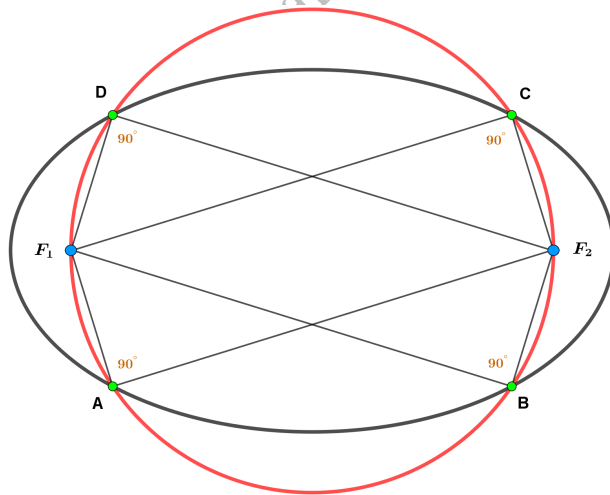
$$\left. \begin{aligned} y^2 &= \frac{81}{16} \\ x^2 + y^2 &= 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + \frac{81}{16} = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - \frac{81}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 16 - 81}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{256 - 81}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{175}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{175}{16} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{175}{16}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{175}}{\sqrt{16}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{25 \cdot 7}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{7}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} \\ x_2 &= -\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} \end{aligned} \right\}$$

Vrhovi četverokuta imaju koordinate:

$$A \left(-\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4} \right), B \left(\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4} \right), C \left(\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4} \right), D \left(-\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4}, \frac{9}{4} \right).$$



Vježba 265

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 266 (Marija, gimnazija)

Odredite jednađbe tangenata na parabolu $y = x^2 + x + 25$ koje prolaze točkom $T(1, 11)$.

Rješenje 266

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednađba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednađbe pravca ili kraće, eksplicitna jednađba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y .

Diskriminanta kvadratne jednađbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednađba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednađba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednađba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Tražimo pravac koji prolazi točkom T . Tada je

$$\left. \begin{array}{l} T(x, y) = T(1, 11) \\ y = k \cdot x + l \end{array} \right\} \Rightarrow 11 = k \cdot 1 + l \Rightarrow 11 = k + l \Rightarrow k + l = 11 \Rightarrow l = 11 - k.$$

Jednađba tangente ima oblik

$$\left. \begin{array}{l} l = 11 - k \\ y = k \cdot x + l \end{array} \right\} \Rightarrow y = k \cdot x + 11 - k.$$

Odredimo točke presjeka ovog pravca i zadane parabole. Riješimo sustav

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + x + 25 \\ y = k \cdot x + 11 - k \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x + 25 = k \cdot x + 11 - k \Rightarrow x^2 + x + 25 - k \cdot x - 11 + k = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + (1-k) \cdot x + 14 + k = 0.$$

Pravac će biti tangenta parabole, ako je dira samo u jednoj točki. Kvadratna jednađba mora imati jedno rješenje. To je moguće kad je diskriminanta jednaka 0.

$$x^2 + (1-k) \cdot x + 14 + k = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + (1-k) \cdot x + 14 + k = 0 \\ a = 1 \quad , \quad b = 1 - k \quad , \quad c = 14 + k \end{array} \right\} \Rightarrow [b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (14+k) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cdot k + k^2 - 4 \cdot (14+k) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cdot k + k^2 - 56 - 4 \cdot k = 0 \Rightarrow k^2 - 6 \cdot k - 55 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k^2 - 6 \cdot k - 55 = 0 \\ a = 1 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad c = -55 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a=1, b=-6, c=-55 \\ \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-55)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 220}}{2} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{256}}{2} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{6 \pm 16}{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 = \frac{6+16}{2} \\ k_2 = \frac{6-16}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 = \frac{22}{2} \\ k_2 = -\frac{10}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 = \frac{22}{2} \\ k_2 = -\frac{10}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k_1 = 11 \\ k_2 = -5 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Postoje dvije tangente.

