Zadatak 041 (4A, hotelijerska škola)

Dana je parabola $y^2 = -4 \cdot x$. Kroz njezino žarište konstruiran je pravac pod kutom 135° prema pozitivnom dijelu x – osi. Napišite jednadžbu tog pravca.

Rješenje 041

Ponovimo!

$$\text{Tjemena jednadžba parabole} \Rightarrow y^2 = 2 \cdot p \cdot x \quad (2 \cdot p - \text{parametar})$$

$$\text{Žarište (fokus) parabole} \Rightarrow F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

Koordinate žarišta zadane parabole su:

$$y^2 = -4 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot p = -4 \;/{:}4 \Rightarrow \frac{p}{2} = -1 \Rightarrow F(-1, 0).$$

Koeficijent smjera pravca jednak je tangensu kuta što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom x – osi:

$$k = tg\,\alpha \Rightarrow k = tg\,135^0 = tg\left(180^0 - 45^0\right) = -tg\,45^0 = -1.$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkom F(– 1, 0) i ima koeficijent smjera k = – 1 glasi:

$$\left.\begin{array}{l} F(-1, 0) \quad , \quad k = -1 \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow x + y + 1 = 0.$$

Vježba 041

Dana je parabola $y^2 = -4 \cdot x$. Kroz njezino žarište konstruiran je pravac pod kutom 45° prema pozitivnom dijelu x – osi. Napišite jednadžbu tog pravca.

Rezultat: $x - y + 1 = 0.$

Zadatak 042 (Tina, gimnazija)

Kroz žarište parabole $y^2 = 10 \cdot x$ konstruirana je tetiva okomita na njezinu os. Odredite duljinu tetive.

Rješenje 042

Ponovimo!

$$\text{Tjemena jednadžba parabole} \Rightarrow y^2 = 2 \cdot p \cdot x \quad (2 \cdot p - \text{parametar})$$

$$\text{Žarište (fokus) parabole} \Rightarrow F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

Koordinate žarišta zadane parabole su:

$$y^2 = 10 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot p = 10 \;/{:}4 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkom $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, a okomit je na x – os glasi: $x = \frac{5}{2}.$

Računamo presjek pravca i parabole:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ y^2 = 10 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 10 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow y^2 = 25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow y_{1,2} = \pm 5.$$

Točke presjeka su: $A\left(\frac{5}{2}, -5\right)$ i $B\left(\frac{5}{2}, 5\right)$. Duljina tetive iznosi:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (5 + 5)^2} = \sqrt{0 + 10^2} = 10.$$

Vježba 042

Kroz žarište parabole $y^2 = 10 \cdot x$ konstruirana je tetiva okomita na njezinu os. Odredite površinu segmenta.

Rezultat: Površina segmenta parabole koji je određen točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ glasi

$$P = \frac{4}{3} \cdot x_1 \cdot y_1.$$

Zato je: $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{50}{3}.$

Zadatak 043 (4A, hotelijerska škola)

Ako kružnica $x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ ima polumjer r = 1 nađi a.

Rješenje 043

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \qquad , \qquad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$$

Budući da jednadžba kružnice ima oblik $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, zadani izraz transformirat ćemo na sljedeći način:

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + a = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x + 1^2 - 1^2 + y^2 - 4 \cdot y + 2^2 - 2^2 + a = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 - a \Rightarrow \begin{bmatrix} r = 1 \\ r^2 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 - a = 1 \Rightarrow a = 4.$$

Vježba 043

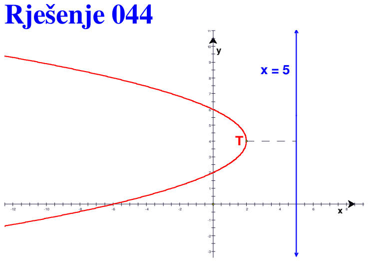
Ako kružnica $x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ ima polumjer r = 2 nađi a.

