Zadatak 141 (Vlado, srednja škola)

Poprečni presjek rakete je u obliku elipse kojoj je velika os 4.8 m, a mala 4.2 m. U nju treba staviti meteorološki satelit koji je u presjeku pravokutnog oblika. Koliko najviše satelit može biti širok ako mu je duljina 4.4 m?

Rješenje 141

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

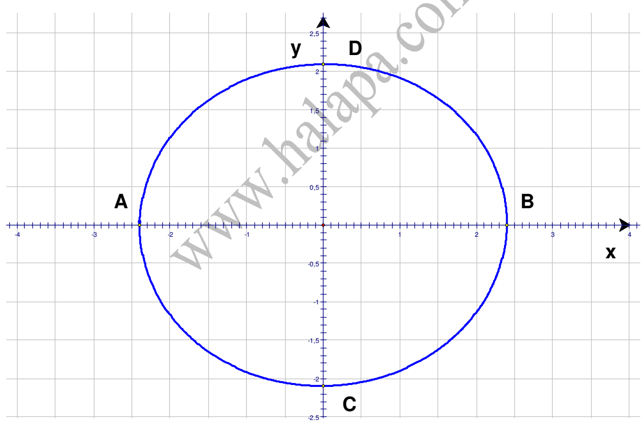
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Zadane su velika i mala os elipse pa njezina jednadžba glasi:

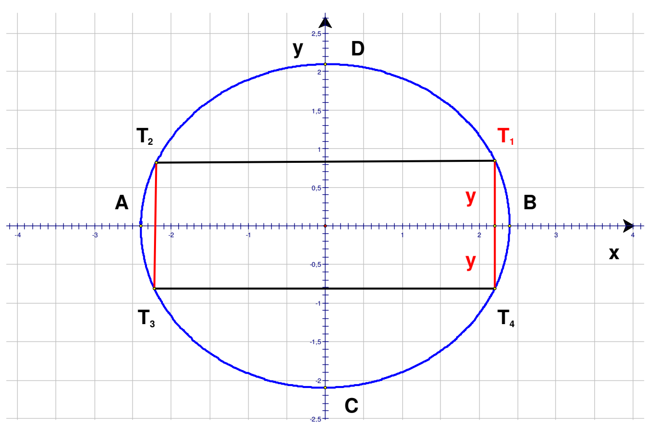
$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot a = 4.8 \\ 2 \cdot b = 4.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a = 4.8 \;\; /:2 \\ 2 \cdot b = 4.2 \;\; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2.4 \\ b = 2.1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2.4^2} + \frac{y^2}{2.1^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5.76} + \frac{y^2}{4.41} = 1.$$



Vrhovi ili tjemena elipse imaju koordinate:

$$A(-2.4,\ 0)\ ,\ B(2.4,\ 0)\ ,\ C(0,\ -2.1)\ ,\ D(0,\ 2.1).$$



Budući da u elipsu treba ucrtati pravokutnik duljine stranice 4.4, sa slike vidi se da će njegovi vrhovi, koji leže na elipsi, imati koordinate:

$$T_1(2.2,\ y)\ ,\ T_2(-2.2,\ y)\ ,\ T_3(-2.2,\ -y)\ ,\ T_4(2.2,\ -y)\ ,\ y>0.$$

Ucrtanom pravokutniku $T_1T_2T_3T_4$ su x os i y os osi simetrije.
Da bismo izračunali ordinatu y, uvrstit ćemo koordinate, na primjer, točke $T_1(2.2, y)$ u jednadžbu elipse.

$$\left.\begin{array}{l} T_1(x,\ y)=T_1(2.2,\ y) \\ \dfrac{x^2}{5.76}+\dfrac{y^2}{4.41}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2.2^2}{5.76}+\frac{y^2}{4.41}=1 \Rightarrow \frac{4.84}{5.76}+\frac{y^2}{4.41}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{4.41}=1-\frac{4.84}{5.76} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4.41}=1-\frac{4.84}{5.76}\ /\cdot 4.41 \Rightarrow y^2=4.41\cdot\left(1-\frac{4.84}{5.76}\right) \Rightarrow y^2=4.41\cdot\left(1-\frac{4.84}{5.76}\right)\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{4.41\cdot\left(1-\frac{4.84}{5.76}\right)} \Rightarrow y=\pm 0.8393.$$

Širina satelita najviše može biti:

$$\left|T_3T_2\right|=\left|T_4T_1\right|=2\cdot y=2\cdot 0.8393=1.6786\approx 1.68\ m.$$

Vježba 141

Poprečni presjek rakete je u obliku elipse kojoj je velika os 48 dm, a mala 42 dm. U nju treba staviti meteorološki satelit koji je u presjeku pravokutnog oblika. Koliko najviše satelit može biti širok ako mu je duljina 44 dm?

Rezultat: 16.8 dm.

Zadatak 142 (Iva, srednja škola)

Kako glasi jednadžba kružnice kojoj su zadane koordinate krajnjih točaka promjera A(– 3, 2) i B(1, 4)?

$$A.\ x^2+y^2-2\cdot x+6\cdot y-31=0 \quad , \quad B.\ x^2+y^2+2\cdot x-6\cdot y+5=0$$

$$C.\ x^2+y^2+6\cdot x-4\cdot y-7=0 \quad , \quad D.\ x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y+12=0$$

Rješenje 142

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

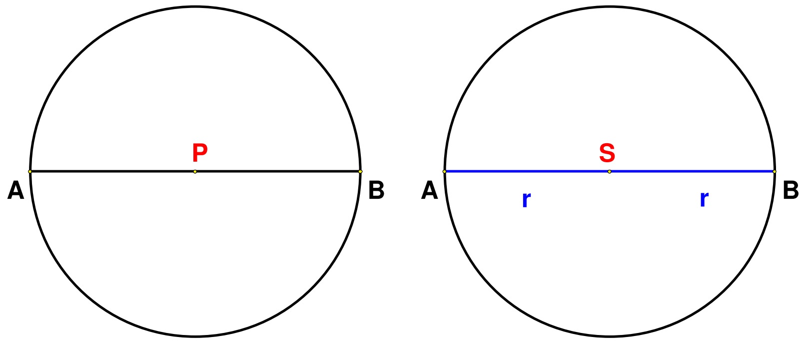
$$x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\ ,\ r=\sqrt{p^2+q^2-c}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Promjer je dužina koja prolazi kroz središte kružnice i čiji krajevi se nalaze na kružnici.
Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Najveća tetiva prolazi središtem kružnice i zove se promjer (dijametar).
Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x,\ y)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Udaljenost točaka $A(x_1,\ y_1)$ i $B(x_2,\ y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Budući da je dužina $\overline{AB}$ promjer kružnice, polovište P dužine ujedno je središte S kružnice.
Računamo koordinate polovišta.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(-3,\ 2) \\ B(x_2,\ y_2)=B(1,\ 4) \\ P(x,\ y)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow P(x,\ y)=P\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow P(x,\ y)=P\left(-\frac{2}{2},\ \frac{6}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x,\ y)=P(-1,\ 3) \Rightarrow \left[S(p,\ q)=P(x,\ y)\right] \Rightarrow S(p,\ q)=S(-1,\ 3).$$

Duljinu polumjera kružnice možemo izračunati na dva načina.

1.inačica

Duljina polumjera je:

$$r=|AS| \text{ ili } r=|SB| \text{ ili } r=\frac{1}{2}\cdot|AB|.$$

Neka je

$$r=|AS|.$$

Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(-3,\ 2) \\ S(x_2,\ y_2)=S(-1,\ 3) \\ r=|AS|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow r=\sqrt{(-1-(-3))^2+(3-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(-1+3)^2+(3-2)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2^2+1^2} \Rightarrow r=\sqrt{4+1} \Rightarrow r=\sqrt{5}.$$

2.inačica

U središnju jednadžbu kružnice uvrstimo koordinate točke A i središta S ili koordinate točke B i središta S.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(-3,\ 2) \\ S(p,\ q)=S(-1,\ 3) \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3-(-1))^2+(2-3)^2=r^2 \Rightarrow (-3+1)^2+(2-3)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\right)^2+\left(-1\right)^2=r^2 \;\Rightarrow\; 4+1=r^2 \;\Rightarrow\; r^2=5.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{matrix} S\left(p,\, q\right)=S\left(-1,\, 3\right) \;,\; r=\sqrt{5} \\ \left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(x-\left(-1\right)\right)^2+\left(y-3\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2=5 \;\Rightarrow\; x^2+2\cdot x+1+y^2-6\cdot y+9=5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1+y^2-6\cdot y+9-5=0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+2\cdot x-6\cdot y+5=0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 142

Kako glasi jednadžba kružnice kojoj su zadane koordinate krajnjih točaka promjera A(4, 6) i B(8, 2)?

$$A.\; x^2+y^2-12\cdot x-8\cdot y+44=0 \quad , \quad B.\; x^2+y^2+12\cdot x+8\cdot y-44=0$$

$$C.\; x^2+y^2-12\cdot x+8\cdot y+44=0 \quad , \quad D.\; x^2+y^2-12\cdot x-8\cdot y-44=0$$

Rezultat: A.