Računamo l odsječak na y osi.

$$l = 11 - k \Rightarrow \left[\begin{aligned} k_1 = 11 \\ k_2 = -5 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} l_1 = 11 - 11 \\ l_2 = 11 - (-5) \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} l_1 = 0 \\ l_2 = 11 + 5 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} l_1 = 0 \\ l_2 = 16 \end{aligned} \right].$$

Jednadžbe tangenata su:

$$y = k \cdot x + l \Rightarrow \left[\begin{aligned} k_1 = 11, l_1 = 0 \\ k_2 = -5, l_2 = 16 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} y = 11 \cdot x + 0 \\ y = -5 \cdot x + 16 \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} y = 11 \cdot x \\ y = -5 \cdot x + 16 \end{aligned} \right].$$

Vježba 266

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 267 (Dražen, gimnazija)

Odredite poluparametar elipse $x^2 + 4 \cdot y^2 = 16$.

A. 0.5 B. 3 C. 1 D. 4 E. 2

Rješenje 267

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi $2a$. Velika poluos je a , a mala poluos b .

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

Tjemena glase:

$$A(-a, 0) \quad , \quad B(a, 0) \quad , \quad C(0, -b) \quad , \quad D(0, b).$$

Tetiva je dužina koja povezuje dvije točke krivulje. Tetiva elipse koja prolazi fokusom i okomita je na veliku os naziva se parametar elipse i njezina duljina se označava s $2 \cdot p$, $p > 0$.

Broj p naziva se poluparametar.

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{za} \quad a > b$$

ili

$$p = \frac{a^2}{b} \quad \text{za} \quad a < b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

Preoblikujemo jednadžbu elipse u segmentni (kanonski) oblik kako bismo odredili a i b.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 \cdot y^2 = 16 &\Rightarrow x^2 + 4 \cdot y^2 = 16 \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4 \cdot y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4 \cdot y^2}{16} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 16 \text{ / } \sqrt{\quad} \\ b^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \sqrt{16} \\ b^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 4 \\ b^2 = 4 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Sada je

$$p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow p = \frac{4}{4} \Rightarrow p = 1.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

Budući da elipsa siječe koordinatne osi u točkama A(-a, 0), B(a, 0), C(0, -b) i D(0, b) koje moraju zadovoljavati jednadžbu, odredit ćemo a i b pomoću tjemena.

$x^2 + 4 \cdot y^2 = 16$	
$(x, y) = (a, 0)$	$(x, y) = (0, b)$
$a^2 + 4 \cdot 0^2 = 16$	$0^2 + 4 \cdot b^2 = 16$
$a^2 + 0 = 16$	$4 \cdot b^2 = 16$
$a^2 = 16$	$4 \cdot b^2 = 16 \text{ / : } 4$
$a^2 = 16 \text{ / } \sqrt{\quad}$	$b^2 = 4$
$a = 4$	

Sada je

$$p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow p = \frac{4}{4} \Rightarrow p = 1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 267

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 268 (Kristina, maturantica)

Kako glasi jednadžba parabole čiji je fokus ujedno desni fokus hiperbole $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$? Vrh parabole je u ishodištu koordinatnog sustava.

A. $y^2 = 10 \cdot x$ B. $y^2 = 20 \cdot x$ C. $y^2 = 40 \cdot x$ D. $y^2 = 60 \cdot x$

Rješenje 268

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

pri čemu je p parametar parabole.

Žarište (fokus) parabole ima koordinate:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Određimo linearni ekscentricitet hiperbole.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 64 \\ b^2 = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[e^2 = a^2 + b^2 \right] \Rightarrow e^2 = 64 + 36 \Rightarrow e^2 = 100 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^2 = 100 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow e = \sqrt{100} \Rightarrow e = 10.$$

Desni fokus hiperbole ima koordinate

$$F_2(x, y) = F_2(10, 0).$$

Budući da je to istodobno i fokus parabole (fokus parabole je na pozitivnom dijelu osi x), slijedi:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F_2(10, 0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 10 \Rightarrow \frac{p}{2} = 10 \quad / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot \frac{p}{2} = 40 \Rightarrow 4 \cdot \frac{p}{2} = 40 \Rightarrow 2 \cdot p = 40.$$

Jednadžba parabole glasi

$$y^2 = 40 \cdot x.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 268

Kako glasi jednadžba parabole čiji je fokus ujedno desni fokus hiperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$? Vrh parabole je u ishodištu koordinatnog sustava.

$$A. y^2 = 10 \cdot x \quad B. y^2 = 20 \cdot x \quad C. y^2 = 40 \cdot x \quad D. y^2 = 60 \cdot x$$

Rezultat: B.

