Zadatak 221 (Katarina, maturantica)

Kružnica dira os apscisa u točki (3, 0) i siječe os ordinata u točki (0, 10). Koliki je polumjer te kružnice?

$A.\ 5 \qquad B.\ 5.45 \qquad C.\ 6.5 \qquad D.\ 7.38$

Rješenje 221

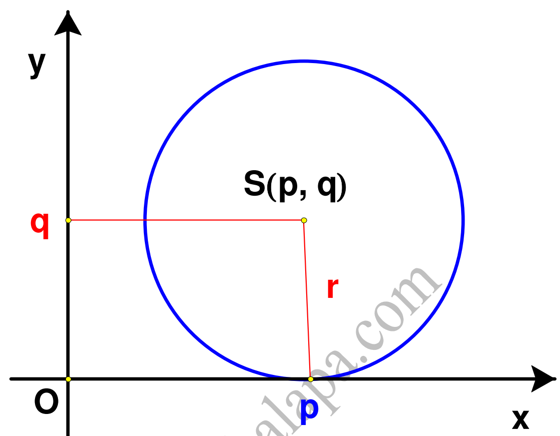
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Središte kružnice koja dira x – os može biti iznad ili ispod x – osi. Ako je iznad, tada je polumjer r upravo jednak q.

$$r=q.$$



Budući da kružnica dira os apscisa u točki (3, 0), apscisa središta S je p = 3. Možemo napisati jednadžbu kružnice.

$$(x-3)^2+(y-r)^2=r^2.$$

Kružnica prolazi točkom (0, 10). Uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu kružnice.

$$\left.\begin{array}{l}(x,\ y)=(0,\ 10)\\ (x-3)^2+(y-r)^2=r^2\end{array}\right\} \Rightarrow (0-3)^2+(10-r)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-3)^2+100-20\cdot r+r^2=r^2 \Rightarrow 9+100-20\cdot r+r^2=r^2 \Rightarrow 109-20\cdot r+r^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 109=20\cdot r \Rightarrow 20\cdot r=109 \Rightarrow 20\cdot r=109\ /:20 \Rightarrow r=5.45.$$

Vježba 221

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 222 (Katarina, maturantica)

Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12 \cdot x$. Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2 \cdot x + 5$?

Rješenje 222

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2=2\cdot p\cdot x.$$

Žarište (fokus) ima koordinate:

$$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ dana je formulom

$$d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Odredimo koordinate žarišta (fokusa) parabole.

$$\left.\begin{aligned}y^2&=2\cdot p\cdot x\\ y^2&=12\cdot x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 2\cdot p=12\ \Rightarrow\ 2\cdot p=12\ /:2\ \Rightarrow\ p=6\ \Rightarrow\ \left[F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)\right]\Rightarrow\ F\left(\frac{6}{2},\ 0\right)\Rightarrow\ F\left(\frac{6}{2},\ 0\right)\Rightarrow\ F(3,\ 0).$$

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u implicitni oblik.

$$y=2\cdot x+5\ \Rightarrow\ -2\cdot x+y-5=0\ \Rightarrow\ -2\cdot x+y-5=0\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ 2\cdot x-y+5=0.$$

Računamo udaljenost žarišta F od pravca.

$$\left.\begin{aligned}&F(x_0,\ y_0)=F(3,\ 0)\\ &2\cdot x-y+5=0\\ &A=2\ ,\ B=-1\ ,\ C=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]\Rightarrow\ d=\frac{|2\cdot 3+(-1)\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{|6+0+5|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow d = \frac{|11|}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} \Rightarrow d = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

Vježba 222

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 223 (Luka, gimnazija)

Površina četverokuta kome su dva vrha u žarištima elipse $4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 36$, a druga dva u tjemenima te elipse iznosi:

$$A.\ 3 \cdot \sqrt{3} \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 2 \cdot \sqrt{5} \qquad D.\ 4 \cdot \sqrt{5}$$

Rješenje 223

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

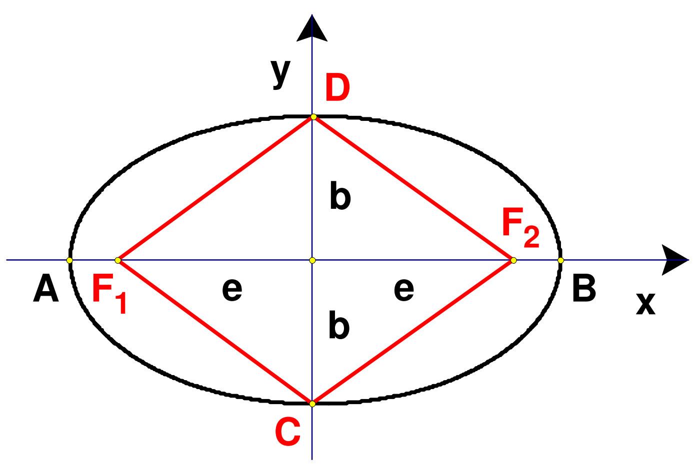
$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Žarišta elipse imaju koordinate:

$$F_1(-e, 0) \quad , \quad F_2(e, 0).$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Četverokutu s okomitim dijagonalama d_1 i d_2 površinu računamo po formuli:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|F_1F_2\right| = 2\cdot e \quad , \quad \left|CD\right| = 2\cdot b$$

