Zadatak 181 (Kristina, srednja škola)

Pravci t_1 … $5 \cdot x - 3 \cdot y - 32 = 0$ i t_2 … $17 \cdot x - 15 \cdot y - 64 = 0$ su tangente hiperbole h … $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$. Odredite jednadžbu pravca koji sadrži dirališta tih tangenata.

Rješenje 181

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right).$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \left(\text{kanonska jednadžba hiperbole}\right).$$

Za hiperbolu kažemo da je jednakostranična ako vrijedi a = b. Njezina je jednadžba onda:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Pravac $y = k \cdot x + l$ dira hiperbolu $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ onda i samo onda kad vrijedi:

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2.$$

Koordinate dirališta su:

$$D\left(-\frac{k \cdot a^2}{l}, -\frac{b^2}{l}\right).$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zadane pravce t_1 i t_2 napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova i odsječke na y osi.

- pravac t_1

$$5 \cdot x - 3 \cdot y - 32 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -5 \cdot x + 32 \Rightarrow -3 \cdot y = -5 \cdot x + 32 \ /:(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{5}{3}\cdot x-\frac{32}{3}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k=\frac{5}{3} \\ l=-\frac{32}{3} \end{array}\right\}$$

- pravac t_2

$$17\cdot x-15\cdot y-64=0\ \Rightarrow\ -15\cdot y=-17\cdot x+64\ \Rightarrow\ -15\cdot y=-17\cdot x+64\ /:(-15)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{17}{15}\cdot x-\frac{64}{15}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k=\frac{17}{15} \\ l=-\frac{64}{15} \end{array}\right\}.$$

Budući da su pravci t_1 i t_2 tangente hiperbole, iz uvjeta dodira pravca i hiperbole dobije se sustav jednadžbi iz kojega se izračunaju a^2 i b^2.

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{5}{3}\ ,\ l=-\frac{32}{3} \\ k=\frac{17}{15}\ ,\ l=-\frac{64}{15} \end{array}\right\}\Rightarrow\left[a^2\cdot k^2-b^2=l^2\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2-b^2=\left(-\frac{32}{3}\right)^2 \\ a^2\cdot\left(\frac{17}{15}\right)^2-b^2=\left(-\frac{64}{15}\right)^2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \frac{25}{9}\cdot a^2-b^2=\frac{1024}{9} \\ \frac{289}{225}\cdot a^2-b^2=\frac{4096}{225} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \frac{25}{9}\cdot a^2-b^2=\frac{1024}{9}\ /\cdot 9 \\ \frac{289}{225}\cdot a^2-b^2=\frac{4096}{225}\ /\cdot 225 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 25\cdot a^2-9\cdot b^2=1024 \\ 289\cdot a^2-225\cdot b^2=4096 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 25\cdot a^2-9\cdot b^2=1024\ /\cdot 289 \\ 289\cdot a^2-225\cdot b^2=4096\ /\cdot(-25) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 7225\cdot a^2-2601\cdot b^2=295936 \\ -7225\cdot a^2+5625\cdot b^2=-102400 \end{array}\right\}\Rightarrow\ 3024\cdot b^2=193536\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3024\cdot b^2=193536\ /:3024\ \Rightarrow\ b^2=64.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{array}{l} 25\cdot a^2-9\cdot b^2=1024 \\ b^2=64 \end{array}\right\}\Rightarrow\ 25\cdot a^2-9\cdot 64=1024\ \Rightarrow\ 25\cdot a^2-576=1024\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25\cdot a^2=1024+576\ \Rightarrow\ 25\cdot a^2=1600\ \Rightarrow\ 25\cdot a^2=1600\ /:25\ \Rightarrow\ a^2=64.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=64\ ,\ b^2=64 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{64}=1.$$

To je jednakostranična hiperbola jer je a = b.
Sada odredimo koordinate dirališta tangenata t_1 i t_2 sa hiperbolom.

$$\left.\begin{array}{l} k_1=\frac{5}{3}\ ,\ l_1=-\frac{32}{3}\ ,\ a^2=64\ ,\ b^2=64 \\ k_2=\frac{17}{15}\ ,\ l_2=-\frac{64}{15}\ ,\ a^2=64\ ,\ b^2=64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1\left(-\frac{k_1\cdot a^2}{l_1},-\frac{b^2}{l_1}\right) \\ D_2\left(-\frac{k_2\cdot a^2}{l_2},-\frac{b^2}{l_2}\right) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1\left(-\frac{\frac{5}{3}\cdot 64}{-\frac{32}{3}},-\frac{64}{-\frac{32}{3}}\right) \\ D_2\left(-\frac{\frac{17}{15}\cdot 64}{-\frac{64}{15}},-\frac{64}{-\frac{64}{15}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1\left(\frac{\frac{5}{3}\cdot 64}{\frac{32}{3}},\frac{64}{\frac{32}{3}}\right) \\ D_2\left(\frac{\frac{17}{15}\cdot 64}{\frac{64}{15}},\frac{64}{\frac{64}{15}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1\left(\frac{\frac{5}{3}\cdot 64}{\frac{32}{3}},\frac{\frac{64}{1}}{\frac{32}{3}}\right) \\ D_2\left(\frac{\frac{17}{15}\cdot 64}{\frac{64}{15}},\frac{\frac{64}{1}}{\frac{64}{15}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1(10,\ 6) \\ D_2(17,\ 15) \end{array}\right\}.$$

Tada jednadžba pravca točkama (diralištima tangenata) D_1 i D_2 glasi:

$$\left.\begin{array}{l} D_1(x_1,\ y_1)=D_1(10,\ 6) \\ D_2(x_2,\ y_2)=D_2(17,\ 15) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)\right] \Rightarrow y-6=\frac{15-6}{17-10}\cdot(x-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-6=\frac{9}{7}\cdot(x-10) \Rightarrow y-6=\frac{9}{7}\cdot x-\frac{90}{7} \Rightarrow y=\frac{9}{7}\cdot x-\frac{90}{7}+6 \Rightarrow y=\frac{9}{7}\cdot x-\frac{90}{7}+\frac{6}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{9}{7}\cdot x+\frac{-90+42}{7} \Rightarrow y=\frac{9}{7}\cdot x-\frac{48}{7}.$$

Vježba 181

Pravci t_1 … $\frac{x}{\frac{32}{5}}-\frac{y}{\frac{32}{3}}=1$ i t_2 … $\frac{x}{\frac{64}{17}}-\frac{y}{\frac{64}{15}}=1$ su tangente hiperbole h … $b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$. Odredite jednadžbu pravca koji sadrži dirališta tih tangenata.

Rezultat: $y=\frac{9}{7}\cdot x-\frac{48}{7}.$

Zadatak 182 (Ivona, ekonomska škola)

Odredi koordinate polovišta tetive hiperbole $x^2-16\cdot y^2=9$ koju sadrži pravac $x+y-4=0$.

Rješenje 182

Ponovimo!

Dužina koja spaja dvije točke hiperbole zove se tetiva**.**

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Najprije odredimo presjek pravca i hiperbole tako da riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ x^2 - 16 \cdot y^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 - y \\ x^2 - 16 \cdot y^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow (4 - y)^2 - 16 \cdot y^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 8 \cdot y + y^2 - 16 \cdot y^2 = 9 \Rightarrow 16 - 8 \cdot y + y^2 - 16 \cdot y^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15 \cdot y^2 - 8 \cdot y + 7 = 0 \Rightarrow -15 \cdot y^2 - 8 \cdot y + 7 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow 15 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 15 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 7 = 0 \\ a = 15 \ , \ b = 8 \ , \ c = -7 \end{array}\right\} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 15 \ , \ b = 8 \ , \ c = -7 \\ y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-7)}}{2 \cdot 15} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 420}}{30} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{484}}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-8 \pm 22}{30} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{-8 + 22}{30} \\ y_2 = \frac{-8 - 22}{30} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{14}{30} \\ y_2 = -\frac{30}{30} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{14}{30} \\ y_2 = -\frac{30}{30} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{7}{15} \\ y_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Računamo x.