Zadatak 269 (Petra, maturantica)

Najmanja udaljenost parabole $y^2 = 12 \cdot x$ i pravca $x - y + 7 = 0$ iznosi:

$$A. 1 \quad B. 5 \cdot \sqrt{2} \quad C. 2 \cdot \sqrt{2} \quad D. 4 \quad E. \sqrt{2}$$

Rješenje 269

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

pri čemu je p parametar parabole.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y .

Tangenta ili dodirnica je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki. Na svaku je krivulju (npr. kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu) moguće položiti beskonačno mnogo tangenata, ali kroz svaku točku glatke krivulje prolazi samo jedna tangenta.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Uvjet dodira pravca i parabole

Pravac

$$y = k \cdot x + l$$

dira parabolu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

onda i samo onda kad vrijedi

$$p = 2 \cdot k \cdot l.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x , $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x , $x < 0$, je $|x| = -x$.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca $p \dots A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Odredimo parametar p parabole.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \text{ } /: 2 \Rightarrow p = 6.$$

Jednadžbu zadanog pravca napisat ćemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njegov koeficijent smjera.

$$x - y + 7 = 0 \Rightarrow -y = -x - 7 \Rightarrow -y = -x - 7 \text{ } / \cdot (-1) \Rightarrow y = x + 7 \Rightarrow y = 1 \cdot x + 7 \Rightarrow k_1 = 1.$$

Na paraboli treba naći tangentu koja je usporedna sa zadanim pravcem.

Koeficijent smjera tangente, također, je jednak $k = 1$ zbog usporednosti pravca i tangente.

Iz uvjeta dodira pravca i parabole izračunat ćemo odsječak tangente na osi ordinata.

$$p = 2 \cdot k \cdot l \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 6 \\ k = 1 \end{array} \right] \Rightarrow 6 = 2 \cdot 1 \cdot l \Rightarrow 6 = 2 \cdot l \Rightarrow 2 \cdot l = 6 \Rightarrow 2 \cdot l = 6 \text{ } /: 2 \Rightarrow l = 3.$$

Jednadžba tangente glasi:

$$y = k \cdot x + l \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ l = 3 \end{array} \right] \Rightarrow y = x + 3.$$

Tražena udaljenost bit će udaljenost između pravca i tangente na parabolu.

Kako to izračunati? Lako, evo ovako!

Na jednom pravcu odaberemo točku $T(x, y)$ po volji. Na primjer, na pravcu $y = x + 7$. Neka je $x = 0$, tada je

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 + 7 \Rightarrow y = 7.$$

Tražena točka ima koordinate:

$$T(x, y) = T(0, 7).$$

Sada treba naći udaljenost točke T i pravca $y = x + 3$. Njega ćemo prevesti u implicitni oblik.

$$y = x + 3 \Rightarrow -x + y - 3 = 0 \Rightarrow -x + y - 3 = 0 \text{ } / \cdot (-1) \Rightarrow x - y + 3 = 0.$$

Udaljenost iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} T(x_0, y_0) = T(0, 7) \\ x - y + 3 = 0 \\ A = 1, B = -1, C = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 7 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{|0 - 7 + 3|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow d = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow d = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 269

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 270 (Robert, maturant)

Kružnica $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0$ ima polumjer $r = 1$ ako je a jednako:

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8 E. 1

Rješenje 270

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je $S(p, q)$ središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0, \quad c = p^2 + q^2 - r^2.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0 &\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x + 1 - 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 - 4 + a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + 2 \cdot x + 1) + (y^2 - 4 \cdot y + 4) - 5 + a = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 - a \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 = 5 - a \Rightarrow [r=1] \Rightarrow 1^2 = 5 - a \Rightarrow 1 = 5 - a \Rightarrow a = 5 - 1 \Rightarrow a = 4. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2 \cdot p = 2 \\ -2 \cdot q = -4 \\ c = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2 \cdot p = 2 \quad /: (-2) \\ -2 \cdot q = -4 \quad /: (-2) \\ c = a \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = -1 \\ q = 2 \\ c = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = p^2 + q^2 - r^2 \\ r = 1 \end{array} \right] \Rightarrow a = (-1)^2 + 2^2 - 1^2 \Rightarrow a = 1 + 4 - 1 \Rightarrow a = 4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 270

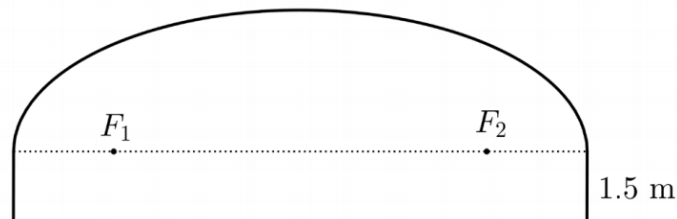
Kružnica $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0$ ima polumjer $r = 2$ ako je a jednako:

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8 E. 1

Rezultat: E.