Odredimo duljinu velike i male poluosi elipse.

$$4\cdot x^2 + 9\cdot y^2 = 36 \Rightarrow 4\cdot x^2 + 9\cdot y^2 = 36 \;/:36 \Rightarrow \frac{4\cdot x^2}{36} + \frac{9\cdot y^2}{36} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot x^2}{36} + \frac{9\cdot y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 9 \;/\sqrt{\ } \\ b^2 = 4 \;/\sqrt{\ } \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \sqrt{9} \\ b = \sqrt{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo linearni ekscentricitet e.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow e = \sqrt{3^2 - 2^2} \Rightarrow e = \sqrt{9-4} \Rightarrow e = 5.$$

Površina četverokuta F_1CF_2D iznosi:

$$P = \frac{\left|F_1F_2\right|\cdot\left|CD\right|}{2} \Rightarrow P = \frac{2\cdot e\cdot 2\cdot b}{2} \Rightarrow P = \frac{2\cdot e\cdot 2\cdot b}{2} \Rightarrow P = 2\cdot b\cdot e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} \Rightarrow P = 4\cdot\sqrt{5}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 223

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 224 (Miroslav, gimnazija)

Duljina one tetive kružnice $x^2 + y^2 + 4\cdot x - 4\cdot y - 17 = 0,$ kojoj je polovište u točki P(0, 3), iznosi:

$A.\ 4\cdot\sqrt{5} \qquad B.\ 5\cdot\sqrt{5} \qquad C.\ \sqrt{5} \qquad D.\ 6\cdot\sqrt{5}$

Rješenje 224

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

$$a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

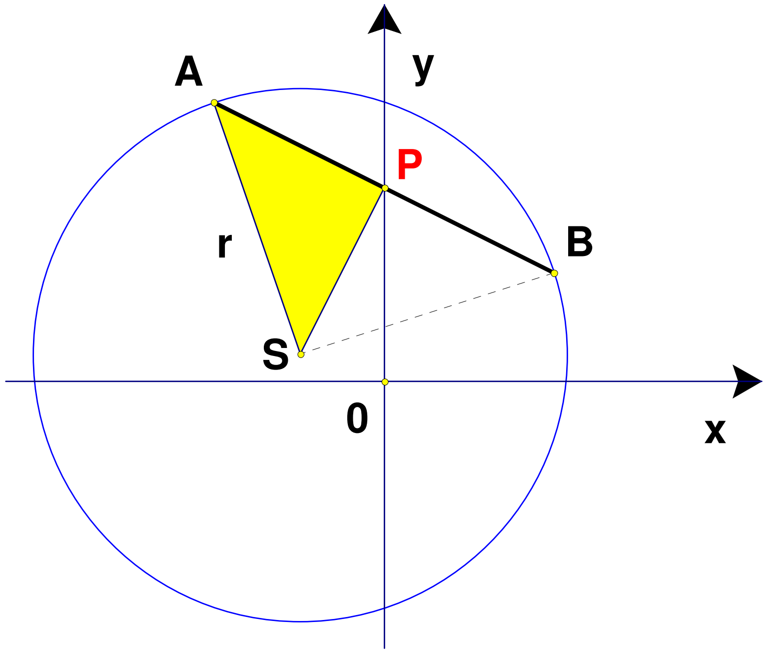
Tetiva kružnice je dužina koja spaja dvije točke na kružnici.
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2\cdot p\cdot x - 2\cdot q\cdot y + c = 0 \quad , \quad r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|SA| = |SB| = r \ , \ |AP| = |PB| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Preoblikujemo jednadžbu kružnice u središnju jednadžbu.

$$x^2 + y^2 + 4 \cdot x - 4 \cdot y - 17 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 + 4 \cdot x + 4 + y^2 - 4 \cdot y + 4 - 25 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right) + \left(y^2 - 4 \cdot y + 4\right) - 25 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right) + \left(y^2 - 4 \cdot y + 4\right) = 25 \ \Rightarrow \ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} S(p, q) = S(-2, 2) \\ r = 5 \end{array}\right\}.$$

Računamo udaljenost $|\text{SP}|$.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(-2, 2) \\ P(x_2, y_2) = P(0, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|SP| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SP| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (3-2)^2} \ \Rightarrow |SP| = \sqrt{(0+2)^2 + (3-2)^2} \ \Rightarrow |SP| = \sqrt{2^2 + 1^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SP| = \sqrt{4+1} \ \Rightarrow |SP| = \sqrt{5}.$$

Uočimo pravokutan trokut ASP i uporabom Pitagorina poučka izračunamo $|\text{AP}|$.