- $\left.\begin{array}{l} x = 4 - y \\ y = \frac{7}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 - \frac{7}{15} \Rightarrow x = \frac{4}{1} - \frac{7}{15} \Rightarrow x = \frac{60 - 7}{15} \Rightarrow x = \frac{53}{15}.$

Prvo sjecište pravca i hiperbole je točka A sa koordinatama:

$$A(x, y) = A\left(\frac{53}{15}, \frac{7}{15}\right).$$

- $\left.\begin{array}{l} x = 4 - y \\ y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 - (-1) \Rightarrow x = 4 + 1 \Rightarrow x = 5.$

Drugo sjecište pravca i hiperbole je točka B sa koordinatama:

$$B(x, y) = B(5, -1).$$

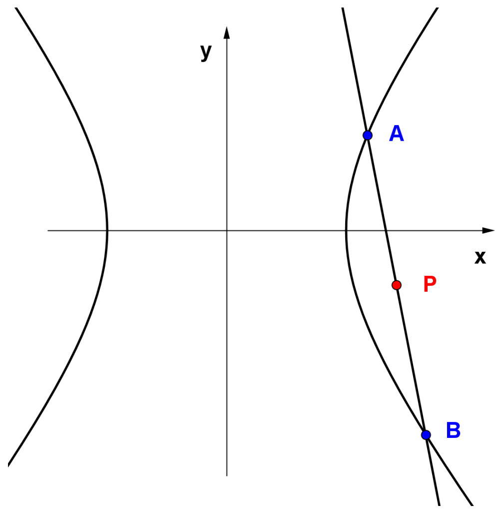
Tada polovište tetive (dužine) $\overline{AB}$ ima koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A\left(\frac{53}{15}, \frac{7}{15}\right) \\ B(x_2, y_2) = B(5, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\frac{53}{15}+5}{2}, \frac{\frac{7}{15}+(-1)}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\frac{53}{15}+\frac{5}{1}}{2}, \frac{\frac{7}{15}-\frac{1}{1}}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\frac{53+75}{15}}{2}, \frac{\frac{7-15}{15}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\frac{128}{15}}{2}, \frac{-\frac{8}{15}}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\frac{128}{15}}{\frac{2}{1}}, \frac{-\frac{8}{15}}{\frac{2}{1}}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\frac{128}{15}}{\frac{2}{1}}, \frac{-\frac{8}{15}}{\frac{2}{1}}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\frac{64}{15}}{\frac{1}{1}}, \frac{-\frac{4}{15}}{\frac{1}{1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{64}{15}, -\frac{4}{15}\right).$$



Vježba 182

Odredi koordinate polovišta tetive hiperbole $x^2 - 16 \cdot y^2 = 9$ koju sadrži pravac $y = -x + 4$.

Rezultat: $P\left(\frac{64}{15}, -\frac{4}{15}\right).$

Zadatak 183 (Ivona, ekonomska škola)

Žarišta elipse i jedno njezino tjeme vrhovi su jednakostraničnog trokuta ploštine $9 \cdot \sqrt{3}$. Odredi jednadžbu elipse.

Rješenje 183

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{array}{l}\text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik}\end{array}\right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta α = 60° i tri jednake stranice.
Ploština jednakostraničnog trokuta iznosi:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Visina jednakostraničnog trokuta iznosi:

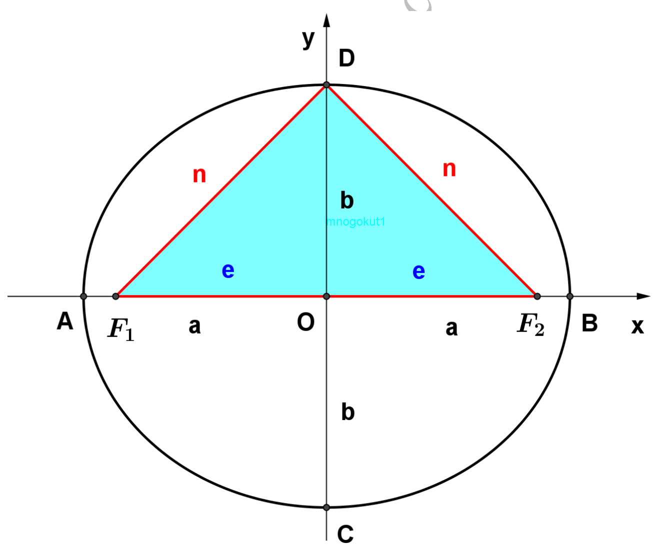
$$h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(a \cdot \sqrt{b}\right)^2 = a^2 \cdot b \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|F_1F_2\right| = n = 2 \cdot e \quad , \quad \left|F_1D\right| = \left|F_2D\right| = n \quad , \quad \left|OC\right| = \left|OD\right| = b \quad , \quad \left|OA\right| = \left|OB\right| = a$$

Iz ploštine jednakostraničnog trokuta ΔF_1F_2D izračunamo duljinu njegove stranice n.

$$P = \frac{n^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 9 \cdot \sqrt{3} = \frac{n^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{n^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{n^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \sqrt{3} \;/ \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow n^2 = 36 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow n = \sqrt{36} \Rightarrow n = 6.$$

Budući da je

$$n = 2 \cdot e,$$

linearni ekscentricitet iznosi

$$\left.\begin{array}{l} n = 2 \cdot e \\ n = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot e = 6 \Rightarrow 2 \cdot e = 6 \;/ : 2 \Rightarrow e = 3.$$

Duljina visine jednakostraničnog trokuta ΔF_1F_2D jednaka je duljini male poluosi elipse pa vrijedi:

$$b = \frac{n \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Računamo duljinu velike poluosi a elipse.

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = e^2 \Rightarrow a^2 = e^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + \left(3 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 + 3^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \cdot 3 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 36 \;/ \sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \;,\; b = 3 \cdot \sqrt{3} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{\left(3 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{3^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9 \cdot 3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Vježba 183

Žarišta elipse i jedno njezino tjeme vrhovi su jednakostraničnog trokuta ploštine $\sqrt{243}$. Odredi jednadžbu elipse.

Rezultat: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$

Zadatak 184 (Franjo, srednja škola)

Jednadžba tangente hiperbole $3 \cdot x^2 - y^2 = 3$ u njezinoj točki T(x, 3), x > 0 je:

$A.\; y = 2 \cdot x - 1 \qquad B.\; y = 3 \cdot x + 1 \qquad C.\; y = x + 2 \qquad D.\; y = 2 \cdot x + 1$

Rješenje 184

Ponovimo!

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\left(\text{kanonska jednadžba hiperbole}\right).$$

Jednadžba tangente na hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ u točki $T(x_0, y_0)$ te hiperbole glasi:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Budući da točka T pripada hiperboli, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu hiperbole kako bismo izračunali x.

$$\left. \begin{array}{l} T(x, y) = T(x, 3) \\ 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 3^2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 = 3 + 9 \Rightarrow 3 \cdot x^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x^2 = 12 \; / : 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\, x > 0 \,] \Rightarrow x = 2.$$

Točka T ima koordinate:

$$T(x, y) = T(2, 3).$$

Jednadžbu hiperbole preoblikujemo u kanonski oblik:

$$3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \; / \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{array} \right\}.$$

Jednadžba tangente hiperbole u njezinoj točki T glasi:

$$\left. \begin{array}{l} T(x_0, y_0) = T(2, 3) \\ a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \\ \frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{1} - \frac{3 \cdot y}{3} = 1 \Rightarrow 2 \cdot x - \frac{3 \cdot y}{3} = 1 \Rightarrow 2 \cdot x - y = 1 \Rightarrow -y = -2 \cdot x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y = -2 \cdot x + 1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow y = 2 \cdot x - 1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 184

Jednadžba tangente hiperbole $3 \cdot x^2 - y^2 - 3 = 0$ u njezinoj točki T(x, 3), x > 0 je:

$A.\; y = 2 \cdot x - 1 \qquad B.\; y = 3 \cdot x + 1 \qquad C.\; y = x + 2 \qquad D.\; y = 2 \cdot x + 1$

Rezultat: A.