Zadatak 271 (Lupus, maturant)

Na skici je prikazan presjek koncertne dvorane. Strop dvorane u presjeku je u obliku poluelipse čija su žarišta F_1 i F_2 na visini 1.5 m od poda. U žarištima međusobno udaljenima 16 m postavljeni su zvučnici. Izračunajte visinu dvorane na mjestima gdje su postavljeni zvučnici ako je najveća visina dvorane 7.5 m.



Rješenje 271

Ponovimo!

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}, \quad \sqrt{a^2} = a, \quad a \geq 0.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi $2a$. Velika poluos je a , a mala poluos b .

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

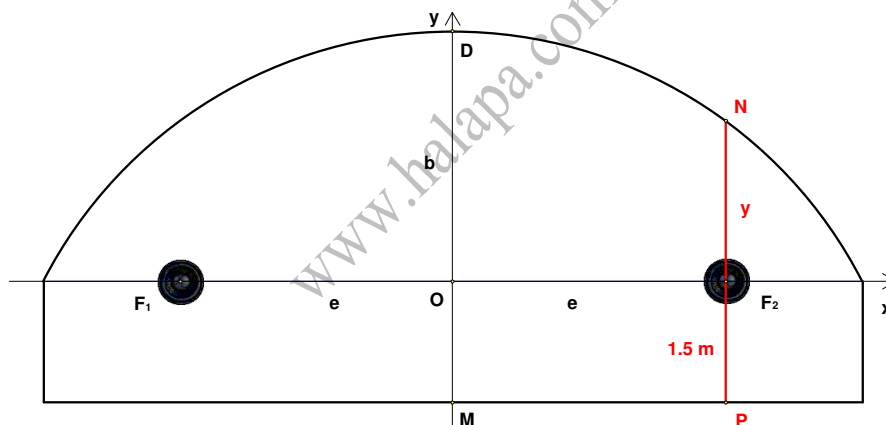
Žarišta elipse imaju koordinate:

$$F_1(-e, 0), \quad F_2(e, 0).$$

Tjemena glase:

$$A(-a, 0), \quad B(a, 0), \quad C(0, -b), \quad D(0, b).$$

Pomoću podataka u zadatku možemo odrediti e , b i a . Zgodno je uvesti pravokutni koordinatni sustav tako da pravac F_1F_2 bude os apscisa. Ishodište koordinatnog sustava bit će u polovištu dužine $\overline{F_1F_2}$.



Sa slike vidi se:

$$|F_1F_2| = 16 \text{ m} \Rightarrow 2 \cdot e = 16 \text{ m} \Rightarrow e = 8 \text{ m}, \quad |MO| = |PF_2| = 1.5 \text{ m}, \quad |MD| = 7.5 \text{ m}$$

$$|F_2N| = y, \quad |OD| = b = |MD| - |MO| = 7.5 \text{ m} - 1.5 \text{ m} = 6 \text{ m} \quad \text{duljina male poluosi elipse}$$

Duljina velike poluosi je jednaka

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 8^2 = a^2 - 6^2 \Rightarrow 64 = a^2 - 36 \Rightarrow 64 + 36 = a^2 \Rightarrow a^2 = 100.$$

Jednadžba elipse (u našem slučaju poluelipse) glasi:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Kako odrediti udaljenost između zvučnika (na primjer u točki F_2) i stropa (točke N)?

Točka N je iznad točke F_2 pa ima istu apscisu $x = 8$. Točka N pripada poluelipsi pa se njezina ordinata lako odredi uz uvjet $y > 0$ (ili na drugi način da tražimo presjek pravca $x = 8$ i elipse).

$$\left. \begin{array}{l} x=8 \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{64}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{64}{100} \Rightarrow \frac{y^2}{36} = \frac{36}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{36} = \frac{36}{100} \quad / \cdot 36 \Rightarrow y^2 = \frac{36^2}{100} \Rightarrow y^2 = \frac{36^2}{100} \quad / \sqrt{} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{36^2}{100}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{36^2}}{\sqrt{100}} \Rightarrow y = \frac{36}{10} \Rightarrow y = 3.6 \text{ m.}$$

Visina dvorane na mjestu gdje su postavljeni zvučnici iznosi:

$$|PN| = |PF_2| + |F_2N| \Rightarrow |PN| = 1.5 \text{ m} + y \Rightarrow |PN| = 1.5 \text{ m} + 3.6 \text{ m} \Rightarrow |PN| = 5.1 \text{ m.}$$

Vježba 271

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 272 (Karla, maturantica)

Odredite jednadžbu kružnice polujera 8 koja ima središte u četvrtom kvadrantu i dira obje koordinatne osi.