Zadatak 143 (Marija, gimnazija)

Odredi jednadžbu elipse koja prolazi točkom T(– 3, 7) te je zadan numerički ekscentricitet $\varepsilon=\frac{3}{4}$.

Rješenje 143

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2=a^2-b^2 \;\Rightarrow\; e=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Numerički ekscentricitet elipse:

$$\varepsilon=\frac{e}{a} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Budući da točka T pripada elipsi, uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu elipse.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(-3,\ 7) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(-3)^2}{a^2}+\frac{7^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{49}{b^2}=1.$$

Numerički ekscentricitet elipse je zadan pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \\ \varepsilon=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{3}{4}\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{a^2}=\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{9}{16}\ /\cdot 16\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot\left(a^2-b^2\right)=9\cdot a^2 \Rightarrow 16\cdot a^2-16\cdot b^2=9\cdot a^2 \Rightarrow 16\cdot a^2-9\cdot a^2=16\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot a^2=16\cdot b^2 \Rightarrow 7\cdot a^2=16\cdot b^2\ /:7 \Rightarrow a^2=\frac{16}{7}\cdot b^2.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo a^2 i b^2.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{49}{b^2}=1 \\ a^2=\dfrac{16}{7}\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{9}{\frac{16}{7}\cdot b^2}+\frac{49}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{1}}{\frac{16}{7}\cdot b^2}+\frac{49}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{63}{16\cdot b^2}+\frac{49}{b^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{63}{16\cdot b^2}+\frac{49}{b^2}=1\ /\cdot 16\cdot b^2 \Rightarrow 63+784=16\cdot b^2 \Rightarrow 847=16\cdot b^2 \Rightarrow 16\cdot b^2=847 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot b^2=847\ /:16 \Rightarrow b^2=\frac{847}{16}.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{array}{l} a^2=\dfrac{16}{7}\cdot b^2 \\ b^2=\dfrac{847}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a^2=\frac{16}{7}\cdot\frac{847}{16} \Rightarrow a^2=\frac{16}{7}\cdot\frac{847}{16} \Rightarrow a^2=\frac{847}{7}.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=\dfrac{847}{7}\ ,\ b^2=\dfrac{847}{16} \\ b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{847}{16}\cdot x^2+\frac{847}{7}\cdot y^2=\frac{847}{7}\cdot\frac{847}{16} \Rightarrow \frac{847}{16}\cdot x^2+\frac{847}{7}\cdot y^2=\frac{847\cdot 847}{7\cdot 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{847}{16}\cdot x^2+\frac{847}{7}\cdot y^2=\frac{847\cdot 847}{7\cdot 16}\ /\cdot\frac{7\cdot 16}{847} \Rightarrow 7\cdot x^2+16\cdot y^2=847.$$

Vježba 143

Odredi jednadžbu elipse koja prolazi točkom T(3, 7) te je zadan numerički ekscentricitet $\varepsilon=\frac{3}{4}.$

Rezultat: $7 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 847.$

Zadatak 144 (Marija, gimnazija)

Odredi jednadžbu hiperbole ako su njezini fokusi $F_1(-15, 0)$ i $F_2(15, 0)$, a pravci $y = \pm \frac{1}{2} \cdot x$ asimptote.

Rješenje 144

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Koordinate fokusa F_1 i F_2 hiperbole su:

$$F_1(-e, 0) \quad , \quad F_2(e, 0).$$

Pravci koji sadrže dijagonale središnjeg pravokutnika s dimenzijama $2 \cdot a$ i $2 \cdot b$ zovu se asimptote i njihove jednadžbe glase:

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Budući da su zadani fokusi hiperbole vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(-e, 0) = F_1(-15, 0) \\ e^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 15^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 225 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 225.$$

Asimptote hiperbole su pravci

$$y = \pm \frac{1}{2} \cdot x$$

pa je

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm \frac{b}{a} \cdot x \\ y = \pm \frac{1}{2} \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ / \cdot 2 \cdot a \Rightarrow 2 \cdot b = a \Rightarrow a = 2 \cdot b.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo a^2 i b^2.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 225 \\ a = 2 \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow (2 \cdot b)^2 + b^2 = 225 \Rightarrow 4 \cdot b^2 + b^2 = 225 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot b^2 = 225 \ /: 5 \Rightarrow b^2 = 45.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 225 \\ b^2 = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a^2 + 45 = 225 \Rightarrow a^2 = 225 - 45 \Rightarrow a^2 = 80.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 80 \ , \ b^2 = 45 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{45} = 1.$$

Vježba 144

Odredi jednadžbu hiperbole ako su njezini fokusi $F_1(-15, 0)$ i $F_2(15, 0)$, a pravci $y = \pm 0.5 \cdot x$ asimptote.

Rezultat: $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{45} = 1.$

Zadatak 145 (Marija, gimnazija)

Izračunaj duljinu tetive koju pravac $2 \cdot x - y - 6 = 0$ odsijeca na paraboli $y^2 = 2 \cdot x$.

Rješenje 145

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Odredimo presjek pravca i parabole tako da riješimo sustav jednadžbi.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x - y - 6 = 0 \\ y^2 = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -2 \cdot x + 6 \\ y^2 = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -2 \cdot x + 6 \ / \cdot (-1) \\ y^2 = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 6 \\ y^2 = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow (2 \cdot x - 6)^2 = 2 \cdot x \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 36 = 2 \cdot x \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 36 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 - 26 \cdot x + 36 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 26 \cdot x + 36 = 0 \ / : 2 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 18 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = -13 \ , \ c = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \ , \ b = -13 \ , \ c = 18 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{13 + 5}{4} \\ x_2 = \frac{13 - 5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{18}{4} \\ x_2 = \frac{8}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{9}{2} \\ x_2 = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo ordinatu y da bismo odredili točke presjeka.

- $$\left.\begin{matrix} x = \frac{9}{2} \\ y = 2 \cdot x - 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{9}{2} - 6 \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{9}{2} - 6 \Rightarrow y = 9 - 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x_1,\ y_1) = A\left(\frac{9}{2},\ 3\right).$$

- $$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \cdot x - 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot 2 - 6 \Rightarrow y = 4 - 6 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(x_2,\ y_2) = B(2,\ -2).$$

Duljina tetive je duljina dužine $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{matrix} A(x_1,\ y_1) = A\left(\frac{9}{2},\ 3\right) \\ B(x_2,\ y_2) = B(2, -2) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(2 - \frac{9}{2}\right)^2 + (-2-3)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(\frac{2}{1} - \frac{9}{2}\right)^2 + (-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(\frac{4-9}{2}\right)^2 + 25} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 25} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{25+100}{4}} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{125}{4}} \Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \\ \text{u brojniku} \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{25 \cdot 5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow |AB| = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} 2 \cdot x - y - 6 = 0 \\ y^2 = 2 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y^2 - y - 6 = 0 \\ a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -6 \\ y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = \frac{1+5}{2} \\ y_2 = \frac{1-5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = \frac{6}{2} \\ y_2 = -\frac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = -2 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo apscisu x da bismo odredili točke presjeka.

- $$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ y^{2}=2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{2}=2\cdot x \Rightarrow 9=2\cdot x \Rightarrow 2\cdot x=9 \Rightarrow 2\cdot x=9\ /:2 \Rightarrow x=\frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(x_{1}, y_{1}\right)=A\left(\frac{9}{2}, 3\right).$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=-2 \\ y^{2}=2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow (-2)^{2}=2\cdot x \Rightarrow 4=2\cdot x \Rightarrow 2\cdot x=4 \Rightarrow 2\cdot x=4\ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow B\left(x_{2}, y_{2}\right)=B(2,-2).$$

Duljina tetive je duljina dužine $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_{1}, y_{1}\right)=A\left(\frac{9}{2}, 3\right) \\ B\left(x_{2}, y_{2}\right)=B(2,-2) \\ |AB|=\sqrt{\left(x_{2}-x_{1}\right)^{2}+\left(y_{2}-y_{1}\right)^{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^{2}+(-2-3)^{2}} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\left(\frac{2}{1}-\frac{9}{2}\right)^{2}+(-5)^{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{\left(\frac{4-9}{2}\right)^{2}+25} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^{2}+25} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\frac{25}{4}+25} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{\frac{25+100}{4}} \Rightarrow |AB|=\sqrt{\frac{125}{4}} \Rightarrow |AB|=\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \\ \text{u brojniku}\end{array}\right] \Rightarrow |AB|=\frac{\sqrt{25\cdot 5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |AB|=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}.$$

Vježba 145

Izračunaj duljinu tetive koju pravac $y - 2 \cdot x + 6 = 0$ odsijeca na paraboli $y^2 - 2 \cdot x = 0$.