Zadatak 185 (Matea, ekonomska škola)

Odredi nepoznatu koordinatu točke T(x, 1) tako da pripada paraboli $y^2 = 4 \cdot x$ te odredi jednadžbu ravnalice.

Rješenje 185

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Ravnalica (direktrisa) ima jednadžbu:

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Budući da točka T pripada paraboli, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu parabole kako bismo izračunali x.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(x,\ 1) \\ y^2=4\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 1^2=4\cdot x \Rightarrow 1=4\cdot x \Rightarrow 4\cdot x=1 \Rightarrow 4\cdot x=1\ /:4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Točka T ima koordinate:

$$T(x,\ y)=T\left(\frac{1}{4},\ 1\right).$$

Iz jednadžbe parabole odredi se parametar p.

$$\left.\begin{array}{l} y^2=2\cdot p\cdot x \\ y^2=4\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot p=4 \Rightarrow 2\cdot p=4\ /:2 \Rightarrow p=2.$$

Ravnalica (direktrisa) ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ x=-\frac{p}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{2}{2} \Rightarrow x=-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow x=-1.$$

Vježba 185

Odredi nepoznatu koordinatu točke T(x, 2) tako da pripada paraboli $y^2 = 4 \cdot x$ te odredi jednadžbu ravnalice.

Rezultat: T(1, 2), x = – 1.

Zadatak 186 (Matea, ekonomska škola)

Odredi jednadžbu hiperbole kojoj pripadaju točke A(2, 1), B(10, 7).

Rješenje 186

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\quad ,\quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b\quad ,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2\quad \text{ili}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

Budući da točke A i B pripadaju hiperboli, uvrstit ćemo njihove koordinate u jednadžbu hiperbole. Tako dobijemo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(2,\ 1)\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ B(x,\ y)=B(10,\ 7)\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{10^2}{a^2}-\dfrac{7^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\ /\cdot(-49) \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{196}{a^2}+\dfrac{49}{b^2}=-49 \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{96}{a^2}=-48 \Rightarrow -\frac{96}{a^2}=-48\ /\cdot\left(-\frac{1}{96}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2=1.$$

Računamo b^2.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ a^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{2}-\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{2}-\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow 2-\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow -\frac{1}{b^2}=1-2 \Rightarrow -\frac{1}{b^2}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{b^2}=-1\ /\cdot(-1) \Rightarrow \frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=1.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=2\ ,\ b^2=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$$

2.inačica

Budući da točke A i B pripadaju hiperboli, uvrstit ćemo njihove koordinate u jednadžbu hiperbole. Tako dobijemo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(2,\ 1)\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ B(x,\ y)=B(10,\ 7)\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{10^2}{a^2}-\dfrac{7^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1 \end{array}\right\}.$$

Uvedemo nove nepoznanice u i v kako bismo se riješili razlomaka:

$$u=\frac{1}{a^2}\ ,\ v=\frac{1}{b^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{49}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ 100\cdot\dfrac{1}{a^2}-49\cdot\dfrac{1}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{a^2} \\ v=\dfrac{1}{b^2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot u-v=1 \\ 100\cdot u-49\cdot v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot u-v=1\ /\cdot(-49) \\ 100\cdot u-49\cdot v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -196\cdot u+49\cdot v=-49 \\ 100\cdot u-49\cdot v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -90 \cdot u = -48 \Rightarrow -96 \cdot u = -48 \; / \cdot \left(-\frac{1}{96}\right) \Rightarrow u = \frac{1}{2}.$$

Računamo v.

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot u - v = 1 \\ u = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - v = 1 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - v = 1 \Rightarrow 2 - v = 1 \Rightarrow -v = 1 - 2 \Rightarrow -v = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v = -1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow v = 1.$$

Sada računamo a^2 i b^2.

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{a^2} \;,\; u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{b^2} \;,\; v = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \end{array}\right\}.$$

Jednadžbu hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2 \;,\; b^2 = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

Vježba 186

Odredi jednadžbu hiperbole kojoj pripadaju točke A(2, 1), B(– 10, – 7).

Rezultat: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1.$

Zadatak 187 (Antonio, srednja škola)

Odredi skup točaka ravnine zadanih jednadžbom $9 \cdot x^2 - 16 \cdot y^2 - 18 \cdot x - 135 = 0.$

Rješenje 187

Ponovimo!

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Hiperbola kojoj je središte točka S(p, q), a osi paralelne s koordinatnim osima ima jednadžbu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$9 \cdot x^2 - 16 \cdot y^2 - 18 \cdot x - 135 = 0 \Rightarrow 9 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 16 \cdot y^2 - 135 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 9 - 9 - 16 \cdot y^2 - 135 = 0 \Rightarrow \left(9 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 9\right) - 9 - 16 \cdot y^2 - 135 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) - 9 - 16 \cdot y^2 - 135 = 0 \Rightarrow 9 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) - 16 \cdot y^2 = 9 + 135 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot (x-1)^2 - 16 \cdot y^2 = 144 \Rightarrow 9 \cdot (x-1)^2 - 16 \cdot y^2 = 144 \; / \cdot \frac{1}{144} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9 \cdot (x-1)^2}{144} - \frac{16 \cdot y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{9 \cdot (x-1)^2}{144} - \frac{16 \cdot y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hiperbola sa središtem S(1, 0).

Vježba 187

Odredi skup točaka ravnine zadanih jednadžbom $x^2 - 2 \cdot y^2 - 2 \cdot x - 3 = 0.$

Rezultat: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1.$ Hiperbola sa središtem S(1, 0).

Zadatak 188 (Nela, srednja škola)

Nađite presjek pravca x – 2 = 0 i parabole $y^2 = 8 \cdot x$.

Rješenje 188

Ponovimo!

Parabola kojoj se os podudara s x – osi koordinatnog sustava, vrh sa ishodištem, a fokus se nalazi na pozitivnom dijelu x – osi ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

pri čemu je p parametar parabole.

Pravac paralelan s osi parabole siječe je u jednoj točki. Međusobni položaji pravca koji nije paralelan osi parabole i parabole su sljedeći:

- sijeku se u dvije točke,
- diraju se u jednoj točki,
- ne sijeku se.

Presjek pravca i parabole određujemo rješavajući sustav jednadžbi s dvije jednadžbe i dvije nepoznanice x i y.

$$\left.\begin{matrix} x - 2 = 0 \\ y^2 = 8 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y^2 = 8 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow y^2 = 8 \cdot 2 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow y_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 4 \\ y_2 = -4 \end{matrix}\right\}.$$

Presjek pravca i parabole su točke: A(2, 4) i B(2, – 4).

Vježba 188

Nađite presjek pravca x – 1 = 0 i parabole $y^2 = 4 \cdot x$.

Rezultat: A(1, 2) i B(1, – 2).

Zadatak 189 (4A, TUPŠ)

Točka T(2, – 6) pripada krivulji $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Neka je t tangenta na tu kružnicu u točki T.

Odredite udaljenost tangente t od ishodišta koordinatnoga sustava.