$$|AP|^2 = |AS|^2 - |SP|^2 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |AS| = r = 5 \\ |SP| = \sqrt{5} \end{array} \right] \Rightarrow |AP|^2 = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \ \Rightarrow |AP|^2 = 25 - 5 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AP|^2 = 20 \ \Rightarrow |AP|^2 = 20 \ / \sqrt{\ } \ \Rightarrow |AP| = \sqrt{20} \ \Rightarrow |AP| = \sqrt{4 \cdot 5} \ \Rightarrow |AP| = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AP| = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Duljina tetive $|\text{AB}|$ iznosi:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| \ \Rightarrow |AB| = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \ \Rightarrow |AB| = 4 \cdot \sqrt{5}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 224

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 225 (Željka, ekonomska škola)

Zrcaljenjem kružnice $x^2 + y^2 = 2$ s obzirom na pravac x + y = 1 dobivena je krivulja čija je jednadžba:

$$A.\ x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \qquad B.\ x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y = 2$$

$$C.\ x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \qquad D.\ x^2 + y^2 = 4 \qquad E.\ x^2 + y^2 = 2 \cdot x + 2 \cdot y$$

Rješenje 225

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Ako je S(0, 0) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

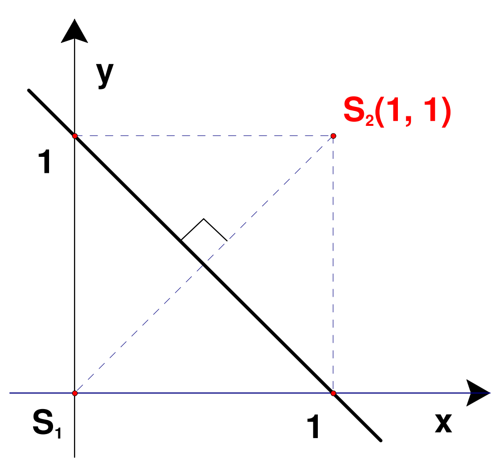
Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Iz jednadžbe zadane kružnice dobije se:

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} S_1(p, q) = S_1(0, 0) \\ r_1^2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} S_1(p, q) = S_1(0, 0) \\ r_1 = \sqrt{2} \end{matrix}\right\}.$$

Napišimo jednadžbu pravca u segmentnom obliku.

$$x + y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1.$$

Gledaj sliku!



Točka S_2 simetrična je točki S_1 s obzirom na pravac x + y = 1. Nova kružnica ima središte u točki S_2 i jednaki polumjer kao i zadana.

$$\left.\begin{matrix} S_2(p, q) = S_2(1, 1) \\ r_2 = r_1 = \sqrt{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r_2^2 \right] \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\cdot x + 1 + y^2 - 2\cdot y + 1 = 2 \Rightarrow x^2 - 2\cdot x + 1 + y^2 - 2\cdot y + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\cdot x + y^2 - 2\cdot y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2\cdot x + 2\cdot y.$$

Odgovor je pod E.

Vježba 225

Zrcaljenjem kružnice $x^2 + y^2 = 2$ s obzirom na pravac x + y = 2 dobivena je krivulja čija je jednadžba:

$$A.\ x^2 + y^2 + 4\cdot x + 4\cdot y = 0 \qquad B.\ x^2 + y^2 - 4\cdot x - 4\cdot y = 4$$

$$C.\ x^2 - 4\cdot x + y^2 - 4\cdot y + 6 = 0 \qquad D.\ x^2 + y^2 = 8 \qquad E.\ x^2 + y^2 = 4\cdot x + 4\cdot y$$

Rezultat: C.

Zadatak 226 (Vedran, gimnazija)

Parabola, simetrična paraboli $y = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 3$ s obzirom na pravac x = – 1, ima jednadžbu:

$$A.\ y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 8 \qquad B.\ y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 9 \qquad C.\ y = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 9$$

$$D.\ y = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 8 \qquad E.\ y = \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 7$$

Rješenje 226

Ponovimo!

$$a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Jednadžba parabole

$$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

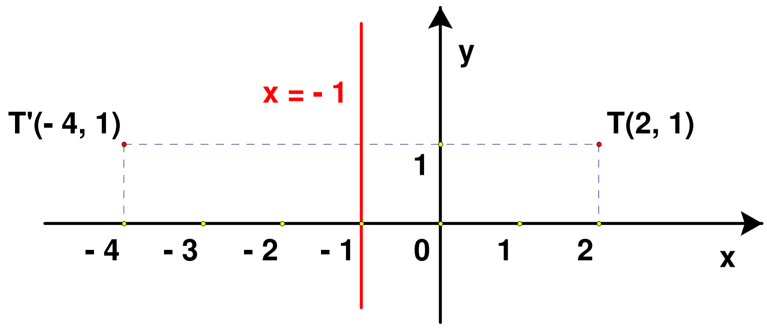
može se napisati u obliku

$$y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0, \text{ a je vodeći koeficijent}$$

tako da joj je tjeme u točki T(x_0, y_0).
Načinimo postupak svođenja na potpuni kvadrat:

$$y = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 2 + 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 2\right) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\cdot(x-2)^2 + 1 \Rightarrow T(x_0, y_0) = T(2, 1) \text{ tjeme parabole.}$$



Tjeme parabole simetrične u odnosu na pravac x = – 1 je točka $T'(x_\circ, y_\circ) = T'(-4, 1)$.

