Zadatak 101 (Josipa, srednja škola)

Napiši jednadžbu elipse ako je: $a + b = 14,\ \varepsilon = \frac{4}{5}.$

Rješenje 101

Ponovimo!

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Broj e naziva se linearni ekscentricitet elipse.

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Koeficijent ε naziva se numerički ekscentricitet elipse.

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{4}{5} \\ \varepsilon = \frac{e}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{e}{a} \Rightarrow 4 \cdot a = 5 \cdot e \Rightarrow 4 \cdot a = 5 \cdot e \ /^2 \Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot e^2 \Rightarrow \left[e^2 = a^2 - b^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot \left(a^2 - b^2\right) \Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot a^2 - 25 \cdot b^2 \Rightarrow 25 \cdot b^2 = 25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2.$$

1.inačica

Iz sustava jednadžbi dobiju se velika poluos a i mala poluos b.

$$\left.\begin{array}{l} 25 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \\ a + b = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 25 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \\ b = 14 - a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 25 \cdot (14 - a)^2 = 9 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot \left(196 - 28 \cdot a + a^2\right) = 9 \cdot a^2 \Rightarrow 4900 - 700 \cdot a + 25 \cdot a^2 = 9 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4900 - 700 \cdot a + 25 \cdot a^2 - 9 \cdot a^2 = 0 \Rightarrow 16 \cdot a^2 - 700 \cdot a + 4900 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a^2 - 700 \cdot a + 4900 = 0 \ /: 4 \Rightarrow 4 \cdot a^2 - 175 \cdot a + 1225 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a^2 - 175 \cdot a + 1225 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = -175 \ , \ c = 1225 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \ , \ b = -175 \ , \ c = 1225 \\ a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{175 \pm \sqrt{30625 - 4 \cdot 4 \cdot 1225}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{175 \pm \sqrt{30625 - 19600}}{8} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{175 \pm \sqrt{11025}}{8} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{175 \pm \sqrt{11025}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{175 \pm 105}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{175 + 105}{8} \\ a_2 = \frac{175 - 105}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{280}{8} \\ a_2 = \frac{70}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 35 \\ a_2 = \frac{35}{4} \end{array}\right\}.$$

Sada računamo malu poluos b.

- $\left.\begin{matrix} a = 35 \\ b = 14 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 14 - 35 \Rightarrow b = -21$ nema smisla.
- $\left.\begin{matrix} a = \frac{35}{4} \\ b = 14 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 14 - \frac{35}{4} \Rightarrow b = \frac{56-35}{4} \Rightarrow b = \frac{21}{4}.$

Jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{35}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{21}{4}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1225}{16}} + \frac{y^2}{\frac{441}{16}} = 1.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon = \frac{4}{5} \\ \varepsilon = \frac{e}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{e}{a} \Rightarrow 4 \cdot a = 5 \cdot e \Rightarrow 4 \cdot a = 5 \cdot e \; /^2 \Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot e^2 \Rightarrow \left[e^2 = a^2 - b^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot \left(a^2 - b^2\right) \Rightarrow 16 \cdot a^2 = 25 \cdot a^2 - 25 \cdot b^2 \Rightarrow 25 \cdot b^2 = 25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \Rightarrow 25 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \; /\sqrt{} \Rightarrow 5 \cdot b = \pm\, 3 \cdot a \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \cdot b = 3 \cdot a \\ 5 \cdot b = -3 \cdot a \end{matrix}\right\}.$$

Moramo riješiti dva sustava od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.
Prvi sustav

$$\left.\begin{matrix} 5 \cdot b = 3 \cdot a \\ a + b = 14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \cdot b = 3 \cdot a \\ a = 14 - b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{matrix}\right] \Rightarrow 5 \cdot b = 3 \cdot (14 - b) \Rightarrow 5 \cdot b = 42 - 3 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot b + 3 \cdot b = 42 \Rightarrow 8 \cdot b = 42 \Rightarrow 8 \cdot b = 42 \; /:8 \Rightarrow b = \frac{42}{8} \Rightarrow b = \frac{21}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b = \frac{21}{4} \\ a = 14 - b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 14 - \frac{21}{4} \Rightarrow a = \frac{56-21}{4} \Rightarrow a = \frac{35}{4}.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{35}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{21}{4}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1225}{16}} + \frac{y^2}{\frac{441}{16}} = 1.$$

Drugi sustav

$$\left.\begin{matrix} 5 \cdot b = -3 \cdot a \\ a + b = 14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \cdot b = -3 \cdot a \\ a = 14 - b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{matrix}\right] \Rightarrow 5 \cdot b = -3 \cdot (14 - b) \Rightarrow 5 \cdot b = -42 + 3 \cdot b \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5 \cdot b - 3 \cdot b = -42 \Rightarrow 2 \cdot b = -42 \Rightarrow 2 \cdot b = -42 \; /:2 \Rightarrow b = -21$ nema smisla, negativan je broj.

Vježba 101

Napiši jednadžbu elipse ako je: $a + b = 14,\ \varepsilon = 0.8.$

Rezultat: $\frac{x^2}{\frac{1225}{16}} + \frac{y^2}{\frac{441}{16}} = 1.$

Zadatak 102 (Iva, gimnazija)

Kako glasi osna jednadžba hiperbole kojoj je jedna asimptota $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x,$ a numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{5}{4}$?

Rješenje 102

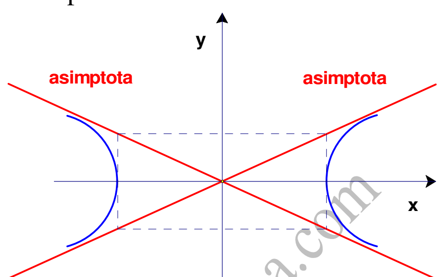
Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad , \quad x \cdot y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\text{ ili }\; y = 0 \;\text{ ili }\; x = y = 0.$$

Hiperbola kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, a fokusi leže na osi x ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2,$$

gdje je a realna poluos, b imaginarna poluos.



Pravci koji sadrže dijagonale središnjeg pravokutnika s dimenzijama 2 · a i 2 · b zovu se asimptote i njihove jednadžbe glase:

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Broj e naziva se linearni ekscentricitet hiperbole.

$$e^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Koeficijent ε naziva se numerički ekscentricitet hiperbole.