Rješenje 189

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \left(\begin{matrix}\text{segmentni oblik,}\\ \text{kanonski oblik}\end{matrix}\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Jednadžba tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u točki $T(x_0, y_0)$ te elipse glasi:

$$\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Najprije odredimo jednadžbu elipse. Točka T pripada elipsi pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu elipse.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(2,\ -6) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2^2}{16}+\frac{(-6)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{16}+\frac{36}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{16}+\frac{36}{b^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{36}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{b^2}=1-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{36}{b^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{36}{b^2}=\frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{36}{b^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{36}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{36}=\frac{4}{3}\ /\cdot 36 \Rightarrow b^2=\frac{4}{3}\cdot 36 \Rightarrow b^2=\frac{4}{3}\cdot 36 \Rightarrow b^2=4\cdot 12 \Rightarrow b^2=48.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{48}=1.$$

Neka je t tangenta na tu krivulju (elipsu) u točki T. Njezina jednadžba je:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0,\ y_0)=T(2,\ -6) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{48}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1 \\ \frac{x_0\cdot x}{16}+\frac{y_0\cdot y}{48}=1 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{2\cdot x}{16}+\frac{-6\cdot y}{48}=1 \Rightarrow \frac{2\cdot x}{16}-\frac{6\cdot y}{48}=1 \Rightarrow$$

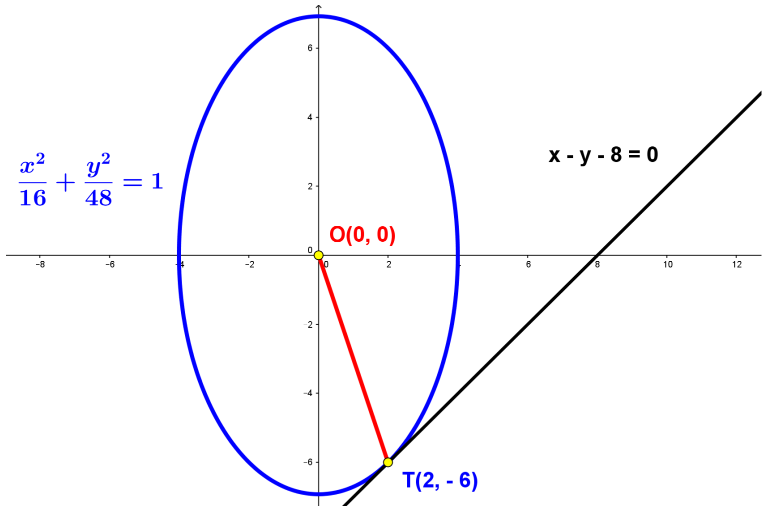
$$\Rightarrow \frac{x}{8}-\frac{y}{8}=1 \Rightarrow \frac{x}{8}-\frac{y}{8}=1\ /\cdot 8 \Rightarrow x-y=8 \Rightarrow x-y-8=0 - \text{tangenta } t.$$

Računamo udaljenost tangente t od ishodišta koordinatnoga sustava.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-8=0 \\ A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=-8 \\ O(x_0,\ y_0)=O(0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |Ot|=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \right] \Rightarrow |Ot|=\frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Ot|=\frac{|-8|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow |Ot|=\frac{|-8|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |Ot|=\frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Ot|=\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow |Ot|=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow |Ot|=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |Ot|=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |Ot|=4\cdot\sqrt{2}.$$



Vježba 189

Točka T(2, – 6) pripada krivulji $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{48}=1.$ Neka je t tangenta na tu kružnicu u točki T. Odredite udaljenost tangente t od ishodišta koordinatnoga sustava.

Rezultat: $4\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 190 (Luka, srednja škola)

Koliki mora biti parametar $m\in R$ da bi jednadžba $x^2+y^2-8\cdot x+12\cdot y+m=0$ bila jednadžba kružnice.

Rješenje 190

Ponovimo!

$$a>b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ a\cdot c<b\cdot c.$$

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\ ,\ r^2=p^2+q^2-c.$$

Iz zadane jednadžbe odredimo p, q i r^2.

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\\ x^2+y^2-8\cdot x+12\cdot y+m=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\\ x^2+y^2-8\cdot x+12\cdot y+m=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2\cdot p=-8\\ -2\cdot q=12\\ c=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2\cdot p=-8\ /:(-2)\\ -2\cdot q=12\ /:(-2)\\ c=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}p=4\\ q=-6\\ c=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[r^2=p^2+q^2-c\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=4^2+(-6)^2-m\ \Rightarrow\ r^2=16+36-m\ \Rightarrow\ r^2=52-m.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{matrix}p=4\ ,\ q=-6\ ,\ r^2=52-m\\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x-4)^2+(y-(-6))^2=52-m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y+6)^2=52-m.$$

Da bi to bila jednadžba kružnice mora biti

$$52-m>0\ \Rightarrow\ -m>-52\ \Rightarrow\ -m>-52\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ m<52.$$

Vježba 190

Koliki mora biti parametar $m\in R$ da bi jednadžba $x^2+y^2-6\cdot x+10\cdot y+m=0$ bila jednadžba kružnice.

Rezultat: m < 34.

Zadatak 191 (Matija, gimnazija)

Kut koji čine tangente iz točke T(– 14, – 2) na kružnicu $x^2 + y^2 = 100$ je

$$A.\ 30^0 \qquad B.\ 45^0 \qquad C.\ 60^0 \qquad D.\ 90^0$$

Rješenje 191

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(0, 0) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Tangenta kružnice je pravac koji s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku. Pravac s jednadžbom $y = k \cdot x + l$ dira kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ onda i samo onda ako vrijedi

$$r^2 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz točke izvan kružnice mogu se uvijek konstruirati dvije tangente. Budući da je tangenta pravac, napišimo njezinu jednadžbu u obliku $y = k \cdot x + l$. Brojeve k i l odredit ćemo iz sustava jednadžbi.

- Prva jednadžba dobije se iz uvjeta dodira pravca i kružnice.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ r^2 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2.$$

- Osim uvjeta dodira mora biti zadovoljen uvjet da pravac (tangenta) prolazi točkom T.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y) = T(-14,\ -2) \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow -2 = -14 \cdot k + l \;\Rightarrow\; -14 \cdot k + l = -2.$$

Iz sustava jednadžbi dovoljno je samo izračunati koeficijent smjera k kako bismo odredili kut koji čine tangente.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2 \\ -14 \cdot k + l = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2 \\ l = -2 + 14 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100 \cdot \left(1 + k^2\right) = l^2 \\ l = 14 \cdot k - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot \left(1+k^2\right) = (14 \cdot k - 2)^2 \Rightarrow 100 + 100 \cdot k^2 = 196 \cdot k^2 - 56 \cdot k + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 100 \cdot k^2 - 196 \cdot k^2 + 56 \cdot k - 4 = 0 \Rightarrow -96 \cdot k^2 + 56 \cdot k + 96 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -96 \cdot k^2 + 56 \cdot k + 96 = 0 \;/ : (-8) \Rightarrow 12 \cdot k^2 - 7 \cdot k - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12 \cdot k^2 - 7 \cdot k - 12 = 0 \\ a = 12 \;,\; b = -7 \;,\; c = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 12 \;,\; b = -7 \;,\; c = -12 \\ k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12)}}{2 \cdot 12} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{24} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm 25}{24} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{7+25}{24} \\ k_2 = \dfrac{7-25}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{32}{24} \\ k_2 = -\dfrac{18}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{32}{24} \\ k_2 = -\dfrac{18}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{4}{3} \\ k_2 = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Budući da za koeficijente smjerova k_1 i k_2 vrijedi

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1,$$

slijedi da su tangente međusobno okomite.
Odgovor je pod D.

Vježba 191

Kut koji čine tangente iz točke T(– 14, – 2) na kružnicu $2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 = 200$ je

$$A.\ 30^0 \qquad B.\ 45^0 \qquad C.\ 60^0 \qquad D.\ 90^0$$

Rezultat: D.

Zadatak 192 (Ivan, gimnazija)

Skup svih točaka T(x, y) ravnine takvih da je $x = 3 \cdot \sin \alpha,\ y = 2 \cdot \cos \alpha,\ 0 \le \alpha \le 2 \cdot \pi,$ jest elipsa čiji je linearni ekscentricitet jednak:

$$A.\ \sqrt{5} \qquad B.\ 3 \qquad C.\ \sqrt{13} \qquad D.\ 2$$

Rješenje 192

Ponovimo!