Parabole su simetrične s obzirom na pravac x = – 1 i imaju jednaki vodeći koeficijent, $a = \frac{1}{2}$.

Jednadžba tražene parabole glasi:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - x_\circ)^2 + y_\circ \Rightarrow \left[T'(x_\circ, y_\circ) = T'(-4, 1) \right] \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (x - (-4))^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (x + 4)^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 8 \cdot x + 16 \right) + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + 9.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 226

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 227 (Luka, maturant)

Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkama A(0, 4) i B(– 2, – 2), a središte joj leži na osi apscisa.

Rješenje 227

Ponovimo!

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Ako točka T leži na x – osi (os apscisa) ima koordinate T(x, 0).
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Središte kružnice leži na osi apscisa pa ima koordinate

$$S(p, 0).$$

Koordinate točaka A, B i S uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice:

- $$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = A(0, 4) \\ S(p, q) = S(p, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow (0 - p)^2 + (4 - 0)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-p)^2 + 4^2 = r^2 \Rightarrow p^2 + 16 = r^2$$

- $$\left.\begin{aligned} B(x, y) &= B(-2, -2) \\ S(p, q) &= S(p, 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow (-2-p)^2 + (-2-0)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+p)^2 + (-2)^2 = r^2 \Rightarrow 4 + 4 \cdot p + p^2 + 4 = r^2 \Rightarrow p^2 + 4 \cdot p + 8 = r^2.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left.\begin{aligned} p^2 + 16 &= r^2 \\ p^2 + 4 \cdot p + 8 &= r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow p^2 + 16 = p^2 + 4 \cdot p + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + 16 = p^2 + 4 \cdot p + 8 \Rightarrow 16 = 4 \cdot p + 8 \Rightarrow 4 \cdot p + 8 = 16 \Rightarrow 4 \cdot p = 16 - 8 \Rightarrow 4 \cdot p = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot p = 8 \; / : 4 \Rightarrow p = 2.$$

Računamo r^2.

$$\left.\begin{aligned} p &= 2 \\ p^2 + 16 &= r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2^2 + 16 = r^2 \Rightarrow 4 + 16 = r^2 \Rightarrow 20 = r^2 \Rightarrow r^2 = 20.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{aligned} S(p, q) &= S(2, 0) \\ r^2 &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 20.$$

Vježba 227

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 228 (Mario, gimnazija)

Napiši jednadžbu tangente parabole $y^2 = 12 \cdot x$ koja je usporedna (paralelna) s pravcem $3 \cdot x - y - 4 = 0$.

Rješenje 228

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

pri čemu je p parametar parabole.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Dva pravca zadana svojim jednadžbama u eksplicitnom obliku

$$\left\{ \begin{aligned} y &= k_1 \cdot x + l_1 \\ y &= k_2 \cdot x + l_2 \end{aligned} \right.$$

usporedna (paralelna) su onda i samo onda ako vrijedi

$$k_1 = k_2.$$

Uvjet dodira pravca i parabole
Pravac

$$y = k \cdot x + l$$

dira parabolu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

onda i samo onda kad vrijedi

$$p = 2 \cdot k \cdot l.$$

Odredimo parametar p parabole.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \;/ : 2 \Rightarrow p = 6.$$

Jednadžbu zadanog pravca napisat ćemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njegov koeficijent smjera.

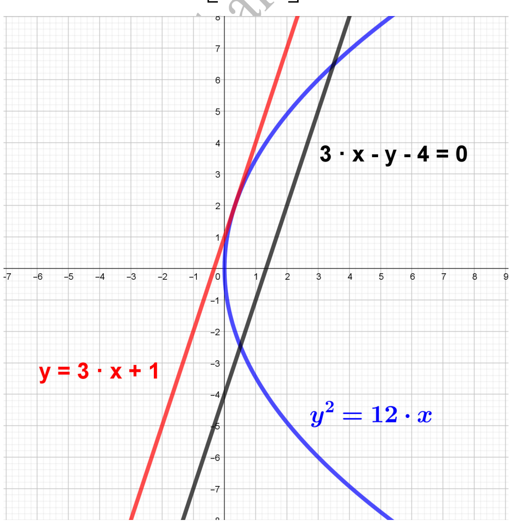
$$3 \cdot x - y - 4 = 0 \Rightarrow -y = -3 \cdot x + 4 \Rightarrow -y = -3 \cdot x + 4 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow y = 3 \cdot x - 4 \Rightarrow k = 3.$$

Koeficijent smjera tangenta, također, je jednak k = 3 zbog usporednosti pravca i tangente.
Iz uvjeta dodira pravca i parabole izračunat ćemo odsječak tangente na osi ordinata.

$$p = 2 \cdot k \cdot l \Rightarrow \begin{bmatrix} p = 6 \\ k = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3 \cdot l \Rightarrow 6 = 6 \cdot l \Rightarrow 6 \cdot l = 6 \Rightarrow 6 \cdot l = 6 \;/ : 6 \Rightarrow l = 1.$$

Jednadžba tangente glasi:

$$y = k \cdot x + l \Rightarrow \begin{bmatrix} k = 3 \\ l = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 3 \cdot x + 1.$$



Vježba 228

Napiši jednadžbu tangente parabole $y^2 = 12 \cdot x$ koja je usporedna (paralelna) s pravcem $-3 \cdot x + y + 4 = 0$.