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Iz formule za asimptotu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \\ y = \frac{b}{a} \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;/ \cdot 2 \cdot a \;\Rightarrow\; 2 \cdot b = \sqrt{3} \cdot a \;\Rightarrow\; 2 \cdot b = \sqrt{3} \cdot a \;/^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot b^2 = 3 \cdot a^2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot a^2 - 4 \cdot b^2 = 0.$$

Budući da je zadan numerički ekscentricitet, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \\ \varepsilon=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{5}{4} \ /^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{25}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{25}{16} \ / \cdot 16 \cdot a^2 \Rightarrow 16 \cdot \left(a^2+b^2\right)=25 \cdot a^2 \Rightarrow 16 \cdot a^2+16 \cdot b^2=25 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a^2+16 \cdot b^2-25 \cdot a^2=0 \Rightarrow -9 \cdot a^2+16 \cdot b^2=0 \Rightarrow -9 \cdot a^2+16 \cdot b^2=0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot a^2-16 \cdot b^2=0.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot a^2-4 \cdot b^2=0 \\ 9 \cdot a^2-16 \cdot b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot a^2-4 \cdot b^2=0 \ / \cdot (-4) \\ 9 \cdot a^2-16 \cdot b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -12 \cdot a^2+16 \cdot b^2=0 \\ 9 \cdot a^2-16 \cdot b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 \cdot a^2=0 \Rightarrow a=0 \ \text{nema smisla}.$$

Hiperbola ne postoji.

Vježba 102

Kako glasi osna jednadžba hiperbole kojoj je jedna asimptota $y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x,$ a numerički ekscentricitet $\varepsilon=\frac{5}{4}$?

Rezultat: Hiperbola ne postoji.

Zadatak 103 (Siniša, gimnazija)

Kružnica sa središtem u točki S(– 1, 1) prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

$$A) \ (x-1)^2+(y+1)^2=2 \qquad B) \ (x+1)^2+(y-1)^2=2$$

$$C) \ (x+1)^2+(y-1)^2=1 \qquad D) \ (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

Rješenje 103

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Neka su A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

1.inačica

Kružnica sa središtem u točki S(– 1, 1) ima jednadžbu:

$$\left.\begin{aligned} &S(p,\ q)=S(-1,\ 1) \\ &(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ (x-(-1))^2+(y-1)^2=r^2 \ \Rightarrow \ (x+1)^2+(y-1)^2=r^2.$$

Budući da kružnica prolazi ishodištem koordinatnog sustava, koordinate ishodišta uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice i izračunati njezin polumjer.

$$\left.\begin{aligned} &O(x,\ y)=O(0,\ 0) \\ &(x+1)^2+(y-1)^2=r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ (0+1)^2+(0-1)^2=r^2 \ \Rightarrow \ 1^2+(-1)^2=r^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 1+1=r^2 \ \Rightarrow \ r^2=2.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Kružnica sa središtem u točki S(– 1, 1) ima jednadžbu:

$$\left.\begin{aligned} &S(p,\ q)=S(-1,\ 1) \\ &(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ (x-(-1))^2+(y-1)^2=r^2 \ \Rightarrow \ (x+1)^2+(y-1)^2=r^2.$$

Budući da kružnica prolazi ishodištem koordinatnog sustava, njezin polumjer jednak je udaljenosti između točaka S i O.

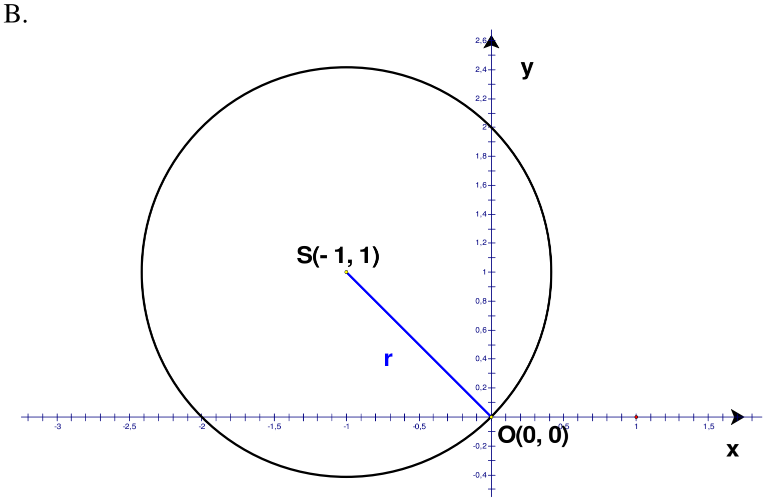
$$\left.\begin{aligned} &S(x_1,\ y_1)=S(-1,\ 1) \\ &O(x_2,\ y_2)=O(0,\ 0) \\ &|SO|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &r=|SO| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ r=\sqrt{(0-(-1))^2+(0-1)^2} \ \Rightarrow \ r=\sqrt{(0+1)^2+(0-1)^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ r=\sqrt{1^2+(-1)^2} \ \Rightarrow \ r=\sqrt{1+1} \ \Rightarrow \ r=\sqrt{2}.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \ \Rightarrow \ (x+1)^2+(y-1)^2=2.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 103

Kružnica sa središtem u točki S(1, 1) prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

$$A)\ (x-1)^2+(y+1)^2=2 \qquad B)\ (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$C)\ (x+1)^2+(y-1)^2=1 \qquad D)\ (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

Rezultat: B.

Zadatak 104 (Nena, gimnazija)

Skicirajte skup točaka ravnine zadan jednadžbom $x^2 + y^2 + 6 \cdot x - 8 \cdot y + 9 = 0$.

Rješenje 104

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Jednadžbu kružnice odredimo svođenjem na potpuni kvadrat. Grupiramo članove uz nepoznanice x i y.

$$x^2+y^2+6\cdot x-8\cdot y+9=0 \Rightarrow x^2+6\cdot x+y^2-8\cdot y=-9 \Rightarrow \left(x^2+6\cdot x\right)+\left(y^2-8\cdot y\right)=-9.$$

Svaku zagradu nadopunimo do potpunog kvadrata dodavajući lijevoj i desnoj strani jednadžbe kvadrat drugog člana.

$$\Rightarrow \left(x^2+6\cdot x\right)+3^2+\left(y^2-8\cdot y\right)+4^2=-9+3^2+4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+6\cdot x\right)+3^2+\left(y^2-8\cdot y\right)+4^2=-9+3^2+4^2.$$

Sređujući dobije se:

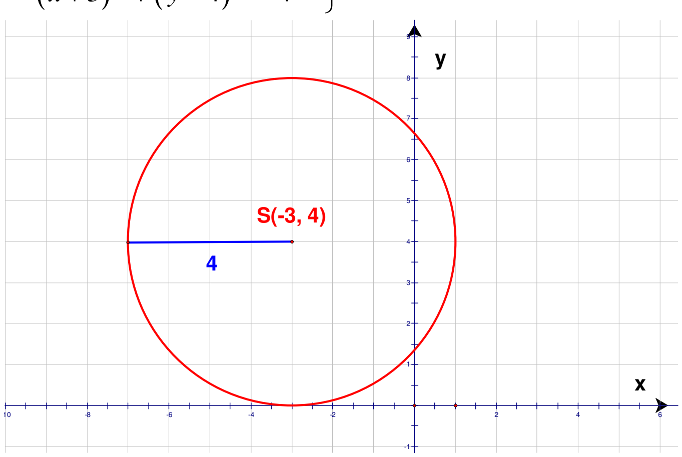
$$\left(x^2+6\cdot x+3^2\right)+\left(y^2-8\cdot y+4^2\right)=-9+9+16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+6\cdot x+3^2\right)+\left(y^2-8\cdot y+4^2\right)=-9+9+16 \Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=4^2.$$

Prepoznajemo da je riječ o kružnici sa središtem u točki S(– 3, 4) i polumjerom r = 4.

$$\left.\begin{array}{l}(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\\ (x+3)^2+(y-4)^2=4^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S(p,\ q)=S(-3,\ 4)\\ r=4\end{array}\right\}.$$



Vježba 104

Napiši središnju jednadžbu kružnice $x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y = 3$.

Rezultat: $(x-2)^2+(y+3)^2=16.$

Zadatak 105 (XYZ, gimnazija)

Usporedno s pravcem $x - 2 \cdot y + 8 = 0$ povučene su tangente na kružnicu $x^2 + (y - 1)^2 = 20$. Odredite njihove jednadžbe.

Rješenje 105

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$$

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ i pravac $y = k \cdot x + l$ dodiruju se ako i samo ako vrijedi

$$r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2.$$

Prvo odredimo eksplicitnu jednadžbu zadanog pravca.

$$x-2\cdot y+8=0 \Rightarrow -2\cdot y=-x-8 \Rightarrow -2\cdot y=-x-8\ /:(-2) \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+4.$$

Koeficijent smjera tog pravca je $k=\frac{1}{2}$.

Budući da su tangente usporedne sa zadanim pravcem imaju isti koeficijent smjera $k=\frac{1}{2}$.

Za kružnicu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=20 \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=0 \\ q=1 \\ r^2=20 \end{array}\right\}.$$

Za tangentu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+l \\ k=\frac{1}{2}\ ,\ l=l \end{array}\right\}.$$

Uvrštavajući sve poznate podatke u uvjet dodira pravca i kružnice dobije se odsječak l na y osi:

$$\left.\begin{array}{l} p=0\ ,\ q=1\ ,\ r^2=20 \\ k=\frac{1}{2}\ ,\ l=l \\ r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(k\cdot p-q+l)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 20\cdot\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot 0-1+l\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)=(-1+l)^2 \Rightarrow 20\cdot\frac{5}{4}=(-1+l)^2 \Rightarrow \frac{20}{1}\cdot\frac{5}{4}=(-1+l)^2 \Rightarrow 25=(-1+l)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1+l)^2=25 \Rightarrow (-1+l)^2=25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow -1+l=\pm\sqrt{25} \Rightarrow -1+l=\pm 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1+l=5 \\ -1+l=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} l=5+1 \\ l=-5+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1=6 \\ l_2=-4 \end{array}\right\}.$$

Jednadžbe tangenata glase:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+l \;,\; l=6 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+l \;,\; l=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+6 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x-4 \end{array}\right\}.$$

Vježba 105

Usporedno s pravcem $x = 2 \cdot y - 8$ povučene su tangente na kružnicu $x^2 + (y - 1)^2 - 20 = 0$. Odredite njihove jednadžbe.

Rezultat: $y=\frac{1}{2}\cdot x+6$, $y=\frac{1}{2}\cdot x-4$.

Zadatak 106 (XYZ, gimnazija)

Usporedno s pravcem $x - 2 \cdot y + 8 = 0$ povučene su tangente na elipsu $3 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 48$. Odredite njihove jednadžbe.

Rješenje 106

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Osna (kanonska) jednadžba elipse glasi:

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Pravac $y = k \cdot x + l$ dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2\cdot k^2+b^2=l^2.$$

Prvo napišemo eksplicitnu jednadžbu zadanog pravca i kanonski oblik elipse.

$$x-2\cdot y+8=0 \Rightarrow -2\cdot y=-x-8 \Rightarrow -2\cdot y=-x-8 \;/:(-2) \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+4.$$

Koeficijent smjera tog pravca je $k=\frac{1}{2}$.

Budući da su tangente usporedne sa zadanim pravcem imaju isti koeficijent smjera $k=\frac{1}{2}$.

Kanonski oblik elipse glasi:

$$3\cdot x^2+4\cdot y^2=48 \Rightarrow 3\cdot x^2+4\cdot y^2=48 \;/:48 \Rightarrow \frac{3\cdot x^2}{48}+\frac{4\cdot y^2}{48}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Za elipsu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=16 \\ b^2=12 \end{array}\right\}.$$

Za tangentu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+l \\ k=\frac{1}{2}\ ,\ l=l \end{array}\right\}.$$

Uvrštavajući sve poznate podatke u uvjet dodira pravca i elipse dobije se odsječak l na y osi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=16\ ,\ b^2=12 \\ k=\frac{1}{2}\ ,\ l=l \\ a^2\cdot k^2+b^2=l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+12=l^2 \Rightarrow 16\cdot\frac{1}{4}+12=l^2 \Rightarrow \frac{16}{1}\cdot\frac{1}{4}+12=l^2 \Rightarrow 4+12=l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16=l^2 \Rightarrow l^2=16 \Rightarrow l^2=16 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow l_{1,2}=\pm\sqrt{16} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1=4 \\ l_2=-4 \end{array}\right\}.$$

Jednadžbe tangenata glase:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+l\ ,\ l=4 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+l\ ,\ l=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+4 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x-4 \end{array}\right\}.$$

Vježba 106

Usporedno s pravcem x = 2 · y – 8 povučene su tangente na elipsu 3 · x^2 + 4 · y^2 – 48 = 0. Odredite njihove jednadžbe.

Rezultat: $y=\frac{1}{2}\cdot x+4\ ,\ y=\frac{1}{2}\cdot x-4.$

Zadatak 107 (Mirjana, srednja škola)

Skicirajte skup točaka ravnine zadan jednadžbom x^2 + y^2 + 6 · x – 8 · y + 9 = 0.