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{matrix} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{matrix} \right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\left. \begin{matrix} x = 3 \cdot \sin \alpha \\ y = 2 \cdot \cos \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 3 \cdot \sin \alpha \ / : 3 \\ y = 2 \cdot \cos \alpha \ / : 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{x}{3} = \sin \alpha \\ \frac{y}{2} = \cos \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{x}{3} = \sin \alpha \ /^2 \\ \frac{y}{2} = \cos \alpha \ /^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \left(\frac{x}{3} \right)^2 = \sin^2 \alpha \\ \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \cos^2 \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{x^2}{9} = \sin^2 \alpha \\ \frac{y^2}{4} = \cos^2 \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{matrix} \right] \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[e = \sqrt{a^2 - b^2} \right] \Rightarrow e = \sqrt{9 - 4} \Rightarrow e = \sqrt{5}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 192

Skup svih točaka T(x, y) ravnine takvih da je $x = 4 \cdot \sin \alpha, \ y = 3 \cdot \cos \alpha, \ 0 \le \alpha \le 2 \cdot \pi,$ jest elipsa čiji je linearni ekscentricitet jednak:

$$A. \sqrt{6} \qquad B. \ 4 \qquad C. \sqrt{7} \qquad D. \ 2$$

Rezultat: C.

Zadatak 193 (4A, TUPŠ)

Odredite jednadžbu hiperbole kojoj je asimptota pravac y = 2 · x i koja prolazi točkom T(5, 8).

Rješenje 193

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Pravci koji sadrže dijagonale središnjeg pravokutnika s dimenzijama 2 · a i 2 · b zovu se asimptote i njihove jednadžbe glase:

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Budući da je zadana asimptota hiperbole, dobije se:

$$\left. \begin{matrix} y = 2 \cdot x \\ y = \frac{b}{a} \cdot x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \ / \cdot a \Rightarrow b = 2 \cdot a.$$

Točka T pripada hiperbole pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu hiperbole i izračunati a i b.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(5,\ 8) \\ b=2\cdot a \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5^2}{a^2}-\frac{8^2}{(2\cdot a)^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{64}{4\cdot a^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{64}{4\cdot a^2}=1 \ /\cdot 4\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100-64=4\cdot a^2 \Rightarrow 36=4\cdot a^2 \Rightarrow 4\cdot a^2=36 \Rightarrow 4\cdot a^2=36 \ /:4 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=9 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=\pm\sqrt{9} \Rightarrow a=\pm 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ a=-3 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow a=3.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} b=2\cdot a \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow b=2\cdot 3 \Rightarrow b=6.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ b=6 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{6^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Vježba 193

Odredite jednadžbu hiperbole kojoj je asimptota pravac y = 2 · x i koja prolazi točkom T(– 5, – 8).

Rezultat: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1.$

Zadatak 194 (Ivana, gimnazija)

Tijelo kreće iz točke A(4, – 5) i giba se po kružnici sa središtem u S(3, 2) u **pozitivnom** smjeru do točke B(x, y). Duljina kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ je $l=\left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}$.

Odredite koordinate točke B.

Rješenje 194

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_A,\ y_A)$ i $B(x_B,\ y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki A(x_1, y_1) i završetkom u točki B(x_2, y_2) ima prikaz

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}.$$

Ako su vektori zadani u koordinatnom sustavu, tada se skalarni produkt definira na ovaj način:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

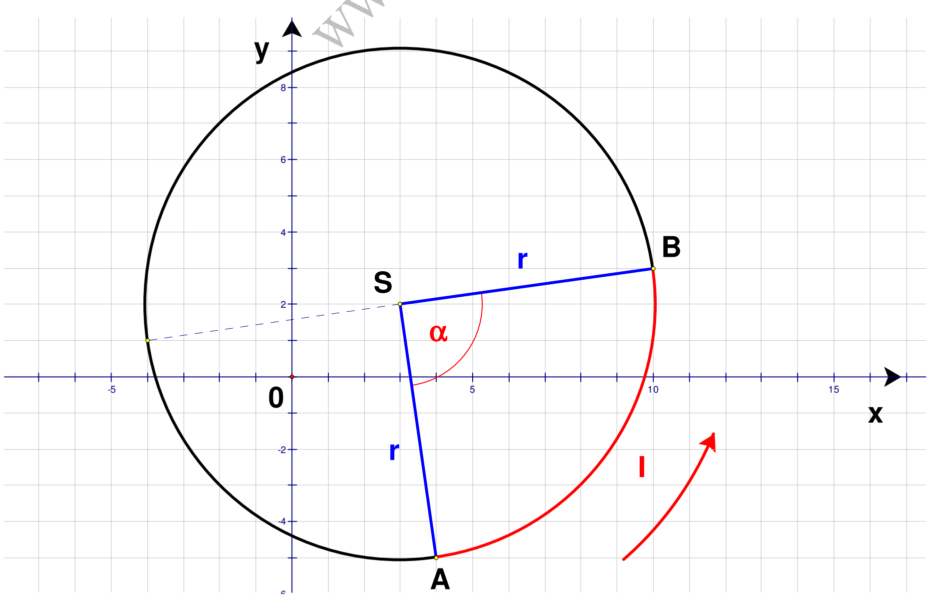
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$



1.inačica
Polumjer kružnice možemo odrediti iz udaljenosti točaka S i A.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(3, 2) \\ A(x_2, y_2) = A(4, -5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r = |SA| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(4-3)^2 + (-5-2)^2} \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (-7)^2} \Rightarrow r = \sqrt{1+49} \Rightarrow r = \sqrt{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array} \right] \Rightarrow r = \sqrt{25 \cdot 2} \Rightarrow r = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow r = 5 \cdot \sqrt{2}.$$

Sa slike vidi se da kružnom luku $\overset{\frown}{AB}$ pripada središnji kut α čija mjera iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} l = \dfrac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} \\ l = \dfrac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{2} \Rightarrow \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{2} \; / \cdot \frac{180^\circ}{r \cdot \pi} \Rightarrow \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot 90^\circ}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[r = 5 \cdot \sqrt{2} \right] \Rightarrow \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot 90^\circ}{5 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\cancel{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot 90^\circ}{\cancel{5 \cdot \sqrt{2}}} \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

Budući da je središnji kut α pravi kut, radijus vektori $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$ su međusobno okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak nuli. Odredimo vektore $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$.

- $$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(3, 2) \\ A(x_2, y_2) = A(4, -5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} \right] \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \overrightarrow{SA} = (4-3) \cdot \vec{i} + (-5-2) \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{SA} = \vec{i} - 7 \cdot \vec{j}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(3, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} \right] \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \overrightarrow{SB} = (x-3) \cdot \vec{i} + (y-2) \cdot \vec{j}.$$

Vektori $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$ su međusobno okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak nuli.

$$\overrightarrow{SA} \circ \overrightarrow{SB} = 0 \Rightarrow \left(\vec{i} - 7 \cdot \vec{j} \right) \circ \left((x-3) \cdot \vec{i} + (y-2) \cdot \vec{j} \right) = 0 \Rightarrow 1 \cdot (x-3) - 7 \cdot (y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 - 7 \cdot y + 14 = 0 \Rightarrow x - 7 \cdot y = 3 - 14 \Rightarrow x - 7 \cdot y = -11.$$

Kružnica je zadana središtem S i polumjerom r pa njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p, q) = S(3, 2) \\ r = 5 \cdot \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \right] \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = \left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 50.$$

Točka B je sjecište pravca

$$x - 7 \cdot y = -11$$

i kružnice

$$(x-3)^2+(y-2)^2=50.$$

Koordinate točke B rješenja su sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} x-7\cdot y=-11 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7\cdot y-11-3)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow (7\cdot y-14)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49\cdot y^2-196\cdot y+196+y^2-4\cdot y+4=50 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+200=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+200-50=0 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \;/:50 \Rightarrow y^2-4\cdot y+3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2-4\cdot y+3=0 \\ a=1\;,\; b=-4\;,\; c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\;,\; b=-4\;,\; c=3 \\ y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{4+2}{2} \\ y_2=\dfrac{4-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=1 \end{array}\right\}.$$

Računamo x_1 i x_2.

$$\left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow [\,x=7\cdot y-11\,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7\cdot 3-11 \\ x_2=7\cdot 1-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=21-11 \\ x_2=7-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=-4 \end{array}\right\}.$$

Postoje dvije točke:

- $\left.\begin{array}{l} x_1=10 \\ y_1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow B_1(x_1,\; y_1)=B_1(10,\; 3)$
- $\left.\begin{array}{l} x_2=-4 \\ y_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow B_2(x_2,\; y_2)=B_2(-4,\; 1).$