Rezultat: $y = 3 \cdot x + 1.$

Zadatak 229 (Miro, gimnazija)

Odredi duljinu zajedničke tetive kružnica $x^2 + y^2 = 5$ i $x^2 + y^2 - 8 \cdot x - 8 \cdot y + 3 = 0.$

Rješenje 229

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a-c=b-d \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Tetiva kružnice je dužina koja spaja dvije točke na kružnici.
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

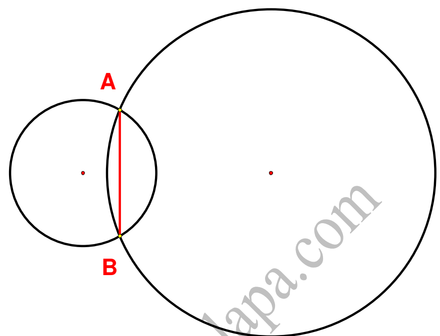
$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Nađemo sjecište kružnica tako da riješimo sustav jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ x^2+y^2-8\cdot x-8\cdot y+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow x^2+y^2-\left(x^2+y^2-8\cdot x-8\cdot y+3\right)=5-0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x^2-y^2+8\cdot x+8\cdot y-3=5 \Rightarrow x^2+y^2-x^2-y^2+8\cdot x+8\cdot y-3=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot x+8\cdot y-3=5 \Rightarrow 8\cdot x+8\cdot y-3-5=0 \Rightarrow 8\cdot x+8\cdot y-8=0 \Rightarrow 8\cdot x+8\cdot y-8=0 \;/:8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y-1=0.$$

Ponovno riješimo sljedeći sustav:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-x \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(1-x)^2=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1-2\cdot x+x^2=5 \Rightarrow x^2+1-2\cdot x+x^2-5=0 \Rightarrow 2\cdot x^2-2\cdot x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-2\cdot x-4=0 \;/:2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ a=1 \;,\; b=-1 \;,\; c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-1 \;,\; c=-2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{1+3}{2} \\ x_2=\frac{1-3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4}{2} \\ x_2=-\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4}{2} \\ x_2=-\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-1\end{array}\right\}.$$

Računamo y_1 i y_2.

- $$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ x+y-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2+y-1=0 \Rightarrow y=-2+1 \Rightarrow y_1=-1$$

Prvo sjecište kružnica je točka A:

$$A(x,\ y)=A(2,\ -1).$$

- $$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x+y-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow -1+y-1=0 \Rightarrow y=1+1 \Rightarrow y_2=2.$$

Drugo sjecište kružnica je točka B:

$$B(x,\ y)=B(-1,\ 2).$$

Duljina tetive $\overline{AB}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ -1) \\ B(x_2,\ y_2)=B(-1,\ 2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(-1-2)^2+(2-(-1))^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(-3)^2+(2+1)^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(-3)^2+3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{9+9} \Rightarrow |AB|=\sqrt{18} \Rightarrow |AB|=\sqrt{9\cdot 2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |AB|=3\cdot\sqrt{2}.$$

Vježba 229

Odredi duljinu zajedničke tetive kružnica $x^2+y^2-5=0$ i $x^2+y^2-8\cdot x-8\cdot y=-3.$

Rezultat: $3\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 230 (Miro, gimnazija)

Odredi kut pod kojim se sijeku kružnica $(x-1)^2+(y+3)^2=5$ i pravac $x-3\cdot y-5=0.$

Rješenje 230

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Jednadžba tangente kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ s diralištem $D(x_0,\ y_0)$ glasi:

$$(x_\circ-p)\cdot(x-p)+(y_\circ-q)\cdot(y-q)=r^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Kut između dva pravca

Kut φ između dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$ računa se po formuli

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

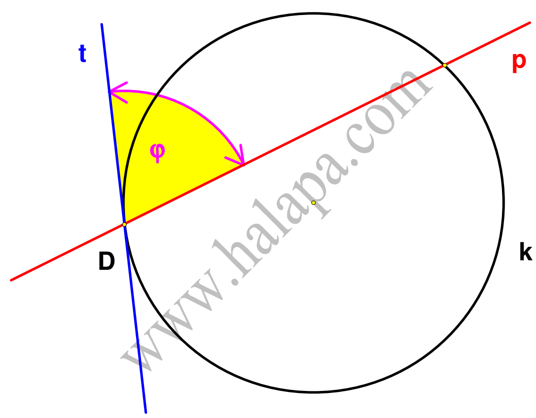
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$



Imaju li pravac i kružnica barem jednu realnu točku D zajedničku, tada se definira kut između njih kao kut između tangente t na kružnicu k i pravca p u zajedničkoj točki D.