Rješenje 107

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\ ,\ r=\sqrt{p^2+q^2-c}.$$

1.inačica

Odredimo središte i polumjer kružnice tako da očitamo koeficijente iz dane opće jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+6\cdot x-8\cdot y+9=0 \\ x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \\ -2\cdot q=-8 \\ c=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p=6 \;/:(-2) \\ -2\cdot q=-8 \;/:(-2) \\ c=9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=-3 \\ q=4 \\ c=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r=\sqrt{p^2+q^2-c}\right] \Rightarrow r=\sqrt{(-3)^2+4^2-9} \Rightarrow r=\sqrt{9+16-9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{9+16-9} \Rightarrow r=\sqrt{16} \Rightarrow r=4.$$

Središte kružnice i polumjer iznose:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\,q)=S(-3,\,4) \\ r=4 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Preuredimo jednadžbu i zatim nadopunimo na potpuni kvadrat.

$$x^2+y^2+6\cdot x-8\cdot y+9=0 \Rightarrow x^2+6\cdot x+y^2-8\cdot y+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+6\cdot x+3^2-3^2+y^2-8\cdot y+4^2-4^2+9=0 \Rightarrow$$

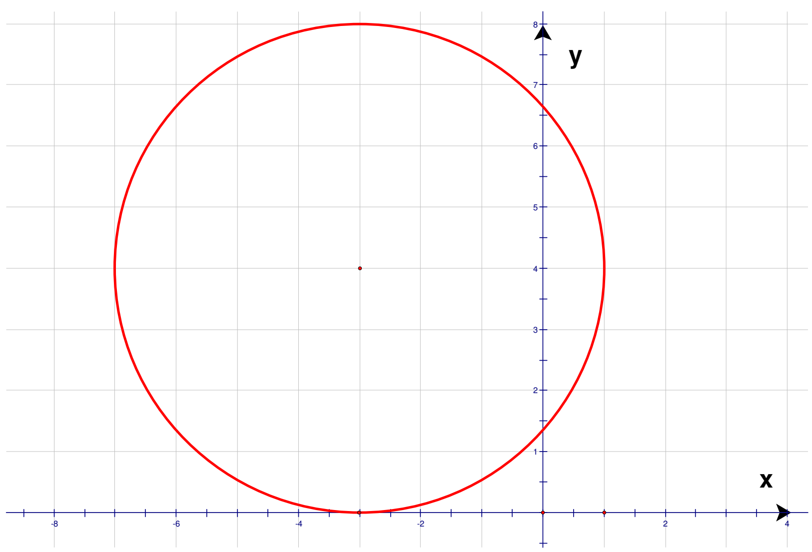
$$\Rightarrow x^2+6\cdot x+3^2-3^2+y^2-8\cdot y+4^2-4^2+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+6\cdot x+3^2\right)-3^2+\left(y^2-8\cdot y+4^2\right)-4^2+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2-3^2+(y-4)^2-4^2+9=0 \Rightarrow (x+3)^2-9+(y-4)^2-16+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2-9+(y-4)^2-16+9=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2-16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=16 \Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=4^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S(p,\,q)=S(-3,\,4) \\ r=4 \end{array}\right\}.$$



Vježba 107

Odredite polumjer kružnice zadane jednadžbom $x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y - 7 = 0$.

Rezultat: $r = 3$.

Zadatak 108 (Neven, srednja škola)

Nađi najbližu i najdalju točku od pravca $3 \cdot x + y - 12 = 0$ do kružnice $x^2 + y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y = 0$.

Rješenje 108

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^b \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0 \;,\; r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}.$$

Uvjet okomitosti pravaca:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su okomiti ako i samo ako je

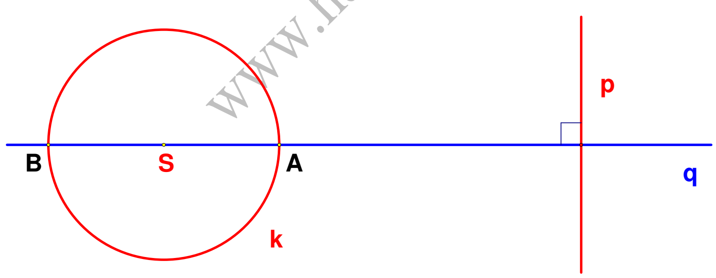
$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$



1.inačica
Odredimo središte kružnice tako da očitamo koeficijente iz dane opće jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \cdot p = -6 \\ -2 \cdot q = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \cdot p = -6 \;/ : (-2) \\ -2 \cdot q = -2 \;/ : (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = 3 \\ q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(p, q) = S(3, 1) \text{ središte kružnice.}$$

2.inačica
Preuredimo jednadžbu i zatim nadopunimo na potpuni kvadrat.

$$x^2 + y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 3^2 - 3^2 + y^2 - 2 \cdot y + 1^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 3^2 - 3^2 + y^2 - 2 \cdot y + 1^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 6 \cdot x + 3^2\right) - 3^2 + \left(y^2 - 2 \cdot y + 1^2\right) - 1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 3^2 + (y-1)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9+1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 \Rightarrow S(p, q) = S(3, 1) \text{ središte kružnice.}$$

Moramo naći jednadžbu pravca q koji je okomit na zadani pravac p i prolazi središtem S kružnice k. Jednadžbu zadanog pravca p napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njegov koeficijent smjera k_1.

$$3 \cdot x + y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3 \cdot x + 12 \Rightarrow k_1 = -3.$$

Budući da je pravac q okomit na pravac p njegov koeficijent smjera k_2 glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = -\dfrac{1}{k_1} \\ k_1 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{-3} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{3}.$$

Pravac q prolazi točkom S i ima koeficijent smjera k_2 pa mu jednadžba ima oblik:

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(3, 1)\ ,\ k_2 = \dfrac{1}{3} \\ y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x-3) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3} \cdot x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3} \cdot x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x.$$

Presjeci pravca q i kružnice k su tražene točke A i B (najbliža i najdalja točka kružnice k od pravca p). Koordinate točaka rješenja su sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot x\right)^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{9} \cdot x^2 - 6 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{9} \cdot x^2 - 6 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot x = 0 \ / \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot x^2 + x^2 - 54 \cdot x - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow 10 \cdot x^2 - 60 \cdot x = 0 \Rightarrow 10 \cdot x^2 - 60 \cdot x = 0 \ / : 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-6) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array}\right\}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y = \frac{1}{3} \cdot x \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{3} \cdot 0 \\ y_2 = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Tražene točke imaju koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(0, 0) \\ B(x_2, y_2) = B(6, 2) \end{array}\right\}.$$

Vježba 108

Nađi najbližu i najdalju točku od pravca $\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$ do kružnice $x^2 + y^2 - 6 \cdot x - 2 \cdot y = 0$.