Rezultat: $\frac{5\cdot\sqrt{5}}{2}.$

Zadatak 146 (Roby, gimnazija)

Kružnica $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0$ ima polumjer $r = 1$, ako je a jednako

A. 2   *B.* 4   *C.* 6   *D.* 8

Rješenje 146

Ponovimo!

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad (a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^{2}+(y-q)^{2}=r^{2}.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^{2}+y^{2}-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \ , \ r=\sqrt{p^{2}+q^{2}-c} \Rightarrow r^{2}=p^{2}+q^{2}-c.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

1.inačica

Napisat ćemo središnju jednadžbu kružnice uporabom matode nadopunjavanja na potpuni kvadrat.

$$x^2+y^2+2\cdot x-4\cdot y+a=0 \Rightarrow x^2+2\cdot x+y^2-4\cdot y+a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1-1+y^2-4\cdot y+4-4+a=0 \Rightarrow \left(x^2+2\cdot x+1\right)-1+\left(y^2-4\cdot y+4\right)-4+a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4+a=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1+4-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5-a.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{array}{l}(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=5-a\end{array}\right\} \Rightarrow r^2=5-a \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet} \\ r=1\end{array}\right] \Rightarrow 1^2=5-a \Rightarrow 1=5-a \Rightarrow a=5-1 \Rightarrow a=4.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Iz opće jednadžbe kružnice očitamo p, q i c.

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \\ x^2+y^2+2\cdot x-4\cdot y+a=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot p=2 \\ -2\cdot q=-4 \\ c=a\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot p=2 \;/:(-2) \\ -2\cdot q=-4 \;/:(-2) \\ c=a\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}p=-1 \\ q=2 \\ c=a\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l}p=-1 \;,\; q=2 \;,\; c=a \\ r=1 \\ r^2=p^2+q^2-c\end{array}\right\} \Rightarrow 1^2=(-1)^2+2^2-a \Rightarrow 1=1+4-a \Rightarrow 1=1+4-a \Rightarrow a=4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 146

Kružnica $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0$ ima polumjer $r = 2$, ako je a jednako

A. 1 *B.* 3 *C.* 2 *D.* 4

Rezultat: A.

Zadatak 147 (Marija, gimnazija)

Pravac $5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 = 0$ tangenta je hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$, a pravac $x + 2 \cdot y = 0$ jedna je njezina asimptota. Nađi jednadžbu hiperbole.

Rješenje 147

Ponovimo!

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \;(\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Pravci koji sadrže dijagonale središnjeg pravokutnika s dimenzijama $2 \cdot a$ i $2 \cdot b$ zovu se asimptote i njihove jednadžbe glase:

$$y=-\frac{b}{a}\cdot x \quad , \quad y=\frac{b}{a}\cdot x.$$

Pravac $y = k \cdot x + l$ dira hiperbolu $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ onda i samo onda kad vrijedi:

$$a^2\cdot k^2-b^2=l^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžbu pravca $5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 = 0$ transformiramo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera k i odsječak na y osi l.

$$5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 = 0 \Rightarrow -6 \cdot y = -5 \cdot x + 8 \Rightarrow -6 \cdot y = -5 \cdot x + 8 \ /:(-6) \Rightarrow y = \frac{5}{6} \cdot x - \frac{8}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{6} \cdot x - \frac{8}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{6} \cdot x - \frac{4}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k = \frac{5}{6} \\ l = -\frac{4}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Budući da je pravac $x + 2 \cdot y = 0$ jedna asimptota hiperbole, slijedi:

$$x + 2 \cdot y = 0 \Rightarrow 2 \cdot y = -x \Rightarrow 2 \cdot y = -x \ /:(-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

Tada je:

$$\left.\begin{matrix} y = -\frac{b}{a} \cdot x \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ /\cdot 2 \cdot a \Rightarrow a = 2 \cdot b \Rightarrow a = 2 \cdot b \ /^2 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot b^2.$$

Iz svojstva dodira pravca i hiperbole izračunamo b^2.

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 4 \cdot b^2 \ , \ k = \frac{5}{6} \ , \ l = -\frac{4}{3} \\ a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 \cdot b^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - b^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow 4 \cdot b^2 \cdot \frac{25}{36} - b^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot b^2 \cdot \frac{25}{36} - b^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{25 \cdot b^2}{9} - b^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{25 \cdot b^2}{9} - b^2 = \frac{16}{9} \ /\cdot 9 \Rightarrow 25 \cdot b^2 - 9 \cdot b^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot b^2 = 16 \Rightarrow 16 \cdot b^2 = 16 \ /:16 \Rightarrow b^2 = 1.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 4 \cdot b^2 \\ b^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow a^2 = 4.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{matrix} a^2 = 4 \ , \ b^2 = 1 \\ b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot y^2 = 4.$$

Vježba 147

Pravac $5 \cdot x - 6 \cdot y - 8 = 0$ tangenta je hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$, a pravac $0.5 \cdot x + y = 0$ jedna je njezina asimptota. Nađi jednadžbu hiperbole.

Rezultat: $x^2 - 4 \cdot y^2 = 4.$

Zadatak 148 (Ante, srednja škola)

Putanja Zemlje oko Sunca je elipsa sa Suncem u jednome fokusu (žarištu). Udaljenost Zemlje od Sunca u perihelu (točki u kojoj je Zemlja najbliža Suncu) približno iznosi 147 milijuna kilometara, a udaljenost u afelu (točki u kojoj je Zemlja najudaljenija od Sunca) iznosi 152 milijuna kilometara. Koji je numerički ekscentricitet ε Zemljine putanje?

Rješenje 148

m = 147000000 km = 1.47 · 10^8 km, n = 152000000 km = 1.52 · 10^8 km,

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oblik elipse definira se njezinim ekscentricitetom e.

Linearni ekscentricitet elipse je udaljenost od fokusa elipse do ishodišta koordinatnog sustava.

Polovica udaljenosti između žarišta je broj e koji nazivamo linearni ekscentricitet.

Numerički ekscentricitet elipse:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

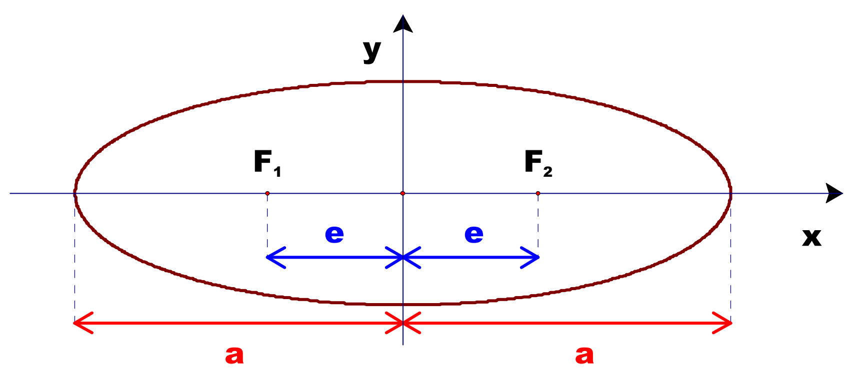
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$



Računamo veliku poluos a elipse. Sa slike vidi se (donja slika):

$$m + n = 2 \cdot a \Rightarrow 2 \cdot a = m + n \Rightarrow 2 \cdot a = m + n \ / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{m + n}{2}.$$

Računamo linearni ekscentricitet elipse. Sa slike vidi se (donja slika):

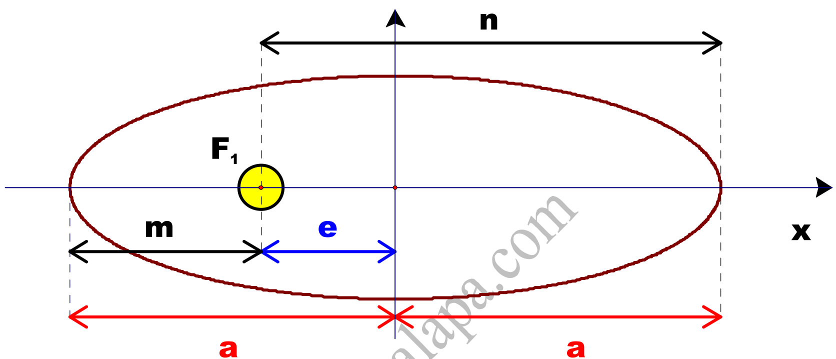
$$m+e=a \;\Rightarrow\; e=a-m \;\Rightarrow\; e=\frac{m+n}{2}-m \;\Rightarrow\; e=\frac{m+n}{2}-\frac{m}{1} \;\Rightarrow\; e=\frac{m+n-2\cdot m}{2} \;\Rightarrow\; e=\frac{n-m}{2}.$$

Numerički ekscentricitet ε Zemljine putanje je:

$$\varepsilon=\frac{e}{a} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{\frac{n-m}{2}}{\frac{m+n}{2}} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{\frac{n-m}{2}}{\frac{m+n}{2}} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{\frac{n-m}{1}}{\frac{m+n}{1}} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{n-m}{m+n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{1.52\cdot 10^{8}\ km-1.47\cdot 10^{8}\ km}{1.47\cdot 10^{8}\ km+1.52\cdot 10^{8}\ km} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{(1.52-1.47)\cdot 10^{8}\ km}{(1.47+1.52)\cdot 10^{8}\ km} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{(1.52-1.47)\cdot 10^{8}\ km}{(1.47+1.52)\cdot 10^{8}\ km} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{1.52-1.47}{1.47+1.52} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{0.05}{2.99} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{0.05\cdot 100}{2.99\cdot 100} \;\Rightarrow\; \varepsilon=\frac{5}{299}.$$



Vježba 148

Putanja planeta oko zvijezde je elipsa sa zvijezdom u jednome fokusu (žarištu). Udaljenost planeta od zvijezde u perihelu (točki u kojoj je planet najbliži zvijezdi) približno iznosi 294 milijuna kilometara, a udaljenost u afelu (točki u kojoj je planet najudaljeniji od zvijezde) iznosi 304 milijuna kilometara. Koji je numerički ekscentricitet ε putanje planeta?