Prvo odredimo sjecište pravca i kružnice tako da riješimo sustav jednadžba:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 \cdot y - 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 \cdot y + 5 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 \cdot y + 5 - 1)^2 + (y+3)^2 = 5 \Rightarrow (3 \cdot y + 4)^2 + (y+3)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 \cdot y)^2 + 2 \cdot 3 \cdot y \cdot 4 + 4^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = 5 \Rightarrow 9 \cdot y^2 + 24 \cdot y + 16 + y^2 + 6 \cdot y + 9 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot y^2 + 24 \cdot y + 16 + y^2 + 6 \cdot y + 9 - 5 = 0 \Rightarrow 10 \cdot y^2 + 30 \cdot y + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot y^2 + 30 \cdot y + 20 = 0 \;/ : 10 \Rightarrow y^2 + 3 \cdot y + 2 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y^2 + 3 \cdot y + 2 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 3 \;,\; c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 3 \;,\; c = 2 \\ y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-3\pm1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\frac{-3-1}{2} \\ y_2=\frac{-3+1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-\frac{4}{2} \\ y_2=-\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-\frac{4}{2} \\ y_2=-\frac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-2 \\ y_2=-1\end{array}\right\}.$$

Računamo x_1 i x_2.

- $\left.\begin{array}{l} y=-2 \\ x-3\cdot y-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow x-3\cdot(-2)-5=0 \Rightarrow x+6-5=0 \Rightarrow x=-6+5 \Rightarrow x_1=-1$

Prvo sjecište pravca i kružnice je točka D_1:

$$D_1(x,\ y)=D_1(-1,\ -2).$$

- $\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x-3\cdot y-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow x-3\cdot(-1)-5=0 \Rightarrow x+3-5=0 \Rightarrow x=-3+5 \Rightarrow x_2=2.$

Drugo sjecište pravca i kružnice je točka D_2:

$$D_2(x,\ y)=D_2(2,\ -1).$$

Tražena mjera kuta jednaka je u oba dirališta pa možemo odabrati bilo koju od točaka D_1 i D_2. Na primjer, jednadžba tangente u sjecištu D_1 je:

$$\left.\begin{array}{l} (x-1)^2+(y+3)^2=5 \\ p=1\ ,\ q=-3\ ,\ r^2=5 \\ D_1(x_\circ,\ y_\circ)=D_1(-1,\ -2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[(x_\circ-p)\cdot(x-p)+(y_\circ-q)\cdot(y-q)=r^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1-1)\cdot(x-1)+(-2+3)\cdot(y+3)=5 \Rightarrow -2\cdot(x-1)+1\cdot(y+3)=5 \Rightarrow -2\cdot x+2+y+3=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5+2\cdot x-2-3 \Rightarrow y=5+2\cdot x-2-3 \Rightarrow y=2\cdot x \Rightarrow k_1=2 \text{ koeficijent smjera tangente.}$$

Jednadžbu zadanog pravca napisat ćemo u eksplicitnom obliku kako bismo očitali njegov koeficijent smjera.

$$x-3\cdot y-5=0 \Rightarrow -3\cdot y=-x+5 \Rightarrow -3\cdot y=-x+5\ /:(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot x-\frac{5}{3}-3 \Rightarrow k_2=\frac{1}{3} \text{ koeficijent smjera pravca.}$$

Sada možemo odrediti kut između pravca i tangente:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=2 \\ k_2=\frac{1}{3}\end{array}\right] \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{1}{3}-2}{1+2\cdot\frac{1}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{1}}{1+\frac{2}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{2}{3}}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{1-6}{3}}{\frac{3+2}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=|-1| \Rightarrow tg\,\varphi=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi=tg^{-1}(1) \Rightarrow \varphi=45^\circ \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Vježba 230

Odredi kut pod kojim se sijeku kružnica $(x-1)^2+(y+3)^2=5$ i pravac $-x+3\cdot y+5=0.$

Rezultat: 45°.

Zadatak 231 (Željko, srednja škola)

Napiši jednadžbu hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ ako je jednadžba njezine asimptote $3 \cdot x - 2 \cdot y = 0,$ a jednadžba tangente $15 \cdot x - 8 \cdot y + 18 = 0.$

Rješenje 231

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Pravci koji sadrže dijagonale središnjeg pravokutnika s dimenzijama 2 · a i 2 · b zovu se asimptote i njihove jednadžbe glase:

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Uvjet dodira pravca i hiperbole

Pravac $y = k \cdot x + l$ dodiruje hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.
Iz jednadžbe asimptote hiperbole dobije se:

$$3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \Rightarrow -2 \cdot y = -3 \cdot x \Rightarrow -2 \cdot y = -3 \cdot x \ /:(-2) \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} y = \frac{b}{a} \cdot x \\ y = \frac{3}{2} \cdot x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \ /\cdot a \Rightarrow b = \frac{3}{2} \cdot a.$$