Rješenje 272

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

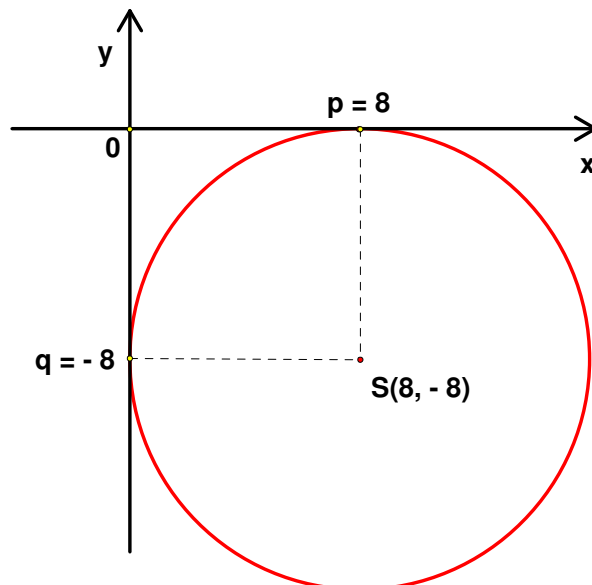
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).

Ako je $S(p, q)$ središte kružnice, a r polujer, tada **središnja** jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0.$$



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} p=8 \\ q=-8 \\ r=8 \end{cases} \Rightarrow (x-8)^2 + (y-(-8))^2 = 8^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-8)^2 + (y+8)^2 = 64.$$

Ili

$$\begin{aligned} (x-8)^2 + (y+8)^2 = 64 &\Rightarrow x^2 - 16 \cdot x + 64 + y^2 + 16 \cdot y + 64 = 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 16 \cdot x + 64 + y^2 + 16 \cdot y + 64 = 64 &\Rightarrow x^2 - 16 \cdot x + y^2 + 16 \cdot y + 64 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 16 \cdot x + 16 \cdot y + 64 = 0. \end{aligned}$$

Vježba 272

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 273 (Kruno, maturant)

Odredite jednadžbu kružnice kojom je opisan trokut ABC ako je A(8, 1), B(0, 7), C(0, 1).

Rješenje 273

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad \left. \begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a-c = b-d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

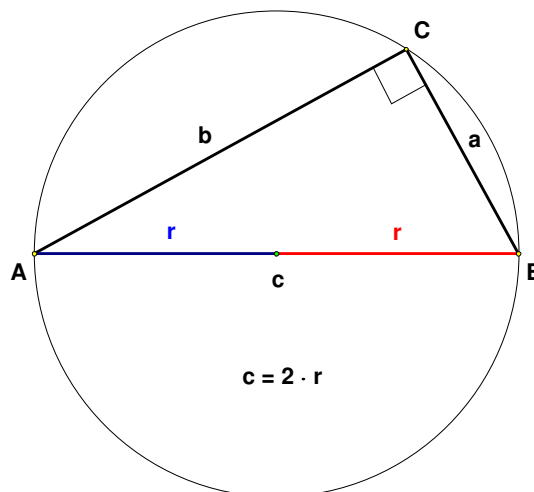
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r .

Promjer ili dijametar kružnice dužina je koja spaja dvije točke kružnice i prolazi njezinim središtem.

Duljina promjera označava se slovom d .



Talesov poučak je geometrijski poučak koji kaže ako su A, B i C točke na kružnici, a dužina između točaka A i B promjer kružnice, onda je kut BCA pravi kut (90°).