Rezultat: $A(0, 0)\ ,\ B(6, 2).$

Zadatak 109 (Nina, srednja škola)

Odredi jednadžbu parabole $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ koja sadrži točke $T_1(x_1, 4)$ i $T_2(x_2, -12)$, pri čemu je $x_1 + x_2 = 20$.

Rješenje 109

Ponovimo!

Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa, ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

gdje je p poluparametar parabole.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uvrstimo koordinate točaka T_1 i T_2 u jednadžbu parabole kako bismo dobili sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} T_1(x, y) = T_1(x_1, 4) \ , \ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ T_2(x, y) = T_2(x_2, -12) \ , \ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4^2 = 2 \cdot p \cdot x_1 \\ (-12)^2 = 2 \cdot p \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16 = 2 \cdot p \cdot x_1 \\ 144 = 2 \cdot p \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot p \cdot x_1 = 16 \\ 2 \cdot p \cdot x_2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot p \cdot x_1 = 16 \ /:2 \\ 2 \cdot p \cdot x_2 = 144 \ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \cdot x_1 = 8 \\ p \cdot x_2 = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \cdot x_1 + p \cdot x_2 = 8 + 72 \Rightarrow p \cdot x_1 + p \cdot x_2 = 80 \Rightarrow p \cdot (x_1 + x_2) = 80 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet zadatka} \\ x_1 + x_2 = 20 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \cdot 20 = 80 \Rightarrow 20 \cdot p = 80 \Rightarrow 20 \cdot p = 80 \ /:20 \Rightarrow p = 4.$$

Jednadžba parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} p = 4 \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x \Rightarrow y^2 = 8 \cdot x.$$

Vježba 109

Odredi jednadžbu parabole $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ koja sadrži točke $T_1(x_1, 4)$ i $T_2(x_2, -12)$, pri čemu je $x_1 + x_2 = 10$.

Rezultat: $y^2 = 16 \cdot x.$

Zadatak 110 (Malena, strukovna škola)

Odredite fokuse elipse zadane jednadžbom $3 \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 = 120.$

$$A.\ F_1(-4, 0)\ ,\ F_2(4, 0) \qquad B.\ F_1(-5, 0)\ ,\ F_2(5, 0)$$
$$C.\ F_1(0, -5)\ ,\ F_2(0, 5) \qquad D.\ F_1(0, -4)\ ,\ F_2(0, 4)$$

Rješenje 110

Ponovimo!

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdje su a i b velika i mala poluos elipse. Ova se jednadžba naziva kanonska ili osna jednadžba elipse.

Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$3 \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 = 120 \Rightarrow 3 \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 = 120 \;/ : 120 \Rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{120} + \frac{8 \cdot y^2}{120} = 1 \Rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{120} + \frac{8 \cdot y^2}{120} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 40 \\ b^2 = 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[e = \sqrt{a^2 - b^2} \right] \Rightarrow e = \sqrt{40 - 15} \Rightarrow e = \sqrt{25} \Rightarrow e = 5.$$

Fokusi elipse su:

$$F_1(-e, 0) = F_1(-5, 0) \;,\; F_2(e, 0) = F_2(5, 0).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 110

Odredite fokuse elipse zadane jednadžbom $16 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 400.$

$$A.\; F_1(-3, 0) \;,\; F_2(3, 0) \qquad B.\; F_1(-2, 0) \;,\; F_2(2, 0)$$
$$C.\; F_1(0, -3) \;,\; F_2(0, 3) \qquad D.\; F_1(0, -2) \;,\; F_2(0, 2)$$

Rezultat: A.

Zadatak 111 (Malena, strukovna škola)

Asimptota hiperbole je pravac y = 2 · x. Na hiperboli je točka T(5, 8). Jednadžba hiperbole je:

$$A.\; \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad B.\; \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1 \qquad C.\; \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \qquad D.\; \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$

Rješenje 111

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa, ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdje je a realna poluos, b imaginarna poluos. Ova se jednadžba naziva kanonska ili osna jednadžba hiperbole.

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost.

Asimptote hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

su pravci

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

Budući da je asimptota hiperbole pravac y = 2 · x, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} y = 2 \cdot x \\ y = \frac{b}{a} \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \;/ \cdot a \Rightarrow b = 2 \cdot a.$$

Na hiperboli je točka T(5, 8) pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu hiperbole.

$$\left.\begin{array}{l} D(x,\ y)=D(5,\ 8) \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5^2}{a^2}-\frac{8^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{64}{b^2}=1.$$

Iz sustava jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{64}{b^2}=1 \\ b=2\cdot a \end{array}\right.$$

dobiju se a i b.
Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{64}{b^2}=1 \\ b=2\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{64}{(2\cdot a)^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{64}{4\cdot a^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100-64}{4\cdot a^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{4\cdot a^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{4\cdot a^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}=1 \Rightarrow a^2=9.$$

Računamo b^2.

$$\left.\begin{array}{l} b=2\cdot a \\ a^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2\cdot a\ /^2 \\ a^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2=4\cdot a^2 \\ a^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b^2=4\cdot 9 \Rightarrow b^2=36.$$

Jednadžba hiperbole je:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=9\ ,\ b^2=36 \\ \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{64}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 111

Asimptota hiperbole je pravac y = – 2 · x. Na hiperboli je točka T(5, 8). Jednadžba hiperbole je:

$A.\ \dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $\qquad B.\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ $\qquad C.\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ $\qquad D.\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

Rezultat: B.

Zadatak 112 (Kate, gimnazija)

U točki D(4, y < 0) kružnice $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ povučene su tangenta i normala. Nađi njihove jednadžbe.

Rješenje 112

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Jednadžba tangente kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ s diralištem $D(x_0, y_0)$ glasi:

$$(x_0-p)\cdot(x-p)+(y_0-q)\cdot(y-q)=r^2.$$

Jednadžba normale kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ u točki D(x_0, y_0) glasi:

$$y-y_0=\frac{y_0-q}{x_0-p}\cdot(x-x_0).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Normalom na krivulju y = f(x) u točki x_0 nazivamo pravac koji prolazi kroz točku (x_0, f(x_0)) i okomit je na tangentu krivulje u toj točki.
Prvo izračunamo ordinatu točke D. U jednadžbu kružnice uvrstimo x = 4 i dobijemo kvadratnu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} D(x,y)=D(4,\ y<0) \\ (x-1)^2+(y+3)^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow (4-1)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow 3^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+(y+3)^2=25 \Rightarrow (y+3)^2=25-9 \Rightarrow (y+3)^2=16 \Rightarrow (y+3)^2=16\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+3=\pm\sqrt{16} \Rightarrow y+3=\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3=4 \\ y+3=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=4-3 \\ y=-4-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=1 \\ y_2=-7 \end{array}\right\}.$$

Ordinata koja zadovoljava uvjet y < 0 je y = – 7. Dakle, diralište je točka D(4, – 7).