Jednadžbu tangente napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njezin koeficijent smjera k i odsječak na y osi l.

$$15 \cdot x - 8 \cdot y + 18 = 0 \Rightarrow -8 \cdot y = -15 \cdot x - 18 \Rightarrow -8 \cdot y = -15 \cdot x - 18 \ /:(-8) \Rightarrow y = \frac{15}{8} \cdot x + \frac{18}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{15}{8}\cdot x+\frac{18}{8}\ \Rightarrow\ y=\frac{15}{8}\cdot x+\frac{9}{4}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} k=\frac{15}{8} \\ l=\frac{9}{4}\end{matrix}\right\}.$$

Budući da tangenta mora zadovoljavati uvjet dodira pravca i hiperbole, slijedi:

$$a^2\cdot k^2-b^2=l^2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} k=\frac{15}{8}\ ,\ l=\frac{9}{4} \\ b=\frac{3}{2}\cdot a\end{bmatrix}\Rightarrow\ a^2\cdot\left(\frac{15}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\cdot a\right)^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2\cdot\frac{225}{64}-\frac{9}{4}\cdot a^2=\frac{81}{16}\ \Rightarrow\ \frac{225}{64}\cdot a^2-\frac{9}{4}\cdot a^2=\frac{81}{16}\ \Rightarrow\ \frac{225}{64}\cdot a^2-\frac{9}{4}\cdot a^2=\frac{81}{16}\ /\cdot 64\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 225\cdot a^2-144\cdot a^2=324\ \Rightarrow\ 81\cdot a^2=324\ \Rightarrow\ 81\cdot a^2=324\ /:81\ \Rightarrow\ a^2=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2=4\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ a=\sqrt{4}\ \Rightarrow\ a=2.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=\frac{3}{2}\cdot a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ b=\frac{3}{2}\cdot 2\ \Rightarrow\ b=\frac{3}{2}\cdot 2\ \Rightarrow\ b=3.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} b=3 \\ a=2\end{bmatrix}\Rightarrow\ 3^2\cdot x^2-2^2\cdot y^2=2^2\cdot 3^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 9\cdot x^2-4\cdot y^2=4\cdot 9\ \Rightarrow\ 9\cdot x^2-4\cdot y^2=36.$$

Vježba 231

Napiši jednadžbu hiperbole $b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$ ako je jednadžba njezine asimptote $-3\cdot x+2\cdot y=0,$ a jednadžba tangente $-15\cdot x+8\cdot y-18=0.$

Rezultat: $9\cdot x^2-4\cdot y^2=36.$

Zadatak 232 (Ivana, gimnazija)

Napiši jednadžbu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ kojoj su tangente pravci $9\cdot x+20\cdot y-75=0$ i $4\cdot x+5\cdot y-25=0.$

Rješenje 232

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{segmentni oblik, kanonski oblik}).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.

Pravac $y = k \cdot x + l$ dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Jednadžbe zadanih pravaca (tangenata) preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera k i odsječak na y osi l.

- $9 \cdot x + 20 \cdot y - 75 = 0 \Rightarrow 20 \cdot y = -9 \cdot x + 75 \Rightarrow 20 \cdot y = -9 \cdot x + 75 \ /: 20 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{9}{20} \cdot x + \frac{75}{20} \Rightarrow y = -\frac{9}{20} \cdot x + \frac{75}{20} \Rightarrow y = -\frac{9}{20} \cdot x + \frac{15}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = -\frac{9}{20} \\ l_1 = \frac{15}{4} \end{matrix}\right\}$$

- $4 \cdot x + 5 \cdot y - 25 = 0 \Rightarrow 5 \cdot y = -4 \cdot x + 25 \Rightarrow 5 \cdot y = -4 \cdot x + 25 \ /: 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{25}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{25}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \cdot x + 5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_2 = -\frac{4}{5} \\ l_2 = 5 \end{matrix}\right\}.$$

Budući da tangente moraju ispunjavati uvjet dodira pravca i elipse, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} k = -\frac{9}{20} \ , \ l = \frac{15}{4} \\ k = -\frac{4}{5} \ , \ l = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2 \\ a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 \cdot \left(-\frac{9}{20}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \\ a^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + b^2 = 5^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{81}{400} \cdot a^2 + b^2 = \frac{225}{16} \\ \frac{16}{25} \cdot a^2 + b^2 = 25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{81}{400} \cdot a^2 + b^2 = \frac{225}{16} \ / \cdot (-400) \\ \frac{16}{25} \cdot a^2 + b^2 = 25 \ / \cdot 400 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -81 \cdot a^2 - 400 \cdot b^2 = -5625 \\ 256 \cdot a^2 + 400 \cdot b^2 = 10000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 175 \cdot a^2 = 4375 \Rightarrow 175 \cdot a^2 = 4375 \ /: 175 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25.$$

Računamo b^2.