Rezultat: $\frac{5}{299}.$

Zadatak 149 (Ivana, gimnazija)

Odredi jednadžbe tangenata povučenih iz točke P(16, 3) na kružnicu $x^2+y^2-12\cdot x+4\cdot y+15=0.$

Rješenje 149

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \;,\; r^2=p^2+q^2-c.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Kružnica

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

i pravac

$$y=k\cdot x+l$$

dodiruju se ako i samo ako vrijedi:

$$r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Iz opće jednadžbe kružnice odredimo p, q i r^2.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \\ x^2+y^2-12\cdot x+4\cdot y+15=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=-12 \\ -2\cdot q=4 \\ c=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=-12 \;/:(-2) \\ -2\cdot q=4 \;/:(-2) \\ c=15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=6 \\ q=-2 \\ c=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r^2=p^2+q^2-c\right] \Rightarrow r^2=6^2+(-2)^2-15 \Rightarrow r^2=36+4-15 \Rightarrow r^2=25.$$

Budući da točka P(16, 3) pripada pravcu (tangenti) y = k · x + l, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,\ y)=P(16,\ 3) \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow 3=16\cdot k+l \Rightarrow 16\cdot k+l=3.$$

Pomoću uvjeta dodira pravca i kružnice dobije se jednadžba oblika:

$$\left.\begin{array}{l} p=6 \;,\; q=-2 \;,\; r^2=25 \\ r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k-(-2)+l)^2 \Rightarrow 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k+2+l)^2.$$

Iz sustava jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} 16\cdot k+l=3 \\ 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k+2+l)^2 \end{array}\right.$$

izračunamo k koeficijent smjera i l odsječak na osi y.

$$\left.\begin{array}{l} 16\cdot k+l=3 \\ 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k+2+l)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l=3-16\cdot k \\ 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k+2+l)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cdot\left(1+k^2\right)=(6\cdot k+2+3-16\cdot k)^2 \Rightarrow 25\cdot\left(1+k^2\right)=(5-10\cdot k)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25+25\cdot k^2=25-100\cdot k+100\cdot k^2\ \Rightarrow\ 25+25\cdot k^2-25+100\cdot k-100\cdot k^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25+25\cdot k^2-25+100\cdot k-100\cdot k^2=0\ \Rightarrow\ 25\cdot k^2+100\cdot k-100\cdot k^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -75\cdot k^2+100\cdot k=0\ \Rightarrow\ -75\cdot k^2+100\cdot k=0\ /:(-25)\ \Rightarrow\ 3\cdot k^2-4\cdot k=0\ \Rightarrow\ k\cdot(3\cdot k-4)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k=0 \\ 3\cdot k-4=0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k_1=0 \\ 3\cdot k=4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k_1=0 \\ 3\cdot k=4\ /:3 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} k_1=0 \\ k_2=\frac{4}{3} \end{array}\right\}.$$

Dobili smo dva koeficijenta smjera. Sada računamo pripadne odsječke na y osi.

- $$\left.\begin{array}{l} l=3-16\cdot k \\ k=0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ l=3-16\cdot 0\ \Rightarrow\ l=3-0\ \Rightarrow\ l=3.$$

Prva tangenta ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} k=0\ ,\ l=3 \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y=0\cdot x+3\ \Rightarrow\ y=0+3\ \Rightarrow\ y=3\ \Rightarrow\ y-3=0.$$

- $$\left.\begin{array}{l} l=3-16\cdot k \\ k=\frac{4}{3} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ l=3-16\cdot\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ l=3-\frac{64}{3}\ \Rightarrow\ l=\frac{3}{1}-\frac{64}{3}\ \Rightarrow\ l=\frac{9-64}{3}\ \Rightarrow\ l=-\frac{55}{3}.$$

Druga tangenta ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{4}{3}\ ,\ l=-\frac{55}{3} \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{3}\cdot x-\frac{55}{3}\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{3}\cdot x-\frac{55}{3}\ /\cdot 3\ \Rightarrow\ 3\cdot y=4\cdot x-55\ \Rightarrow\ 4\cdot x-3\cdot y-55=0..$$

Vježba 149

Odredi jednadžbe tangenata povučenih iz točke P(5, 4) na kružnicu $x^2+y^2-14\cdot y+32=0.$

Rezultat: $x-4\cdot y+11=0\ ,\ 4\cdot x+y-24=0.$

Zadatak 150 (Martina, TUPŠ)

Kolika je ploština kružnog vijenca određenog kružnicama $x^2+y^2+6\cdot x+8\cdot y-2=0$ i $x^2+y^2+6\cdot x+8\cdot y-100=0$?

Rješenje 150

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\ ,\ r=\sqrt{p^2+q^2-c}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

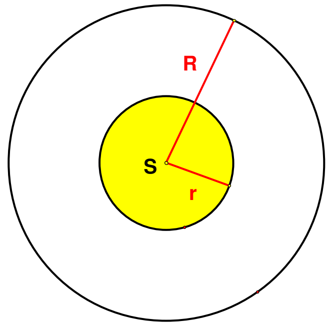
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju

unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.
Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^{2}-r^{2}\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.



Najprije izračunamo duljine polumjera oba kruga r_1 i r_2.

Polumjer r_1

$$\left.\begin{array}{l} x^{2}+y^{2}-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \\ x^{2}+y^{2}+6\cdot x+8\cdot y-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \\ -2\cdot q=8 \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \ /:(-2) \\ -2\cdot q=8 \ /:(-2) \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=-3 \\ q=-4 \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{polumjer kruga} \\ r_1=\sqrt{p^{2}+q^{2}-c} \end{array}\right] \Rightarrow r_1=\sqrt{(-3)^{2}+(-4)^{2}-(-2)} \Rightarrow r_1=\sqrt{9+16+2} \Rightarrow r_1=\sqrt{27}.$$

Polumjer r_2

$$\left.\begin{array}{l} x^{2}+y^{2}-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \\ x^{2}+y^{2}+6\cdot x+8\cdot y-100=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \\ -2\cdot q=8 \\ c=-100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \ /:(-2) \\ -2\cdot q=8 \ /:(-2) \\ c=-100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=-3 \\ q=-4 \\ c=-100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{polumjer kruga} \\ r_2=\sqrt{p^{2}+q^{2}-c} \end{array}\right] \Rightarrow r_2=\sqrt{(-3)^{2}+(-4)^{2}-(-100)} \Rightarrow r_2=\sqrt{9+16+100} \Rightarrow r_2=\sqrt{125}.$$

Ploština kružnog vijenca jednaka je razlici ploština krugova polumjera r_1 i r_2.

$$\left.\begin{array}{l} r_1=\sqrt{27}\ ,\ r_2=\sqrt{125} \\ P=\left(r_2^{2}-r_1^{2}\right)\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow P=\left(\left(\sqrt{125}\right)^{2}-\left(\sqrt{27}\right)^{2}\right)\cdot\pi \Rightarrow P=(125-27)\cdot\pi \Rightarrow P=98\cdot\pi.$$

Vježba 150

Kolika je ploština kružnog vijenca određenog kružnicama $x^{2}+y^{2}-2\cdot x-2\cdot y+1=0$ i $x^{2}+y^{2}-2\cdot x-2\cdot y-2=0$?

Rezultat: $P=3\cdot\pi.$

Zadatak 151 (Ante, srednja škola)

Kolika je duljina tetive koju na krivulji $3 \cdot x^2 - y^2 = 3$ odsijeca pravac $y + x - 5 = 0$?

$$A.\ 6 \cdot \sqrt{2}\ jed.\ dužina \qquad B.\ 7 \cdot \sqrt{2}\ jed.\ dužina$$
$$C.\ 8 \cdot \sqrt{2}\ jed.\ dužina \qquad D.\ 9 \cdot \sqrt{2}\ jed.\ dužina$$

Rješenje 151

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Sjecište krivulje i pravca odredimo tako da riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \\ y + x - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \\ y = 5 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot x^2 - (5-x)^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x^2 - \left(25 - 10 \cdot x + x^2\right) = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 25 + 10 \cdot x - x^2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 25 + 10 \cdot x - x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 28 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 28 = 0 \ /: 2 \Rightarrow x^2 + 5 \cdot x - 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + 5 \cdot x - 14 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 5 \ , \ c = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = 5 \ , \ c = -14 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-5+9}{2} \\ x_2 = \dfrac{-5-9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4}{2} \\ x_2 = -\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{array}\right\}.$$

- Računamo ordinatu y_1.