- Jednadžba tangente

$$\left.\begin{array}{l} (x-1)^2+(y+3)^2=25 \\ p=1\ ,\ q=-3\ ,\ r^2=25 \\ D(x_0,\ y_0)=D(4,-7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[(x_0-p)\cdot(x-p)+(y_0-q)\cdot(y-q)=r^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4-1)\cdot(x-1)+(-7+3)\cdot(y+3)=25 \Rightarrow 3\cdot(x-1)-4\cdot(y+3)=25 \Rightarrow 3\cdot x-3-4\cdot y-12=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x-4\cdot y-3-12-25=0 \Rightarrow 3\cdot x-4\cdot y-40=0.$$

- Jednadžba normale

$$\left.\begin{array}{l} (x-1)^2+(y+3)^2=25 \\ p=1\ ,\ q=-3\ ,\ r^2=25 \\ D(x_0,\ y_0)=D(4,-7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y-y_0=\frac{y_0-q}{x_0-p}\cdot(x-x_0)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-(-7)=\frac{-7+3}{4-1}\cdot(x-4) \Rightarrow y+7=\frac{-7+3}{4-1}\cdot(x-4) \Rightarrow y+7=\frac{-4}{3}\cdot(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+7=-\frac{4}{3}\cdot x+\frac{16}{3} \Rightarrow y+7=-\frac{4}{3}\cdot x+\frac{16}{3}\ /\cdot 3 \Rightarrow 3\cdot y+21=-4\cdot x+16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x+3\cdot y+21-16=0 \Rightarrow 4\cdot x+3\cdot y+5=0.$$

Vježba 112

U točki D(0, y > 0) kružnice $x^2 + y^2 = 25$ povučena je tangenta. Nađi njezinu jednadžbu.

Rezultat: y = 5.

Zadatak 113 (Kate, gimnazija)

Odredi duljinu tetive kružnice određene pravcem, ako je $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,
$4\cdot x - 3\cdot y - 5 = 0$.

Rješenje 113

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Neka su A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Dužina koja spaja dvije točke kružnice naziva se tetiva kružnice.
Prvo nađemo točke presjeka pravca i kružnice tako da riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\ 4\cdot x-3\cdot y-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\ 4\cdot x=3\cdot y+5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\ 4\cdot x=3\cdot y+5\ /:4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\ x=\dfrac{3\cdot y+5}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow\left(\frac{3\cdot y+5}{4}-2\right)^2+(y-1)^2=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3\cdot y+5-8}{4}\right)^2+(y-1)^2=25\Rightarrow\left(\frac{3\cdot y-3}{4}\right)^2+(y-1)^2=25\Rightarrow\left(\frac{3\cdot(y-1)}{4}\right)^2+(y-1)^2=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9\cdot(y-1)^2}{16}+(y-1)^2=25\Rightarrow\frac{9\cdot(y-1)^2}{16}+(y-1)^2=25\ /\cdot 16\Rightarrow 9\cdot(y-1)^2+16\cdot(y-1)^2=25\cdot 16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cdot(y-1)^2=25\cdot 16\Rightarrow 25\cdot(y-1)^2=25\cdot 16\ /:25\Rightarrow(y-1)^2=16\Rightarrow(y-1)^2=16\ /\sqrt{\ }\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-1=\pm\sqrt{16}\Rightarrow y-1=\pm 4\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y-1=4\\ y-1=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=4+1\\ y=-4+1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y_1=5\\ y_2=-3\end{array}\right\}.$$

Sada računamo x.

- $$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{3\cdot y+5}{4}\\ y_1=5\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=\frac{3\cdot 5+5}{4}\Rightarrow x_1=\frac{15+5}{4}\Rightarrow x_1=\frac{20}{4}\Rightarrow x_1=5.$$

Koordinate točke A su:

$$A(x_1,\ y_1)=A(5,\ 5).$$

- $$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{3\cdot y+5}{4}\\ y_2=-3\end{array}\right\}\Rightarrow x_2=\frac{3\cdot(-3)+5}{4}\Rightarrow x_2=\frac{-9+5}{4}\Rightarrow x_2=\frac{-4}{4}\Rightarrow x_2=-1.$$

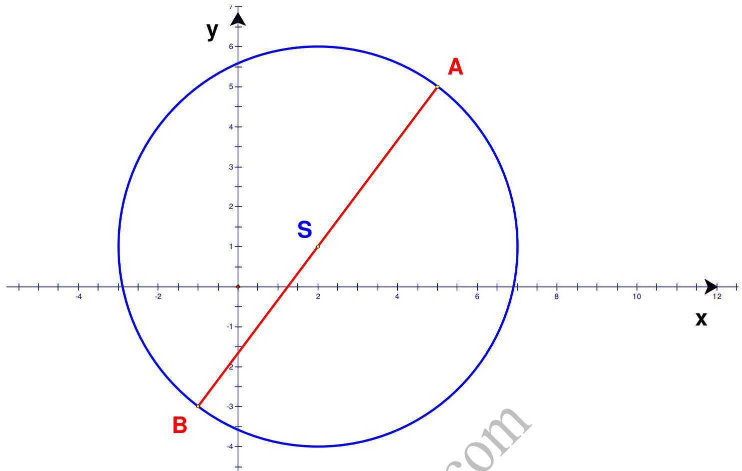
Koordinate točke B su:

$$B(x_2,\ y_2)=B(-1,\ -3).$$

Duljina tetive $\overline{AB}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(5, 5) \\ B(x_2, y_2) = B(-1, -3) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-3-5)^2 + (-1-5)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{64+36} \Rightarrow |AB| = \sqrt{100} \Rightarrow |AB| = 10.$$



Vježba 113

Odredi duljinu tetive kružnice određene pravcem, ako je $x^2 + y^2 = 25$, $y = x$.

Rezultat: 10.

Zadatak 114 (Kate, gimnazija)

Napiši jednadžbu elipse ako je a + b = 16, e = 8.