Budući da se u zadatku spominje pozitivna orijentacija sa slike vidi se da je rješenje točka:

$$B(x,\; y)=B(10,\; 3).$$

2.inačica

Polumjer kružnice možemo odrediti iz udaljenosti točaka S i A.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\; y_1)=S(3,\; 2) \\ A(x_2,\; y_2)=A(4,\; -5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\; r=|SA|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \;\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(4-3)^2+(-5-2)^2} \Rightarrow r=\sqrt{1^2+(-7)^2} \Rightarrow r=\sqrt{1+49} \Rightarrow r=\sqrt{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow r=\sqrt{25\cdot 2} \Rightarrow r=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow r=5\cdot\sqrt{2}.$$

Sa slike vidi se da kružnom luku $\overset{\frown}{AB}$ pripada središnji kut α čija mjera iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} l=\dfrac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^\circ} \\ l=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^\circ}=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \Rightarrow \frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^\circ}=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \;/\cdot\frac{180^\circ}{r\cdot\pi} \Rightarrow \alpha=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot 90^\circ}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[r=5\cdot\sqrt{2}\right] \Rightarrow \alpha=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot 90^\circ}{5\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot 90^\circ}{5\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha=90^\circ.$$

Uočimo da su pravci SA i SB međusobno okomiti pa su njihovi koeficijenti smjerova recipročni i suprotnih predznaka.
Odredimo koeficijent smjera pravca SA.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\, y_1)=S(3,\,2) \\ A(x_2,\, y_2)=A(4,\,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] \Rightarrow k_1=\frac{-5-2}{4-3} \Rightarrow k_1=\frac{-7}{1} \Rightarrow k_1=-7.$$

Koeficijent smjera pravca SB iznosi:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{-7} \Rightarrow k_2=\frac{1}{7}.$$

Nađemo jednadžbu pravca određenog točkom S i koeficijentom smjera k_2.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\, y_1)=S(3,\,2) \\ k_2=\dfrac{1}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y-y_1=k_2\cdot(x-x_1)\right] \Rightarrow y-2=\frac{1}{7}\cdot(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2=\frac{1}{7}\cdot(x-3) \;/\cdot 7 \Rightarrow 7\cdot(y-2)=x-3 \Rightarrow 7\cdot y-14=x-3 \Rightarrow x-3=7\cdot y-14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3-7\cdot y+14=0 \Rightarrow x-7\cdot y+11=0.$$

Kružnica je zadana središtem S i polumjerom r pa njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\,q)=S(3,\,2) \\ r=5\cdot\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\right] \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=5^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=50.$$

Točka B je sjecište pravca

$$x-7\cdot y+11=0$$

i kružnice

$$(x-3)^2+(y-2)^2=50.$$

Koordinate točke B rješenja su sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} x-7\cdot y+11=0 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7\cdot y-11-3)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow (7\cdot y-14)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49\cdot y^2-196\cdot y+196+y^2-4\cdot y+4=50 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+200=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+200-50=0 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \;/:50 \Rightarrow y^2-4\cdot y+3=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y^2-4\cdot y+3=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \\ y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\dfrac{4+2}{2} \\ y_2=\dfrac{4-2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=1\end{matrix}\right\}.$$

Računamo x_1 i x_2.

$$\left.\begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\,x=7\cdot y-11\,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=7\cdot 3-11 \\ x_2=7\cdot 1-11\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=21-11 \\ x_2=7-11\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=10 \\ x_2=-4\end{matrix}\right\}.$$

Postoje dvije točke:

- $\left.\begin{matrix} x_1=10 \\ y_1=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1(x_1,\ y_1)=B_1(10,\ 3)$
- $\left.\begin{matrix} x_2=-4 \\ y_2=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow B_2(x_2,\ y_2)=B_2(-4,\ 1).$

Budući da se u zadatku spominje pozitivna orijentacija sa slike vidi se da je rješenje točka:

$$B(x,\ y)=B(10,\ 3).$$

Vježba 194

Tijelo kreće iz točke A(4, – 5) i giba se po kružnici sa središtem u S(3, 2) u **negativnom** smjeru do točke B(x, y). Duljina kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ je $l=\left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}$.

Odredite koordinate točke B.

Rezultat: $B(-4,\ 1)$.

Zadatak 195 (4A, TUPŠ)

Točka S(– 2, 3) je središte kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

$$A.\ (x+2)^2+(y-3)^2=13 \qquad B.\ (x+2)^2+(y-3)^2=5$$
$$C.\ (x-2)^2+(y+3)^2=13 \qquad D.\ (x-2)^2+(y+3)^2=5$$

Rješenje 195

Ponovimo!

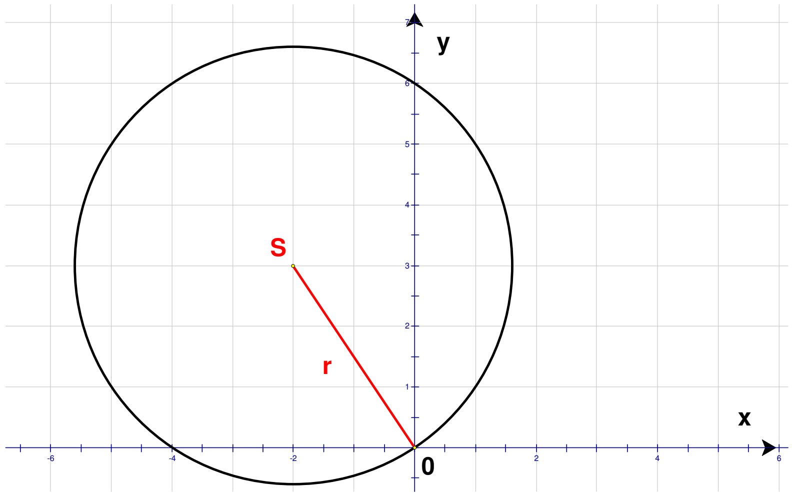
$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Udaljenost točaka $A(x_A,\ y_A)$ i $B(x_B,\ y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke te ravnine (središta). Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$



1.inačica

Budući da kružnica sa središtem S prolazi ishodištem koordinatnog sustava O(0, 0), njezin polumjer r jednak je udaljenosti između točaka S i O.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\ y_1)=S(-2,\ 3) \\ O(x_2,\ y_2)=O(0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r=|SO|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(0-(-2))^2+(0-3)^2} \Rightarrow r=\sqrt{(0+2)^2+(0-3)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2^2+(-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{4+9} \Rightarrow r=\sqrt{13}.$$

Kružnica je zadana središtem S i polumjerom r pa njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\ q)=S(-2,\ 3) \\ r=\sqrt{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \right] \Rightarrow (x-(-2))^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=13.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Budući da je točka S središte kružnice, a r polumjer, njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\ q)=S(-2,\ 3) \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-(-2))^2+(y-3)^2=r^2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=r^2.$$

Da bismo odredili polumjer r kružnice uvrstit ćemo koordinate ishodišta O, kojim kružnica prolazi, u njezinu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} O(x,\ y)=O(0,\ 0) \\ (x+2)^2+(y-3)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (0+2)^2+(0-3)^2=r^2 \Rightarrow 2^2+(-3)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+9=r^2 \Rightarrow 13=r^2 \Rightarrow r^2=13.$$

Dakle, jednadžba kružnice je

$$(x+2)^2+(y-3)^2=13.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 195

Točka S(2, – 3) je središte kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

$$A.\ (x+2)^2+(y-3)^2=13 \qquad B.\ (x+2)^2+(y-3)^2=5$$

$$C.\ (x-2)^2+(y+3)^2=13 \qquad D.\ (x-2)^2+(y+3)^2=5$$

Rezultat: C.

Zadatak 196 (Sandra, maturantica)

Halleyev komet giba se oko Sunca po eliptičnoj stazi kojoj je numerički ekscentricitet ε = 0.967. Sunce se nalazi u žarištu (fokusu) te elipse. Najmanja udaljenost kometa od Sunca je $8.75 \cdot 10^{10}$ m. Koliko iznosi najveća udaljenost Halleyeva kometa od Sunca? Napomena: Numerički ekscentricitet ε računa se prema formuli $\varepsilon=\frac{e}{a}$.