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 - x \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 - 2 \Rightarrow y_1 = 3.$$

- Računamo ordinatu y_2.

$$\left.\begin{array}{l} y = 5 - x \\ x = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 - (-7) \Rightarrow y = 5 + 7 \Rightarrow y_2 = 12.$$

Sjecišta krivulje i pravca su točke:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, 3) \\ B(x_2, y_2) = B(-7, 12) \end{array}\right\}.$$

Računamo udaljenost točaka A i B.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right)=A(2,3) \\ B\left(x_2, y_2\right)=B(-7,12) \\ |AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(-7-2)^2+(12-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(-9)^2+9^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{81+81} \Rightarrow |AB|=\sqrt{81\cdot 2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{81}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{9^2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |AB|=9\cdot\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 151

Kolika je duljina tetive koju na krivulji $x^2+y^2=5$ odsijeca pravac y – 2 · x = 0?

$A.\ 2\cdot\sqrt{5}\ \ jed.\ dužina \qquad B.\ 3\cdot\sqrt{5}\ \ jed.\ dužina$

$C.\ 4\cdot\sqrt{5}\ \ jed.\ dužina \qquad D.\ 5\cdot\sqrt{5}\ \ jed.\ dužina$

Rezultat: A.

Zadatak 152 (Martina, TUPŠ)

Odredi kut elipse i pravca ako je: $3\cdot x^2+4\cdot y^2=48$ i $y=\frac{3}{2}\cdot x.$

Rješenje 152

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Jednadžba tangente

Jednadžba tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u točki T(x_0, y_0) te elipse glasi $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1.$

Kut φ između dva pravca koji su određeni jednadžbama $y=k_1\cdot x+l_1$ i $y=k_2\cdot x+l_2$, $k_2>k_1$ računa se po formuli

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Plan rada:

❶ Odredimo koordinate sjecišta elipse i pravca.

❷ Nađemo jednadžbu tangente na elipsu u tom sjecištu.

❸ Izračunamo kut između tangente i zadanog pravca.

Rad:

❶ Sjecište elipse i pravca dobije se rješavanjem sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot x^2+4\cdot y^2=48\\ y=\frac{3}{2}\cdot x\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow 3\cdot x^2+4\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot x\right)^2=48\Rightarrow 3\cdot x^2+4\cdot\frac{9}{4}\cdot x^2=48\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2+4\cdot\frac{9}{4}\cdot x^2=48\Rightarrow 3\cdot x^2+9\cdot x^2=48\Rightarrow 12\cdot x^2=48\Rightarrow 12\cdot x^2=48\ /:12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x^2=4\ /\sqrt{\ }\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=-2\end{array}\right\}.$$

Računamo ordinate sjecišta y_1 i y_2.

Računamo y_1

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}\cdot x\\ x=2\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot 2\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot 2\Rightarrow y_1=3.$$

Računamo y_2

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}\cdot x\\ x=-2\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot(-2)\Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot(-2)\Rightarrow y_2=-3.$$

Sjecišta elipse i pravca su točke A(2, 3) i B(– 2, – 3).

❷ Jednadžba tangente na elipsu u točki A(2, 3) glasi:

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot x^2+4\cdot y^2=48\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x^2+4\cdot y^2=48\ /:48\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{3\cdot x^2}{48}+\frac{4\cdot y^2}{48}=1\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{3\cdot x^2}{48}+\frac{4\cdot y^2}{48}=1\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{jednadžba tangente}\\ \frac{x_0\cdot x}{16}+\frac{y_0\cdot y}{12}=1\\ A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 3)\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\cdot x}{16}+\frac{3\cdot y}{12}=1\Rightarrow\frac{2\cdot x}{16}+\frac{3\cdot y}{12}=1\Rightarrow\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1\Rightarrow\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1\ /\cdot 4\Rightarrow\frac{x}{2}+y=4\Rightarrow$$

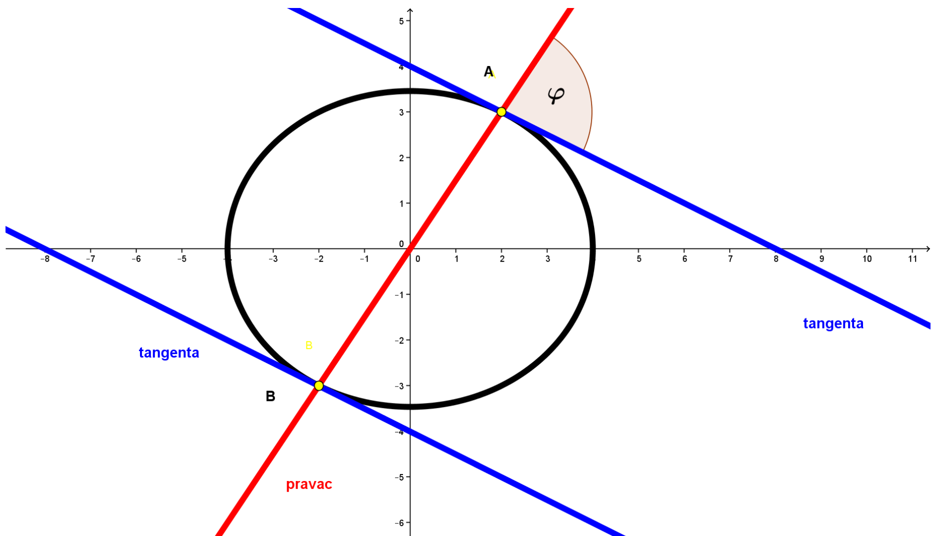
$$\Rightarrow y=-\frac{x}{2}+4\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x+4.$$

❸ Kut elipse i pravca je kut između tangente u zadanoj točki elipse i zadanog pravca.

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}\cdot x+4 \\ y=\frac{3}{2}\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-\frac{1}{2} \\ k_2=\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{kut između pravaca} \\ tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \end{array}\right] \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}-\frac{3}{4}} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{\frac{3+1}{2}}{\frac{4-3}{4}} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{\frac{4}{2}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{16}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi=8 \Rightarrow \varphi=tg^{-1}8 \Rightarrow \varphi=82^0\,52'30''.$$



Analogno se rješenje dobije u točki B.

Vježba 152

Odredi kut elipse i pravca ako je: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ i $3\cdot x-2\cdot y=0.$

Rezultat: 82° 52' 30''.

Zadatak 153 (Sanja, strukovna škola)

Koja krivulja drugog reda ima jednadžbu $9-3\cdot x^2-7\cdot y^2=0$?

A. hiperbola *B. parabola* *C. kružnica* *D. elipsa*

Rješenje 153

Ponovimo!

Krivulja drugog reda (konika) je skup svih točaka (x, y) ravnine za koje vrijedi:

$$A\cdot x^2+B\cdot x\cdot y+C\cdot y^2+D\cdot x+E\cdot y+F=0.$$

Uvjet $A^2+B^2+C^2\neq 0$ označava da je lijeva strana polinom drugog stupnja s varijablama x i y.
Glavne krivulje drugog reda su: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.
Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Transformiramo zadanu jednadžbu.

$$9 - 3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 = 0 \Rightarrow -3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 = -9 \Rightarrow -3 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 = -9 \ /: (-9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{9} + \frac{7 \cdot y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{9} + \frac{7 \cdot y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{9}{7}} = 1.$$

Krivulja je elipsa.
Odgovor je pod D.

Vježba 153

Koja krivulja drugog reda ima jednadžbu $3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 - 9 = 0$?

A. hiperbola *B. parabola* *C. kružnica* *D. elipsa*

Rezultat: D.

Zadatak 154 (Irena, srednja škola)

Kružnica je zadana jednadžbom $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$ Odredite točku T(– 1, y) zadane kružnice za koju je y > 0.

Rješenje 154

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Budući da točka T pripada kružnici, koordinate točke T uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice.

1.inačica

$$\left. \begin{array}{l} T(x, \ y) = T(-1, \ y) \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow 0^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow (y-2)^2 = 25 \Rightarrow (y-2)^2 = 25 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = \pm 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y-2=5 \\ y-2=-5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y=5+2 \\ y=-5+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = 7 \ \textit{rješenje zbog} \ y > 0 \\ y_2 = -3 \ \textit{nije rješenje} \end{array} \right\}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(-1,\ y) \\ (x+1)^2+(y-2)^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1+1)^2+(y-2)^2=25 \Rightarrow 0^2+(y-2)^2=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+(y-2)^2=25 \Rightarrow (y-2)^2=25 \Rightarrow y^2-4\cdot y+4=25 \Rightarrow y^2-4\cdot y+4-25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2-4\cdot y-21=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2-4\cdot y-21=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=-21 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=-21 \\ y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-21)}}{2\cdot 1} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow$$

$$y_{1,2}=\frac{4\pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{4+10}{2} \\ y_2=\dfrac{4-10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{14}{2} \\ y_2=-\dfrac{6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=7 \ \textit{rješenje zbog } y>0 \\ y_2=-3 \ \textit{nije rješenje} \end{array}\right\}.$$

Vježba 154

Kružnica je zadana jednadžbom $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Odredite točku T(– 1, y) zadane kružnice za koju je y < 0.