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 25 \\ \frac{16}{25} \cdot a^2 + b^2 = 25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{16}{25} \cdot 25 + b^2 = 25 \Rightarrow \frac{16}{25} \cdot 25 + b^2 = 25 \Rightarrow 16 + b^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Vježba 232

Napiši jednadžbu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kojoj su tangente pravci $-9 \cdot x - 20 \cdot y + 75 = 0$ i $-4 \cdot x - 5 \cdot y + 25 = 0.$

Rezultat: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Zadatak 233 (Ivana, gimnazija)

Odredi realni parametar m tako da pravac $3 \cdot x - y + m = 0$ bude tangenta elipse $16 \cdot x^2 + y^2 = 16.$

Rješenje 233

Ponovimo!

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^3 = a^2 \cdot b^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{segmentni oblik, kanonski oblik}).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.

Pravac $y = k \cdot x + l$ dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Preoblikujemo jednadžbu elipse.

$$16 \cdot x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow 16 \cdot x^2 + y^2 = 16 \;/ : 16 \Rightarrow \frac{16 \cdot x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16 \cdot x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \end{matrix}\right\}.$$

Jednadžbu pravca transformiramo u eksplicitni oblik kako bismo očitali k i l, njegov koeficijent smjera i odsječak na y osi.

$$3 \cdot x - y + m = 0 \Rightarrow -y = -3 \cdot x - m \Rightarrow -y = -3 \cdot x - m \;/ \cdot (-1) \Rightarrow y = 3 \cdot x + m \Rightarrow \left.\begin{matrix} k = 3 \\ l = m \end{matrix}\right\}.$$

Iz uvjeta dodira pravca i elipse dobije se:

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 = 1 \;,\; b = 16 \\ k = 3 \;,\; l = m \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \cdot 3^2 + 16 = m^2 \Rightarrow 9 + 16 = m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = m^2 \Rightarrow m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = 25 \;/ \sqrt{\;} \Rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{25} \Rightarrow m_{1,2} = \pm 5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} m_1 = 5 \\ m_2 = -5 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 233

Odredi realni parametar m tako da pravac $-3 \cdot x + y - m = 0$ bude tangenta elipse $16 \cdot x^2 + y^2 = 16.$

Rezultat: $m_1 = 5 \;,\; m_2 = -5.$

Zadatak 234 (Petar, gimnazija)

Točka T(27, 18) leži na paraboli $y^2 = 12 \cdot x$. Koliko je točka T udaljena od ravnalice (direktrise) te parabole?

$A.$ 30 jediničnih duljina $\quad B.$ 35 jediničnih duljina
$C.$ 39 jediničnih duljina $\quad D.$ 40 jediničnih duljina

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Ravnalica (direktrisa) ima jednadžbu:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, \ x \ge 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|\,x\,| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|\,x\,| = -x$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Najprije iz jednadžbe parabole odredimo parametar p.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \ /:2 \Rightarrow p = 6.$$

Napišemo jednadžbu ravnalice u implicitnom obliku.

$$x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \left[\, p = 6 \,\right] \Rightarrow x = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow$$

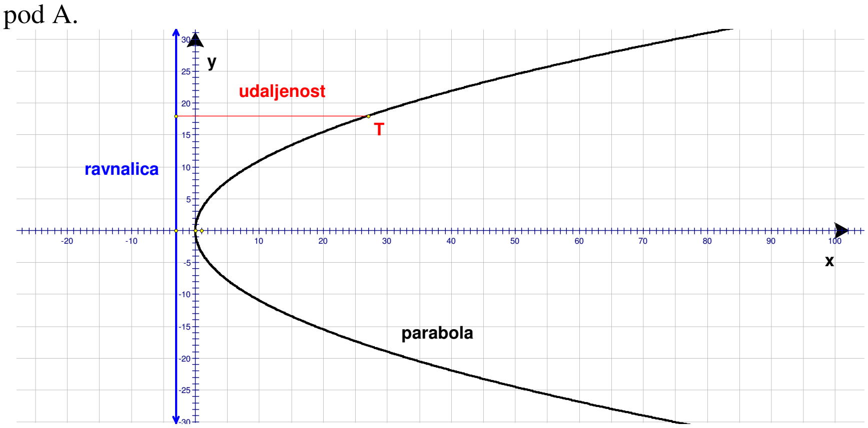
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 3 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 3 \end{array}\right\}.$$

Udaljenost točke T od ravnalice r iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_\circ, \ y_\circ\right) = T\left(27, \ 18\right) \\ A = 1 \ , \ B = 0 \ , \ C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, |T, \ r| = \frac{|A \cdot x_\circ + B \cdot y_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \,\right] \Rightarrow |T, \ r| = \frac{|1 \cdot 27 + 0 \cdot 18 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T, \ r| = \frac{|27 + 0 + 3|}{\sqrt{1 + 0}} \Rightarrow |T, \ r| = \frac{|30|}{\sqrt{1}} \Rightarrow |T, \ r| = \frac{30}{1} \Rightarrow |T, \ r| = 30.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 234

Odmor!

Rezultat: …