Rješenje 114

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2,$$

gdje su a i b velika i mala poluos elipse. Ova se jednadžba naziva kanonska ili osna jednadžba elipse. Linearni ekscentricitet elipse:

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 8^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=16 \\ a^2 - b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=16-a \\ a^2 - b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a^2 - (16-a)^2 = 64 \Rightarrow a^2 - \left(256 - 32 \cdot a + a^2\right) = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 256 + 32 \cdot a - a^2 = 64 \Rightarrow a^2 - 256 + 32 \cdot a - a^2 = 64 \Rightarrow -256 + 32 \cdot a = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32 \cdot a = 64 + 256 \Rightarrow 32 \cdot a = 320 \Rightarrow 32 \cdot a = 320 \; /: 32 \Rightarrow a = 10.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a=10 \\ a+b=16 \end{array}\right\} \Rightarrow 10+b=16 \Rightarrow b=16-10 \Rightarrow b=6.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=10 \quad , \quad b=6 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Vježba 114

Napiši jednadžbu elipse ako je a + b = 8, e = 4.

Rezultat: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Zadatak 115 (Kate, gimnazija)

Napiši jednadžbu elipse koja prolazi točkama A i B, ako je A(9, 4), B(12, 3).

Rješenje 115

Ponovimo!

$$x \cdot y=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ili } y=0 \text{ ili } x=y=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2 \cdot x^2+a^2 \cdot y^2=a^2 \cdot b^2,$$

gdje su a i b velika i mala poluos elipse. Ova se jednadžba naziva kanonska ili osna jednadžba elipse. Budući da elipsa prolazi točkama A i B, njihove koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu elipse.

$$\left.\begin{array}{l} A(x, y)=A(9, 4) \\ B(x, y)=B(12, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[b^2 \cdot x^2+a^2 \cdot y^2=a^2 \cdot b^2\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 \cdot 9^2+a^2 \cdot 4^2=a^2 \cdot b^2 \\ b^2 \cdot 12^2+a^2 \cdot 3^2=a^2 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2=a^2 \cdot b^2 \\ 144 \cdot b^2+9 \cdot a^2=a^2 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2-\left(144 \cdot b^2+9 \cdot a^2\right)=a^2 \cdot b^2-a^2 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2-144 \cdot b^2-9 \cdot a^2=a^2 \cdot b^2-a^2 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2-144 \cdot b^2-9 \cdot a^2=a^2 \cdot b^2-a^2 \cdot b^2 \Rightarrow 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2-144 \cdot b^2-9 \cdot a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -63 \cdot b^2+7 \cdot a^2=0 \Rightarrow 7 \cdot a^2=63 \cdot b^2 \Rightarrow 7 \cdot a^2=63 \cdot b^2 \ /:7 \Rightarrow a^2=9 \cdot b^2.$$

Sada u jednu jednadžbu elipse uvrstimo

$$a^2=9 \cdot b^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} 81 \cdot b^2+16 \cdot a^2=a^2 \cdot b^2 \\ a^2=9 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 81 \cdot b^2+16 \cdot 9 \cdot b^2=9 \cdot b^2 \cdot b^2 \Rightarrow 81 \cdot b^2+144 \cdot b^2=9 \cdot b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 \cdot b^2+144 \cdot b^2-9 \cdot b^4=0 \Rightarrow 225 \cdot b^2-9 \cdot b^4=0 \Rightarrow b^2 \cdot \left(225-9 \cdot b^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2=0 \\ 225-9\cdot b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2=0 \text{ nema smisla} \\ -9\cdot b^2=-225 \end{array}\right\} \Rightarrow -9\cdot b^2=-225 \;/:(-9) \Rightarrow b^2=\frac{225}{9}.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{array}{l} b^2=\frac{225}{9} \\ a^2=9\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=9\cdot\frac{225}{9} \Rightarrow a^2=9\cdot\frac{225}{9} \Rightarrow a^2=225.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=225 \;,\; b^2=\frac{225}{9} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{\frac{225}{9}}=1.$$

Vježba 115

Napiši jednadžbu elipse koja prolazi točkama A i B, ako je A(– 9, – 4), B(12, 3).

Rezultat: $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{\frac{225}{9}}=1.$

Zadatak 116 (Marija, strukovna škola)

Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ prolazi točkom T(3, 3). Odredite p.

Rješenje 116

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2=2\cdot p\cdot x.$$

Budući da parabola $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ prolazi točkom T(3, 3), koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu parabole.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(3,\ 3) \\ y^2=2\cdot p\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 3^2=2\cdot p\cdot 3 \Rightarrow 9=6\cdot p \Rightarrow 6\cdot p=9 \Rightarrow 6\cdot p=9 \;/\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=\frac{9}{6} \Rightarrow p=\frac{9}{6} \Rightarrow p=\frac{3}{2}.$$

Vježba 116

Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ prolazi točkom T(6, 6). Odredite p.

Rezultat: p = 3.

Zadatak 117 (Marija, strukovna škola)

Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12 \cdot x$. Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2 \cdot x + 5$.

Rješenje 117

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2=2\cdot p\cdot x.$$

Ako je žarište (fokus) na pozitivnom dijelu x – osi, tada ima koordinate

$$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right).$$

$$|\,x\,| = \begin{cases} x \text{ za } x \ge 0 \\ -x \text{ za } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Udaljenost točke od pravca
Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|\,A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Iz jednadžbe parabole odredi se parametar p.

$$\left.\begin{matrix} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = 12 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \Rightarrow 2 \cdot p = 12 \;/ : 2 \Rightarrow p = 6.$$

Žarište (fokus) parabole ima koordinate:

$$\left.\begin{matrix} p = 6 \\ F\left(\frac{p}{2},\ 0\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{p}{2},\ 0\right) = F\left(\frac{6}{2},\ 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{p}{2},\ 0\right) = F(3,\ 0).$$

Da bismo izračunali udaljenost zadanog pravca $y = 2 \cdot x + 5$ od žarišta (fokusa) moramo jednadžbu pravca napisati u implicitnom obliku.

$$y = 2 \cdot x + 5 \Rightarrow -2 \cdot x + y - 5 = 0 \Rightarrow -2 \cdot x + y - 5 = 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow 2 \cdot x - y + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot x - y + 5 = 0 \\ A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 5 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo udaljenost žarišta (fokusa) F od pravca p.

$$\left.\begin{matrix} F(x_0,\ y_0) = F(3,\ 0) \\ 2 \cdot x - y + 5 = 0 \\ A = 2 \ ,\ B = -1 \ ,\ C = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\,|\,Fp\,| = \frac{|\,A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] \Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{|\,2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 5\,|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{|\,6 - 0 + 5\,|}{\sqrt{4 + 1}} \Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{|11|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{11}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{11}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} \Rightarrow |\,Fp\,| = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

Vježba 117

Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12 \cdot x$. Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2 \cdot x - 1$.