Rezultat: y = – 3.

Zadatak 155 (Irena, srednja škola)

Kružnica je zadana jednadžbom $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Odredite jednadžbu tangente u točki A(2, 6).

Rješenje 155

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba tangente kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ s diralištem D(x_0, y_0) glasi:

$$(x_0-p)\cdot(x-p)+(y_0-q)\cdot(y-q)=r^2.$$

Najprije provjerimo pripada li točka A zadanoj kružnici.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(2,\ 6) \\ (x+1)^2+(y-2)^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvrstimo koordinate točke} \\ \text{u jednadžbu kružnice} \end{array}\right] \Rightarrow (2+1)^2+(6-2)^2=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^2+4^2=25 \Rightarrow 9+16=25 \Rightarrow 25=25.$$

Točka pripada kružnici.
Jednadžba tangente glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_0, y_0) = A(2, 6) \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{jednadžba tangente} \\ (x_0+1)\cdot(x+1)+(y_0-2)\cdot(y-2)=25 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+1)\cdot(x+1)+(6-2)\cdot(y-2)=25 \Rightarrow 3\cdot(x+1)+4\cdot(y-2)=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x+3+4\cdot y-8=25 \Rightarrow 3\cdot x+3+4\cdot y-8-25=0 \Rightarrow 3\cdot x+4\cdot y-30=0.$$

Vježba 155

Kružnica je zadana jednadžbom $(x+1)^2+(y-2)^2=25.$ Odredite jednadžbu tangente u točki A(3, 5).

Rezultat: $4\cdot x+3\cdot y-27=0.$

Zadatak 156 (Nina, gimnazija)

Tijelo kreće iz točke A(4, – 5) i giba se po kružnici sa središtem u S(3, 2) u pozitivnom smjeru do točke B(x, y). Duljina kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ je $\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}.$ Odredite koordinate točke B.

Rješenje 156

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Neka su A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana formulom

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha,$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Ako su dane točke A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2), onda su koordinate vektora koji ih spaja:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}.$$

Ako su vektori zadani u koordinatnom sustavu, tada se skalarni produkt definira na ovaj način:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\circ\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0.$$

Pravac točkama A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera

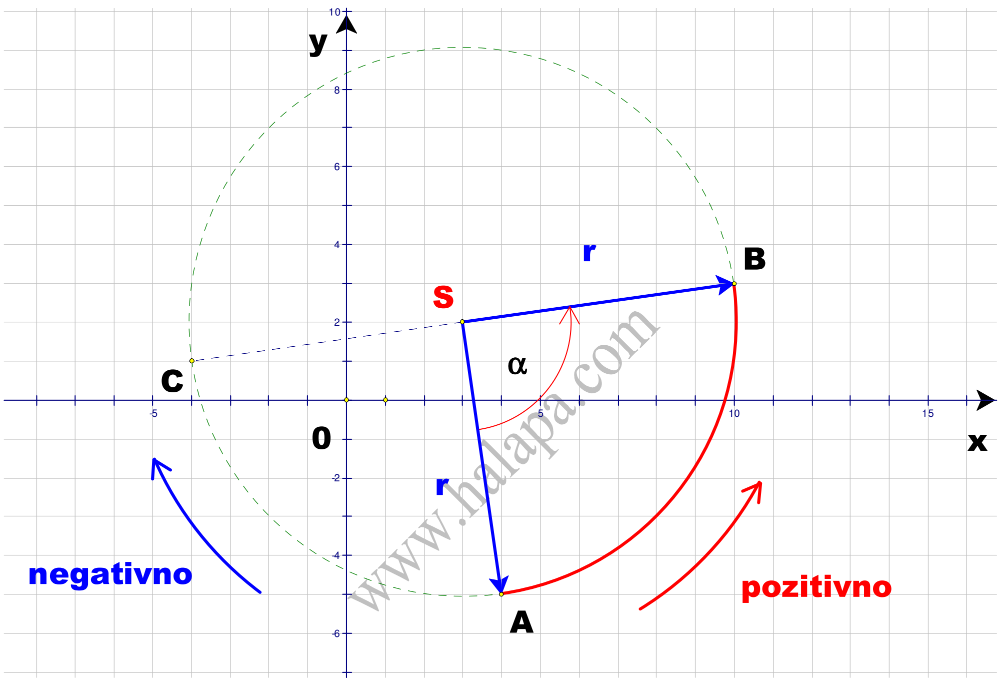
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Uvjet okomitosti pravaca:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2=-1 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Jednadžba pravca točkom T s danim koeficijentom smjera k
Pravac kroz točku $T(x_1, y_1)$ s koeficijentom smjera k ima jednadžbu

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$



1.inačica

Najprije odredimo duljinu polumjera r zadane kružnice.

$$\left.\begin{array}{l} S\left(x_1, y_1\right)=S(3, 2) \\ A\left(x_2, y_2\right)=A(4, -5) \\ r=|SA|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |SA|=\sqrt{(4-3)^2+(-5-2)^2} \Rightarrow |SA|=\sqrt{1^2+(-7)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SA|=\sqrt{1+49} \Rightarrow |SA|=\sqrt{50} \Rightarrow |SA|=\sqrt{25\cdot 2} \Rightarrow |SA|=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |SA|=5\cdot\sqrt{2}.$$

Polumjer kružnice je

$$r=5\cdot\sqrt{2}.$$

Pomoću duljine kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ izračunamo njegov središnji kut α.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \dfrac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0}\ ,\ r = 5\cdot\sqrt{2} \\ \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0} \\ \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0} = \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0} = \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}\ /\cdot\frac{180^0}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi} \Rightarrow \alpha = 90^0.$$

Točka B pripada kružnici čije je središte točka S. Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{array}{l}S(p,\ q) = S(3,\ 2)\ ,\ r = 5\cdot\sqrt{2} \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\end{array}\right\} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = \left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25\cdot 2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 50.$$

Uočimo da su vektori $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$ međusobno okomiti jer zatvaraju kut α = 90º.

Odredimo vektore $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$.

- $$\left.\begin{array}{l}S(x_1,\ y_1) = S(3,\ 2) \\ A(x_2,\ y_2) = A(4,\ -5) \\ \overrightarrow{SA} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{SA} = (4-3)\cdot\vec{i} + (-5-2)\cdot\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{SA} = \vec{i} - 7\cdot\vec{j}.$$
- $$\left.\begin{array}{l}S(x_1,\ y_1) = S(3,\ 2) \\ B(x_2,\ y_2) = B(x,\ y) \\ \overrightarrow{SB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (x-3)\cdot\vec{i} + (y-2)\cdot\vec{j}.$$

Budući da su vektori međusobno okomiti njihov skalarni produkt jednak je nuli.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SA} = \vec{i} - 7\cdot\vec{j} \\ \overrightarrow{SB} = (x-3)\cdot\vec{i} + (y-2)\cdot\vec{j} \\ \overrightarrow{SA}\circ\overrightarrow{SB} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\vec{i} - 7\cdot\vec{j}\right)\circ\left((x-3)\cdot\vec{i} + (y-2)\cdot\vec{j}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot(x-3) - 7\cdot(y-2) = 0 \Rightarrow x - 3 - 7\cdot y + 14 = 0 \Rightarrow x - 7\cdot y + 11 = 0.$$

Sjecište pravca $x - 7\cdot y + 11 = 0$ i kružnice $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 50$ je točka B čije koordinate dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}x - 7\cdot y + 11 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 50\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 7\cdot y - 11 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 50\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7\cdot y - 11 - 3)^2 + (y-2)^2 = 50 \Rightarrow (7\cdot y - 14)^2 + (y-2)^2 = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49\cdot y^2 - 196\cdot y + 196 + y^2 - 4\cdot y + 4 = 50 \Rightarrow 49\cdot y^2 - 196\cdot y + 196 + y^2 - 4\cdot y + 4 - 50 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \;/:50 \Rightarrow y^2-4\cdot y+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2-4\cdot y+3=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \\ y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{4+2}{2} \\ y_2=\dfrac{4-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=1 \end{array}\right\}.$$

Računamo x.

- $\left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7\cdot 3-11 \Rightarrow x=21-11 \Rightarrow x=10.$

Koordinate točke B su

$$B(x,\ y)=B(10,\ 3)$$

jer se gibamo u pozitivnom smjeru po kružnici.