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednaka je duljini promjera kružnice.

$$c = d, \quad 2 \cdot r = c, \quad r = \frac{1}{2} \cdot c.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je $S(p, q)$ središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja** jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Koordinate polovišta P dužine \overline{AB} , $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

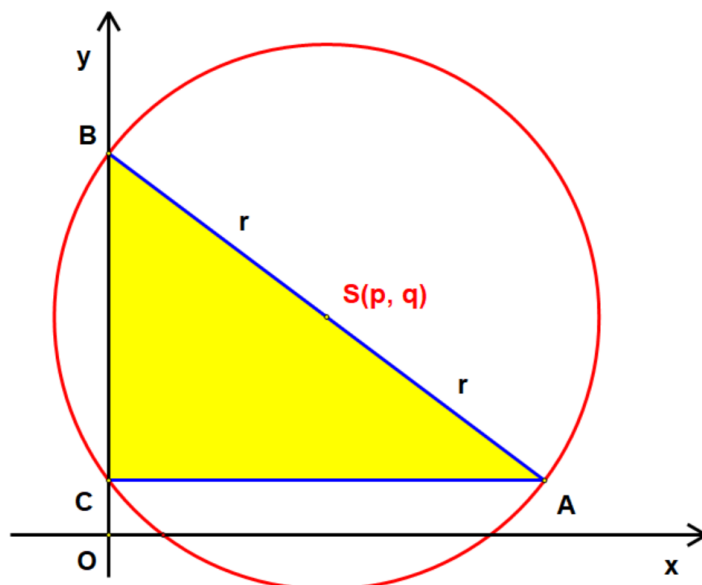
$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$



Sa slike vidi se trokut ABC pravokutan je pa je hipotenuza \overline{AB} promjer opisane kružnice.
Računamo polumjer kružnice r .

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(8, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(0, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(0 - 8)^2 + (7 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + 6^2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64 + 36} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{100} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 10 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 10 \Rightarrow r = 5.$$

Koordinate središta S kružnice naći ćemo pomoću formula za polovište dužine.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(8, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(0, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ q = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{8 + 0}{2} \\ q = \frac{1 + 7}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{8}{2} \\ q = \frac{8}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = \frac{8}{2} \\ q = \frac{8}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 4 \\ q = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(p, q) = S(4, 4).$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=4 \\ r=5 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

2. inačica

Koordinate točaka A, B i C uvrstimo u jednadžbu kružnice.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = A(8, 1) \\ B(x, y) = B(0, 7) \\ C(x, y) = C(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (8-p)^2 + (1-q)^2 = r^2 \\ (0-p)^2 + (7-q)^2 = r^2 \\ (0-p)^2 + (1-q)^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 64 - 16 \cdot p + p^2 + 1 - 2 \cdot q + q^2 = r^2 \\ \Rightarrow p^2 + 49 - 14 \cdot q + q^2 = r^2 \\ p^2 + 1 - 2 \cdot q + q^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 = r^2 \quad \text{1. jednadžba} \\ p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 = r^2 \quad \text{2. jednadžba} \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \quad \text{3. jednadžba} \end{array} \right\}.$$

- **Od 1. jednadžbe oduzmemo 2. jednadžbu.**

$$\left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - (p^2 + q^2 - 14 \cdot q + 49) = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - p^2 - q^2 + 14 \cdot q - 49 = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - p^2 - q^2 + 14 \cdot q - 49 = 0 \Rightarrow -16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 + 14 \cdot q - 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot p + 12 \cdot q = -65 + 49 \Rightarrow -16 \cdot p + 12 \cdot q = -16 \Rightarrow -16 \cdot p + 12 \cdot q = -16 \quad /: (-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot p - 3 \cdot q = 4.$$

- **Od 1. jednadžbe oduzmemo 3. jednadžbu.**

$$\left. \begin{array}{l} p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 = r^2 \\ p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - (p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1) = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - p^2 - q^2 + 2 \cdot q - 1 = r^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 - 16 \cdot p - 2 \cdot q + 65 - p^2 - q^2 + 2 \cdot q - 1 = 0 \Rightarrow -16 \cdot p + 65 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot p = -65 + 1 \Rightarrow -16 \cdot p = -64 \Rightarrow -16 \cdot p = -64 \quad /: (-16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 4.$$

Računamo q.

$$\left. \begin{array}{l} p=4 \\ 4 \cdot p - 3 \cdot q = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 4 - 3 \cdot q = 4 \Rightarrow 16 - 3 \cdot q = 4 \Rightarrow -3 \cdot q = 4 - 16 \Rightarrow -3 \cdot q = -12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot q = -12 \quad /: (-3) \Rightarrow q = 4.$$