Rješenje 196

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2+a^2 \cdot y^2=a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

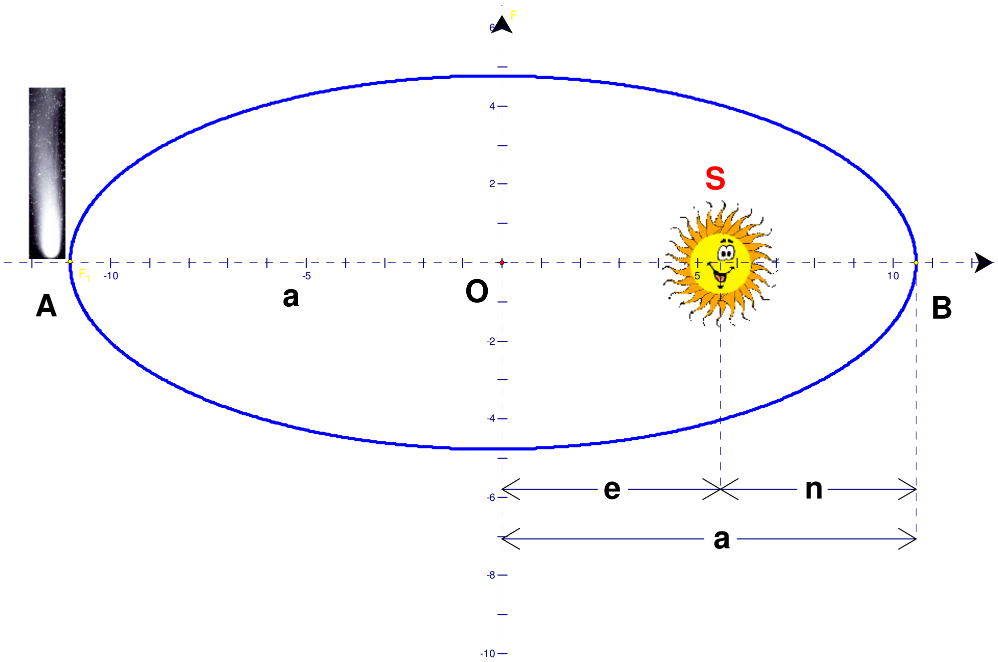
Numerički ekscentricitet elipse:

$$\varepsilon=\frac{e}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 2 \cdot a \quad , \quad |AO| = |OB| = a \quad , \quad |OS| = e \quad , \quad |SB| = n$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a-n}{a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a-n}{a} \; / \cdot a \Rightarrow a \cdot \varepsilon = a - n \Rightarrow a - n = a \cdot \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - a \cdot \varepsilon = n \Rightarrow a \cdot (1-\varepsilon) = n \Rightarrow a \cdot (1-\varepsilon) = n \; / \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \Rightarrow a = \frac{n}{1-\varepsilon}.$$

Najveća udaljenost $|AS|$ Halleyeva kometa od Sunca iznosi:

$$|AS| = |AB| - |SB| \Rightarrow |AS| = 2 \cdot a - n \Rightarrow |AS| = 2 \cdot \frac{n}{1-\varepsilon} - n \Rightarrow |AS| = n \cdot \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AS| = n \cdot \left(\frac{2}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1} \right) \Rightarrow |AS| = n \cdot \frac{2-(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \Rightarrow |AS| = n \cdot \frac{2-1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AS| = n \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow |AS| = 8.75 \cdot 10^{10} \; m \cdot \frac{1+0.967}{1-0.967} \Rightarrow |AS| = 5.2155 \cdot 10^{12} \; m.$$

Vježba 196

Halleyev komet giba se oko Sunca po eliptičnoj stazi kojoj je numerički ekscentricitet $\varepsilon = 0.967$. Sunce se nalazi u žarištu (fokusu) te elipse. Najmanja udaljenost kometa od Sunca je $8.75 \cdot 10^7$ km. Koliko iznosi najveća udaljenost Halleyeva kometa od Sunca? Napomena: Numerički ekscentricitet ε računa se prema formuli $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Rezultat: $5.2155 \cdot 10^{12} \; m.$

Zadatak 197 (Sandra, maturantica)

Kružnica u prvome kvadrantu ima polumjer 4 i dira os ordinata u točki A(0, 5). Napiši jednadžbu te kružnice.

Rješenje 197

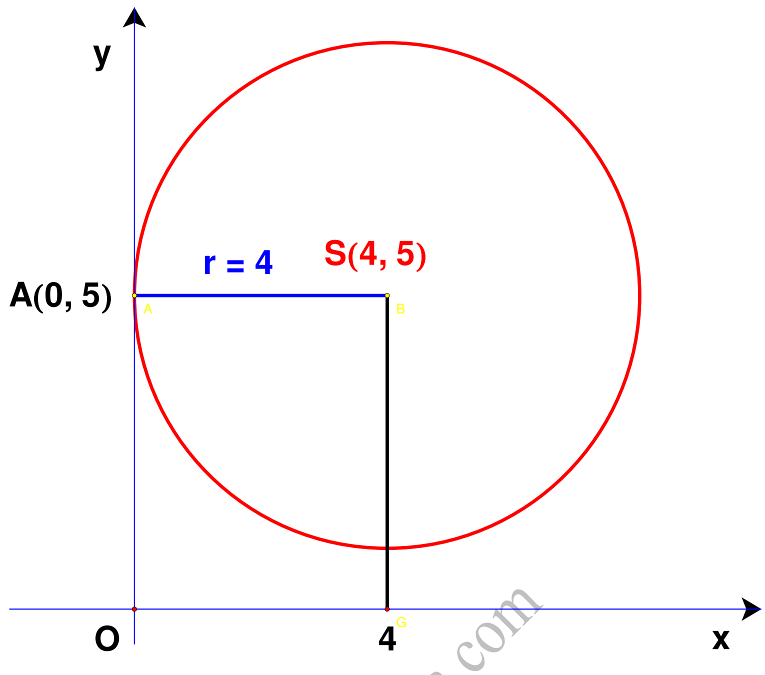
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Prema uvjetima zadatka napravimo skicu.



Sa slike vidi se:

$$r=4 \ , \ S(p, q)=S(4, 5)$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} p=4 \\ q=5 \\ r=4 \end{bmatrix} \Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=16.$$

Vježba 197

Kružnica u drugome kvadrantu ima polumjer 4 i dira os ordinata u točki A(0, 5). Napiši jednadžbu te kružnice.

Rezultat: $(x+4)^2+(y-5)^2=16.$

Zadatak 198 (Helena, gimnazija)

Luk na ulazu u tunel ima oblik poluelipse. Pri zemlji je širok 12 m, a maksimalna mu je visina 4.5 m. Iznad točke na zemlji, koja je udaljena 2 m od desnog ruba tunela, na luku je postavljena sigurnosna kamera. Na kojoj je visini postavljena ta kamera?

Rješenje 198

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array} \right).$$

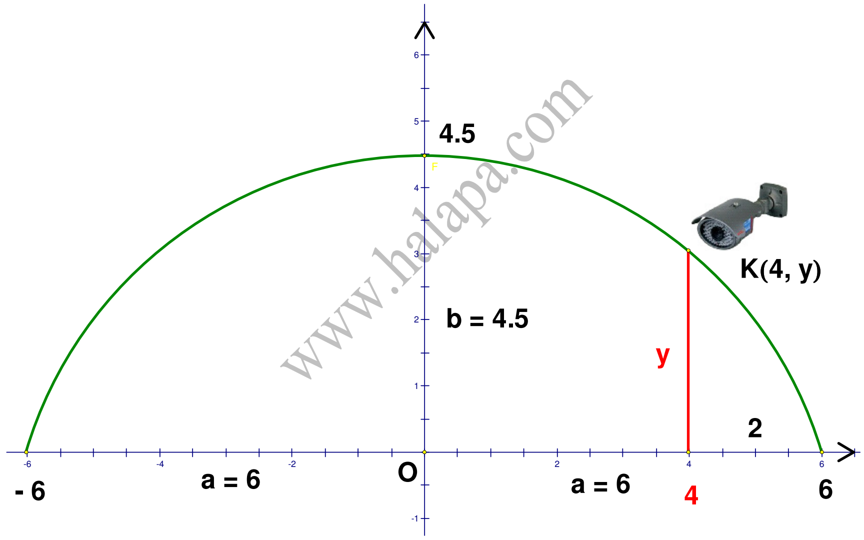
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Luk na ulazu u tunel smjestimo u koordinatni sustav.