- $\left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7\cdot 1-11 \Rightarrow x=7-11 \Rightarrow x=-4.$

Koordinate točke C su

$$C(x,\ y)=C(-4,\ 1)$$

jer se gibamo u negativnom smjeru po kružnici.

2.inačica

Najprije odredimo duljinu polumjera r zadane kružnice.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\ y_1)=S(3,\ 2) \\ A(x_2,\ y_2)=A(4,\ -5) \\ r=|SA|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |SA|=\sqrt{(4-3)^2+(-5-2)^2} \Rightarrow |SA|=\sqrt{1^2+(-7)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SA|=\sqrt{1+49} \Rightarrow |SA|=\sqrt{50} \Rightarrow |SA|=\sqrt{25\cdot 2} \Rightarrow |SA|=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |SA|=5\cdot\sqrt{2}.$$

Polumjer kružnice je

$$r=5\cdot\sqrt{2}.$$

Pomoću duljine kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ izračunamo njegov središnji kut α.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0}\ ,\ r=5\cdot\sqrt{2} \\ \left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0} \\ \left|\overset{\frown}{AB}\right|=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0}=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0}=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2} \;/\cdot\frac{180^0}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi} \Rightarrow \alpha=90^0.$$

Točka B pripada kružnici čije je središte točka S. Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\,q)=S(3,\,2)\;\;,\;\; r=5\cdot\sqrt{2} \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=5^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25\cdot 2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=50.$$

Odredimo koeficijent smjera pravca SA.

- $$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\,y_1)=S(3,\,2) \\ A(x_2,\,y_2)=A(4,\,-5) \\ k_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=\frac{-5-2}{4-3} \Rightarrow k_1=\frac{-7}{1} \Rightarrow k_1=-7.$$

Pravac koji prolazi točkama S i B okomit je na pravac SA (zatvaraju kut α = 90º) pa njegov koeficijent smjera ima vrijednost

$$\left.\begin{array}{l} k_1=-7 \\ k_2=-\dfrac{1}{k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{-7} \Rightarrow k_2=\frac{1}{7}.$$

Odredimo jednadžbu pravca koji prolazi točkom S, a ima koeficijent smjera k_2 (pravac SB).

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\,y_1)=S(3,\,2) \\ k_2=\dfrac{1}{7} \\ y-y_1=k_2\cdot(x-x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=\frac{1}{7}\cdot(x-3) \Rightarrow y-2=\frac{1}{7}\cdot x-\frac{3}{7} \Rightarrow y-2=\frac{1}{7}\cdot x-\frac{3}{7} \;/\cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot y-14=x-3 \Rightarrow 7\cdot y-14-x+3=0 \Rightarrow -x+7\cdot y-11=0 \Rightarrow -x+7\cdot y-11=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$x-7\cdot y+11=0.$$

Sjecište pravca $x-7\cdot y+11=0$ i kružnice $(x-3)^2+(y-2)^2=50$ je točka B čije koordinate dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x-7\cdot y+11=0 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7\cdot y-11-3)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow (7\cdot y-14)^2+(y-2)^2=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49\cdot y^2-196\cdot y+196+y^2-4\cdot y+4=50 \Rightarrow 49\cdot y^2-196\cdot y+196+y^2-4\cdot y+4-50=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \Rightarrow 50\cdot y^2-200\cdot y+150=0 \;/:50 \Rightarrow y^2-4\cdot y+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2-4\cdot y+3=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=3 \\ y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{4+2}{2} \\ y_2=\dfrac{4-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{6}{2} \\ y_2=\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=1 \end{array}\right\}.$$

Računamo x.

- $$\left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7\cdot 3-11 \Rightarrow x=21-11 \Rightarrow x=10.$$

Koordinate točke B su

$$B(x,\ y)=B(10,\ 3)$$

jer se gibamo u pozitivnom smjeru po kružnici.

- $$\left.\begin{array}{l} x=7\cdot y-11 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=7\cdot 1-11 \Rightarrow x=7-11 \Rightarrow x=-4.$$

Koordinate točke C su

$$C(x,\ y)=C(-4,\ 1)$$

jer se gibamo u negativnom smjeru po kružnici.

Vježba 156

Tijelo kreće iz točke A(4, – 5) i giba se po kružnici sa središtem u S(3, 2) u negativnom smjeru do točke B(x, y). Duljina kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ je $\left|\overset{\frown}{AB}\right|=\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{2}$. Odredite koordinate točke B.

Rezultat: $B(-4,\ 1)$.

Zadatak 157 (Ivana, HTK)

Odredi zajedničke točke pravca 3 · x – y = 0 i hiperbole $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$.

Rješenje 157

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot i\ ,\ a>0\ ,\ i=\sqrt{-1}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Koordinate zajedničkih točaka pravca i hiperbole dobit ćemo tako da riješimo sustav jednadžbi.

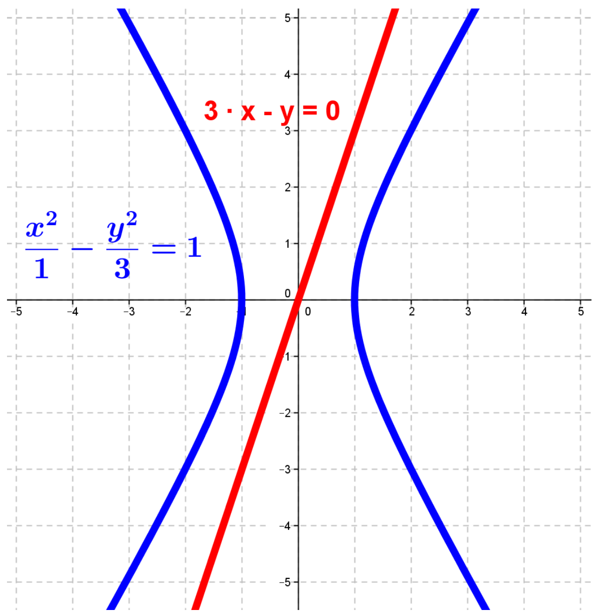
$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - y = 0 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -3 \cdot x \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \; / \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -3 \cdot x \; / \cdot (-1) \\ 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 - y^2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot x^2 - (3 \cdot x)^2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 3^2 \cdot x^2 = 3 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cdot x^2 = 3 \Rightarrow -6 \cdot x^2 = 3 \; / : (-6) \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{6} \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{6} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \; / \sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i.$$

Rješenja su imaginarni brojevi, a to znači da pravac i hiperbola nemaju zajedničkih točaka. Pogledati sliku.



Vježba 157

Odredi zajedničke točke pravca $\frac{x}{1} - \frac{y}{3} = 0$ i hiperbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$

Rezultat: Nema zajedničkih točaka.

Zadatak 158 (Ivana, HTK)

Odredi jednadžbu tangente u točki D(2, y > 0) elipse $x^2 + 4 \cdot y^2 = 8.$

Rješenje 158

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{matrix} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{matrix} \right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Tangenta koja prolazi točkom $T(x_1, y_1)$ elipse

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x_1 \cdot x + a^2 \cdot y_1 \cdot y = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Prvo izračunamo ordinatu točke D. U jednadžbu elipse uvrstimo x = 2 i dobijemo kvadratnu jednadžbu.

$$\left.\begin{matrix} D(x, y) = D(2, y) \\ x^2 + 4 \cdot y^2 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2^2 + 4 \cdot y^2 = 8 \Rightarrow 4 + 4 \cdot y^2 = 8 \Rightarrow 4 \cdot y^2 = 8 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot y^2 = 4 \Rightarrow 4 \cdot y^2 = 4 \ /:4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{1} \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \ \text{nije rješenje zbog } y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow D(x, y) = D(2, 1).$$

Ordinata koja zadovoljava uvjet y > 0 je y = 1. Dakle, diralište je točka D(2, 1).
Napisat ćemo segmentni oblik jednadžbe elipse.

$$x^2 + 4 \cdot y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot y^2 = 8 \ /:8 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{4 \cdot y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{4 \cdot y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Jednadžba tangente u točki D zadane elipse glasi:

$$\left.\begin{matrix} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ a^2 = 8 \ , \ b^2 = 2 \\ D(x_1, y_1) = D(2, 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y}{b^2} = 1 \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{8} + \frac{1 \cdot y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \ / \cdot 4 \Rightarrow x + 2 \cdot y = 4 \Rightarrow x + 2 \cdot y - 4 = 0.$$

Vježba 158

Odredi jednadžbu tangente u točki D(2, y > 0) elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$

Rezultat: $x+2\cdot y-4=0.$

Zadatak 159 (Ivana, HTK)

Napiši jednadžbe tangenata povučenih iz točke P(14, 1) na elipsu $x^2+4\cdot y^2=100.$

Rješenje 159

Ponovimo!