Računamo r^2 .

$$p^2 + q^2 - 2 \cdot q + 1 = r^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} p=4 \\ q=4 \end{bmatrix} \Rightarrow 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 = r^2 \Rightarrow 16 + 16 - 8 + 1 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} p=4 \\ q=4 \\ r^2=25 \end{bmatrix} \Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Vježba 273

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 274 (Casio, maturant)

Kružnica sa središtem u točki $S(1, -1)$ na pravcu $x - 2 \cdot y + 7 = 0$ odsijeca tetivu duljine 8. Jednadžba te kružnice glasi:

$$\begin{array}{ll} A. (x+1)^2 + (y-1)^2 = 36 & B. (x-1)^2 + (y+1)^2 = 36 \\ C. (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 & D. (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \end{array}$$

Rješenje 274

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x , $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x , $x < 0$, je $|x| = -x$.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca $p \dots A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).

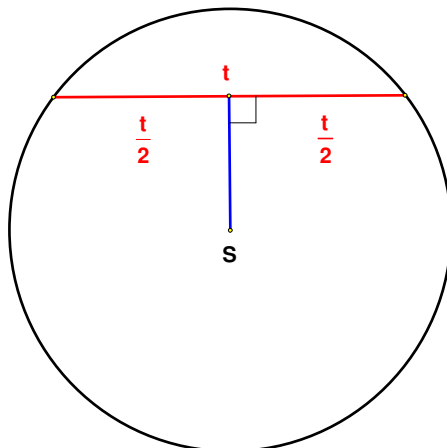
Ako je $S(p, q)$ središte kružnice, a r polumjer, tada **središnja jednadžba kružnice** glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r .

Dužinu koja spaja dvije točke na kružnici nazivamo **tetiva**.

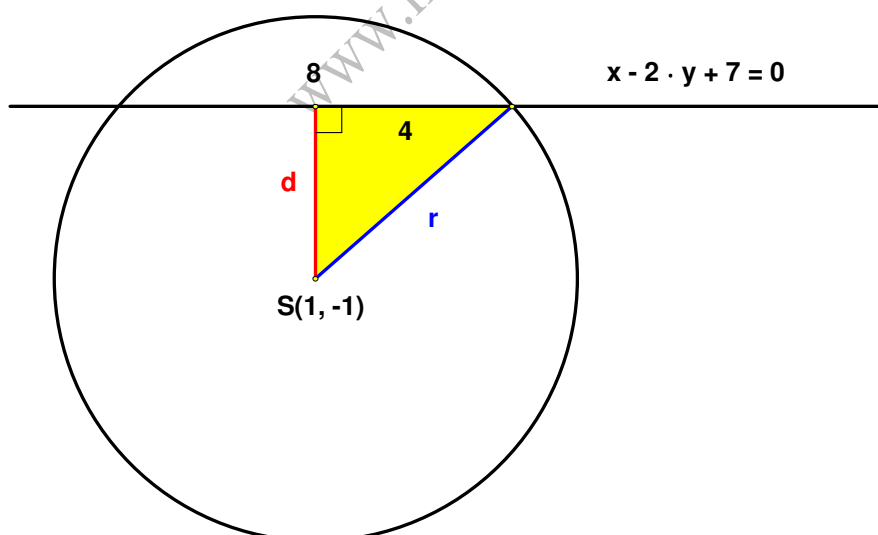
Okomica iz središta kružnice na neku tetivu dijeli tetivu na dva jednaka dijela.



Najprije odredimo udaljenost točke S od zadanog pravca.

$$\left. \begin{array}{l} S(x_0, y_0) = S(1, -1) \\ x - 2 \cdot y + 7 = 0 \\ A = 1, B = -2, C = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{|1 + 2 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} \Rightarrow d = \frac{|10|}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$



Iz pravokutnog trokuta uz pomoć Pitagorina poučka izračunamo r^2 .

$$r^2 = d^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}} \right)^2 + 16 \Rightarrow r^2 = \frac{10^2}{(\sqrt{5})^2} + 16 \Rightarrow r^2 = \frac{100}{5} + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{100}{5} + 16 \Rightarrow r^2 = 20 + 16 \Rightarrow r^2 = 36.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left. \begin{array}{l} S(p, q) = S(1, -1) \\ r^2 = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow (x-1)^2 + (y-(-1))^2 = 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 36.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 274

Odmor!

Rezultat: ...

www.halapa.com