Budući da luk na ulazu tunela ima oblik poluelipse, velika os elipse je 12, a mala poluos 4.5.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot a = 12 \\ b = 4.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot a = 12 \; /:2 \\ b = \frac{45}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 6 \\ b = \frac{45}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 6 \\ b = \frac{9}{2} \end{array} \right\}.$$

U tom slučaju jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{81}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{4 \cdot y^2}{81} = 1.$$

Sa slike vidi se da je kamera postavljena u točki čija je apscisa

$$x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4,$$

a ordinata y je nepoznanica. Visina na koju je postavljena kamera je tražena ordinata y i ona iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} K(x,\ y)=K(4,\ y) \\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{4\cdot y^2}{81}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{koordinate točke K} \\ \text{uvrstimo u jednadžbu elipse}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{4^2}{36}+\frac{4\cdot y^2}{81}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{36}+\frac{4\cdot y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{16}{36}+\frac{4\cdot y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{4}{9}+\frac{4\cdot y^2}{81}=1 \Rightarrow \frac{4\cdot y^2}{81}=1-\frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot y^2}{81}=\frac{1}{1}-\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4\cdot y^2}{81}=\frac{9-4}{9} \Rightarrow \frac{4\cdot y^2}{81}=\frac{5}{9} \Rightarrow \frac{4\cdot y^2}{81}=\frac{5}{9}\ /\cdot\frac{81}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{5}{9}\cdot\frac{81}{4} \Rightarrow y^2=\frac{5}{9}\cdot\frac{81}{4} \Rightarrow y^2=\frac{5}{1}\cdot\frac{9}{4} \Rightarrow y^2=\frac{9}{4}\cdot 5 \Rightarrow y^2=\frac{9}{4}\cdot 5\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{\frac{9}{4}\cdot 5} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{5} \Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\ m \Rightarrow y=3.35\ m.$$

Vježba 198

Luk na ulazu u tunel ima oblik poluelipse. Pri zemlji je širok 120 dm, a maksimalna mu je visina 45 dm. Iznad točke na zemlji, koja je udaljena 2 m od desnog ruba tunela, na luku je postavljena sigurnosna kamera. Na kojoj je visini postavljena ta kamera?

Rezultat: 3.35 m.

Zadatak 199 (Sanja, gimnazija)

Kružnica prolazi točkama s koordinatama A(– 3, 4), B(1, 2) i C(1, 0). U kojoj od ponuđenih točaka se nalazi središte te kružnice?

$A.\ S(0,\ 0) \qquad B.\ S(-2,\ 1) \qquad C.\ S(1,\ 1) \qquad D.\ S(-1,\ 2)$

Rješenje 199

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

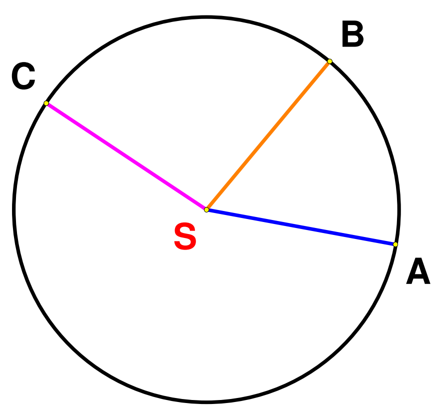
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je S(p, q) središte kružnice

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Budući da kružnica prolazi točkama A, B i C, one su jednako udaljene od središta S.



Kada se uvrste koordinate zadane tri točke A, B i C u jednadžbu kružnice njezina lijeva strana jednadžbe mora imati jednake vrijednosti.
Provjerimo prvo moguće središte S(0, 0).

$$(x-p)^2+(y-q)^2=\left[\,S(p,\,q)=S(0,\,0)\,\right]=(x-0)^2+(y-0)^2=x^2+y^2=$$

$$=\begin{bmatrix} A(x,\,y)=A(-3,\,4) \\ B(x,\,y)=B(1,\,2) \\ C(x,\,y)=C(1,\,0) \end{bmatrix}=\left.\begin{matrix} (-3)^2+4^2=9+16=25 \\ 1^2+2^2=1+4=5 \\ 1^2+0^2=1+0=1 \end{matrix}\right\}.$$

Točka S(0, 0) nije središte kružnice.
Provjerimo drugo moguće središte S(– 2, 1).

$$(x-p)^2+(y-q)^2=\left[\,S(p,\,q)=S(-2,\,1)\,\right]=(x-(-2))^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2=$$

$$=\begin{bmatrix} A(x,\,y)=A(-3,\,4) \\ B(x,\,y)=B(1,\,2) \\ C(x,\,y)=C(1,\,0) \end{bmatrix}=\left.\begin{matrix} (-3+2)^2+(4-1)^2=(-1)^2+3^2=1+9=10 \\ (1+2)^2+(2-1)^2=3^2+1^2=9+1=10 \\ (1+2)^2+(0-1)^2=3^2+(-1)^2=9+1=10 \end{matrix}\right\}.$$

Točka S(– 2, 1) je središte kružnice.
Odgovor je pod B.

Vježba 199

Kružnica prolazi točkama s koordinatama A(– 3, 1), B(3, – 1) i C(3, 1). U kojoj od ponuđenih točaka se nalazi središte te kružnice?

$$A.\ S(0,\,0) \qquad B.\ S(-2,\,1) \qquad C.\ S(1,\,1) \qquad D.\ S(-1,\,2)$$

Rezultat: A.

Zadatak 200 (Ivan, tehnička škola)

Kružnica je zadana jednadžbom $(x-4)^2+(y+6)^2=4$. Odredite sve vrijednosti realnog broja c ako je pravac $3\cdot x+2\cdot y=c$ tangenta te kružnice.

Rješenje 200

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ i pravac $y=k\cdot x+l$ dodiruju se ako i samo ako vrijedi

$$r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Za kružnicu

$$(x-4)^2+(y+6)^2=4$$

vrijedi:

$$S(p,q)=S(4,-6) \ , \ r^2=4.$$

Zadanu jednadžbu pravca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijent smjera k i odsječak na y osi l.

$$3\cdot x+2\cdot y=c \Rightarrow 2\cdot y=-3\cdot x+c \Rightarrow 2\cdot y=-3\cdot x+c \ /:2 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{c}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k=-\frac{3}{2} \\ l=\frac{c}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Iz uvjeta dodira pravca i kružnice dobije se:

$$r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2 \Rightarrow \left[\begin{matrix} r^2=4 \ , \ k=-\frac{3}{2} \\ q=-6 \ , \ p=4 \ , \ l=\frac{c}{2}\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)=\left(-\frac{3}{2}\cdot 4-(-6)+\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\cdot\left(1+\frac{9}{4}\right)=\left(-\frac{3}{2}\cdot 4+6+\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+9=\left(-6+6+\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 13=\left(-6+6+\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 13=\left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2=13 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \frac{c}{2}=\pm\sqrt{13} \Rightarrow \frac{c}{2}=\pm\sqrt{13} \ /\cdot 2 \Rightarrow c=\pm 2\cdot\sqrt{13}.$$

Vježba 200

Kružnica je zadana jednadžbom $(x-4)^2+(y+6)^2-4=0$. Odredite sve vrijednosti realnog broja c ako je pravac $3\cdot x+2\cdot y-c=0$ tangenta te kružnice.

Rezultat: $c=\pm 2\cdot\sqrt{13}.$