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \left(\begin{matrix}\text{segmentni oblik,}\\ \text{kanonski oblik}\end{matrix}\right).$$

Pravac y = k · x + l dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2\cdot k^2+b^2=l^2.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca:

$$y=k\cdot x+l \ , \ k-\text{koeficijent smjera} \ , \ l-\text{odsječak na } y \text{ osi}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Plan rada:

❶ Napisati jednadžbu elipse u kanonskom obliku.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

❷ Uporabiti uvjet dodira pravca i elipse.

$$\left.\begin{matrix} y=k\cdot x+l \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2\cdot k^2+b^2=l^2.$$

❸ Koristiti činjenicu da točka T(x_1, y_1) leži na tangenti y = k · x + l.

$$\left.\begin{matrix} T(x, y)=T(x_1, y_1) \\ y=k\cdot x+l\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1=k\cdot x_1+l_1.$$

❹ Riješiti sustav dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice k i l.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = k \cdot x_1 + l_1 \\ a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 \ , \ l_1 \\ k_2 \ , \ l_2 \end{array}\right\} - \textit{rješenja}.$$

❺ Napisati jednadžbe tangenata.

$$\left.\begin{array}{l} y = k_1 \cdot x + l_1 \\ y = k_2 \cdot x + l_2 \end{array}\right\}.$$

Rad:

❶ Jednadžbu zadane elipse napišemo u kanonskom obliku (segmentnom obliku).

$$x^2 + 4 \cdot y^2 = 100 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot y^2 = 100 \ /:100 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{4 \cdot y^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{4 \cdot y^2}{100} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 100 \\ b^2 = 25 \end{array}\right\}.$$

❷ Iz uvjeta dodira pravca i elipse dobije se jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 100 \ , \ b^2 = 25 \\ a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 \cdot k^2 + 25 = l^2.$$

❸ Budući da točka P leži na tangenti y = k · x + l, uvrstit ćemo koordinate točke P u jednadžbu tangente (pravca).

$$\left.\begin{array}{l} P(x, y) = P(14, 1) \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 14 \cdot k + l \Rightarrow 14 \cdot k + l = 1.$$

❹ Da bismo odredili k i l moramo riješiti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 14 \cdot k + l = 1 \\ 100 \cdot k^2 + 25 = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l = 1 - 14 \cdot k \\ 100 \cdot k^2 + 25 = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 100 \cdot k^2 + 25 = (1 - 14 \cdot k)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot k^2 + 25 = 1 - 28 \cdot k + 196 \cdot k^2 \Rightarrow 100 \cdot k^2 + 25 - 1 + 28 \cdot k - 196 \cdot k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -96 \cdot k^2 + 28 \cdot k + 24 = 0 \Rightarrow -96 \cdot k^2 + 28 \cdot k + 24 = 0 \ /:(-4) \Rightarrow 24 \cdot k^2 - 7 \cdot k - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 24 \cdot k^2 - 7 \cdot k - 6 = 0 \\ a = 24 \ , \ b = -7 \ , \ c = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 24 \ , \ b = -7 \ , \ c = -6 \\ k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-6)}}{2 \cdot 24} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{48} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm 25}{48} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{7+25}{48} \\ k_2 = \dfrac{7-25}{48} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{32}{48} \\ k_2 = -\dfrac{18}{48} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{32}{48} \\ k_2 = -\dfrac{18}{48} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{2}{3} \\ k_2 = -\dfrac{3}{8} \end{array}\right\}.$$

Računamo l.

- $$\left.\begin{array}{l} l = 14 \cdot k - 1 \\ k = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow l = 14 \cdot \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow l = \frac{28}{3} - 1 \Rightarrow l = \frac{28}{3} - \frac{1}{1} \Rightarrow l = \frac{28 - 3}{3} \Rightarrow l_1 = \frac{25}{3}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} l = 14 \cdot k - 1 \\ k = -\frac{3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow l = 14 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 1 \Rightarrow l = 14 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 1 \Rightarrow l = 7 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{1} \Rightarrow l = -\frac{21}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = -\frac{21}{4} - \frac{1}{1} \Rightarrow l = \frac{-21-4}{4} \Rightarrow l_2 = -\frac{25}{4}.$$

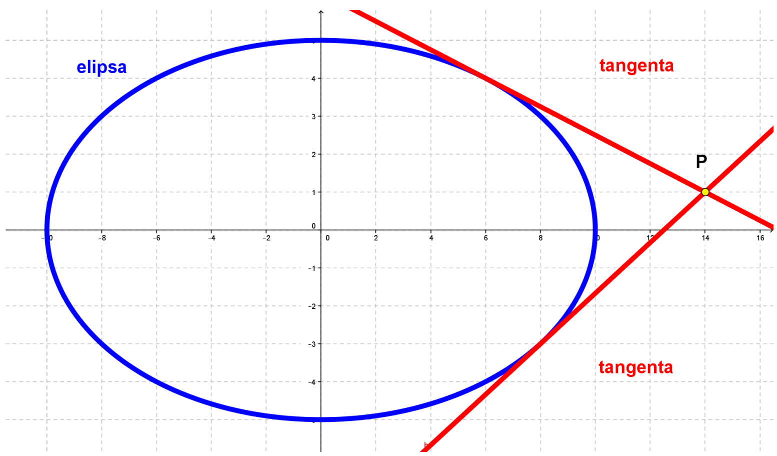
❺ Jednadžbe tangenata glase:

- $$\left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{2}{3} \ , \ l_1 = \frac{25}{3} \\ y = k_1 \cdot x + l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{25}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{25}{3} \ / \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot y = 2 \cdot x + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot x + 3 \cdot y - 25 = 0 \Rightarrow -2 \cdot x + 3 \cdot y - 25 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow 2 \cdot x - 3 \cdot y + 25 = 0.$$

- $$\left.\begin{array}{l} k_2 = -\frac{3}{8} \ , \ l_2 = -\frac{25}{4} \\ y = k_2 \cdot x + l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \cdot x - \frac{25}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \cdot x - \frac{25}{4} \ / \cdot 8 \Rightarrow 8 \cdot y = -3 \cdot x - 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x + 8 \cdot y + 50 = 0.$$



Vježba 159

Napiši jednadžbe tangenata povučenih iz točke P(10, 5) na elipsu $x^2 + 4 \cdot y^2 = 40.$

Rezultat: $3 \cdot x - 2 \cdot y - 20 = 0 \ , \ x - 6 \cdot y + 20 = 0.$

Zadatak 160 (Lucija, graditeljska tehnička škola)

Odredi jednadžbu elipse kojoj je zadano a + b = 16, e = 8.

Rješenje 160

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (žarišta) te ravnine konstantna veličina i iznosi 2a. Velika poluos je a, a mala poluos b.
Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\begin{array}{l} \text{segmentni oblik,} \\ \text{kanonski oblik} \end{array}\right).$$

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 8^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=16-a \\ a^2 - b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - (16-a)^2 = 64 \Rightarrow a^2 - \left(256 - 32 \cdot a + a^2\right) = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 256 + 32 \cdot a - a^2 = 64 \Rightarrow a^2 - 256 + 32 \cdot a - a^2 = 64 \Rightarrow -256 + 32 \cdot a = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32 \cdot a = 64 + 256 \Rightarrow 32 \cdot a = 320 \Rightarrow 32 \cdot a = 320 \ /: 32 \Rightarrow a = 10.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 + b = 16 \Rightarrow b = 16 - 10 \Rightarrow b = 6.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a=10 \ , \ b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 8^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ (a+b) \cdot (a-b) = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ (a+b) \cdot (a-b) = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ 16 \cdot (a-b) = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ 16 \cdot (a-b) = 64 \ /: 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a-b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot a = 20 \Rightarrow$$

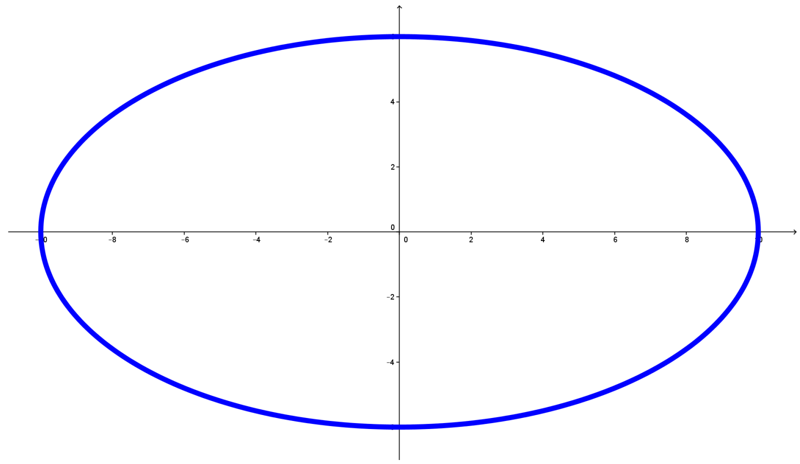
$$\Rightarrow 2 \cdot a = 20 \ /: 2 \Rightarrow a = 10.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 + b = 16 \Rightarrow b = 16 - 10 \Rightarrow b = 6.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a=10 \ , \ b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$



Vježba 160

Odredi jednadžbu elipse kojoj je zadano a – b = 4, e = 8.

Rezultat: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$