Rezultat: $\sqrt{5}$.

Zadatak 118 (Marija, strukovna škola)

Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ ima fokus F(1, 0) i prolazi točkom A(x, – 3). Odredite jednadžbu tangente na tu parabolu u njezinoj točki A.

Rješenje 118

Ponovimo!

Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d (ravnalice ili direktrise) i jedne čvrste točke F (žarišta ili fokusa) u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscise ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x.$$

Ako je žarište (fokus) na pozitivnom dijelu x – osi, tada ima koordinate

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Tangenta na parabolu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

u njezinoj točki $D(x_0, y_0)$ ima jednadžbu

$$y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Najprije odredimo jednadžbu parabole.

$$\left.\begin{matrix} F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F(1, 0) \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{p}{2} = 1 \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{p}{2} = 1 \; / \cdot 2 \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p = 2 \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow y^2 = 4 \cdot x.$$

Budući da točka A pripada paraboli, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu parabole i tako izračunati apscisu točke A.

$$\left.\begin{matrix} A(x, y) = A(x, -3) \\ y^2 = 4 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-3)^2 = 4 \cdot x \Rightarrow 9 = 4 \cdot x \Rightarrow 4 \cdot x = 9 \Rightarrow 4 \cdot x = 9 \; /: 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} \Rightarrow A(x, y) = A\left(\frac{9}{4}, -3\right).$$

Jednadžba tangente na tu parabolu u njezinoj točki A glasi:

$$\left.\begin{matrix} A(x_0, y_0) = A\left(\frac{9}{4}, -3\right) \\ p = 2 \\ y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y \cdot (-3) = 2 \cdot \left(x + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow -3 \cdot y = 2 \cdot \left(x + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow -3 \cdot y = 2 \cdot x + \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot y=2\cdot x+\frac{9}{2}\ /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\ \Rightarrow\ y=-\frac{2}{3}\cdot x-\frac{3}{2}.$$

Vježba 118

Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ ima fokus F(1, 0) i prolazi točkom A(x, 3). Odredite jednadžbu tangente na tu parabolu u njezinoj točki A.

Rezultat: $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{3}{2}.$

Zadatak 119 (Ivan, gimnazija)

Napiši kanonsku jednadžbu hiperbole ako je

$$\begin{cases} a-b=2\cdot\sqrt{2} \\ e=2\cdot\sqrt{10} \end{cases}.$$

Rješenje 119

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Hiperbola čiji fokusi (žarišta) leže na x – osi, a središte hiperbole je ishodište koordinatnog sustava dana je jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Linearni ekscentricitet hiperbole je

$$e^2=a^2+b^2.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo a i b.

$$\left.\begin{matrix} a-b=2\cdot\sqrt{2} \\ e=2\cdot\sqrt{10} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{kvadriramo drugu} \\ \text{jednadžbu}\end{matrix}\right]\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ e=2\cdot\sqrt{10}\ /^2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ e^2=\left(2\cdot\sqrt{10}\right)^2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ e^2=2^2\cdot\left(\sqrt{10}\right)^2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ e^2=4\cdot 10 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ e^2=40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[e^2=a^2+b^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ a^2+b^2=40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{matrix}\right]\Rightarrow\left(b+2\cdot\sqrt{2}\right)^2+b^2=40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot b+\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2+b^2=40\ \Rightarrow\ b^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot b+8+b^2=40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot b+8+b^2-40=0\ \Rightarrow\ 2\cdot b^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot b-32=0\ \Rightarrow\ 2\cdot b^2+4\cdot\sqrt{2}\cdot b-32=0\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot b-16=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} b^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot b-16=0 \\ a=1\ ,\ b=2\cdot\sqrt{2}\ ,\ c=-16 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=2\cdot\sqrt{2}\ ,\ c=-16 \\ b_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b_{1,2}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2-4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow\ b_{1,2}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\pm\sqrt{8+64}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{1,2}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\pm\sqrt{72}}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow b_{1,2}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\pm\sqrt{36\cdot 2}}{2} \Rightarrow b_{1,2}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}\pm 6\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1=\dfrac{-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}}{2} \\ b_2=\dfrac{-2\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1=\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{2} \\ b_2=-\dfrac{8\cdot\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1=2\cdot\sqrt{2} \\ b_2=-4\cdot\sqrt{2}\ \text{nema smisla}\end{array}\right\} \Rightarrow b=2\cdot\sqrt{2}.$$

Računamo realnu poluos a.

$$\left.\begin{array}{l} a=b+2\cdot\sqrt{2} \\ b=2\cdot\sqrt{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a=2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow a=4\cdot\sqrt{2}.$$

Kanonska jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=4\cdot\sqrt{2}\ ,\ b=2\cdot\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{2^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16\cdot 2}-\frac{y^2}{4\cdot 2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1.$$

Vježba 119

Napiši kanonsku jednadžbu hiperbole ako je

$$\begin{cases} a+b=7 \\ e=5\end{cases}.$$

Rezultat: Dva rješenja: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\ ,\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$

Zadatak 120 (Ivan, gimnazija)

Odredi nepoznatu koordinatu točke T koja pripada hiperboli ako je:

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1\ ,\ T\left(10,\ y<0\right).$$

Rješenje 120

Ponovimo!

Hiperbola čiji fokusi (žarišta) leže na x – osi, a središte hiperbole je ishodište koordinatnog sustava dana je jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Budući da točka T mora pripadati hiperboli, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu hiperbole i riješiti dobivenu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x\ ,y\right)=T\left(10,\ y\right) \\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10^2}{2}-y^2=1 \Rightarrow \frac{100}{2}-y^2=1 \Rightarrow 50-y^2=1 \Rightarrow -y^2=1-50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^2=-49 \Rightarrow -y^2=-49\ /\cdot\left(-1\right) \Rightarrow y^2=49 \Rightarrow y^2=49\ /\sqrt{\ } \Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 7 \\ y_2 = -7 \end{array}\right\}.$$

Zbog uvjeta iz zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(10,\ y < 0) \\ y = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow T(10,\ -7).$$

Vježba 120

Odredi nepoznatu koordinatu točke T koja pripada hiperboli ako je:

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \ , \ T(10,\ y > 0).$$

Rezultat: T(10, 7).