Rezultat: a = 1.

Zadatak 044 (4A, hotelijerska škola)

Koja je točka na paraboli $x = -\frac{1}{2} \cdot y^2 + 4 \cdot y - 6$ najbliža pravcu x – 5 = 0?

Rješenje 044



Sa slike vidi se da je tjeme T parabole najbliža točka pravcu x = 5. Koordinate tjemena iznose:

$$T\left(\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}, -\frac{b}{2 \cdot a}\right).$$

Uočite da su koordinate tjemena obrnuto nego za parabolu $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Tjeme iznosi:

$$T\left(\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}, -\frac{b}{2 \cdot a}\right) = T\left(\frac{4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-6)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}, -\frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = T\left(\frac{16-12}{-2}, -\frac{4}{-1}\right) = T(2, 4).$$

Vježba 044

Koja je točka na paraboli $x = -\frac{1}{2} \cdot y^2 + 4 \cdot y - 8$ najbliža pravcu x – 5 = 0?

Rezultat: T(0, 4).

Zadatak 045 (Gregor, gimnazija)

Kružnica prolazi žarištima hiperbole $144 \cdot x^2 - 25 \cdot y^2 = 3600$ i točkom T(5, 6). Koliki je polumjer kružnice?

Rješenje 045

Napišimo kanonsku jednadžbu hiperbole:

$$144 \cdot x^2 - 25 \cdot y^2 = 3600 \ /:3600 \Rightarrow \frac{144 \cdot x^2}{3600} - \frac{25 \cdot y^2}{3600} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Linearni ekscentricitet je:

$$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

pa su žarišta (fokusi):

$$F_1(-13,0) \quad \text{i} \quad F_2(13,0).$$

Budući da su zadane tri točke $F_1(-13,0), F_2(13,0), T(5,6)$ koje pripadaju kružnici, zadatak možemo riješiti na dva načina. Jedan je način da izračunamo jednadžbe simetrala dviju stranica. Njihov je presjek središte opisane kružnice, a udaljenost tog središta do bilo kojeg vrha je polumjer kružnice.

Drugi je način da iskoristimo središnju jednadžbu kružnice, te u nju uvrstimo točke F_1, F_2 i T, te izračunamo nepoznanice p, q i r. Riješimo zadatak na ovaj drugi način.
Uvrštavanjem točaka F_1, F_2, T u jednadžbu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ dobivamo tri jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} F_1(-13,0) \\ F_2(13,0) \\ T(5,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (-13-p)^2+(0-q)^2=r^2 \\ (13-p)^2+(0-q)^2=r^2 \\ (5-p)^2+(6-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (13+p)^2+q^2=r^2 \\ (13-p)^2+q^2=r^2 \\ (5-p)^2+(6-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{kvadriramo} \\ (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \\ (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 169+26\cdot p+p^2+q^2=r^2 \\ 169-26\cdot p+p^2+q^2=r^2 \\ 25-10\cdot p+p^2+36-12\cdot q+q^2=r^2 \end{array}\right\}.$$

Oduzmemo li prve dvije jednadžbe, dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} 169+26\cdot p+p^2+q^2=r^2 \\ 169-26\cdot p+p^2+q^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 169+26\cdot p+p^2+q^2-169+26\cdot p-p^2-q^2=r^2-r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 52\cdot p=0 \; /:52 \Rightarrow p=0.$$

Oduzmemo li posljednje dvije jednadžbe, imamo:

$$\left.\begin{array}{l} 169-26\cdot p+p^2+q^2=r^2 \\ 25-10\cdot p+p^2+36-12\cdot q+q^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169-26\cdot p+p^2+q^2-25+10\cdot p-p^2-36+12\cdot q-q^2=r^2-r^2 \Rightarrow -16\cdot p+12\cdot q=-108 \; /:(-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot p-3\cdot q=27 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=0 \\ 4\cdot p-3\cdot q=27 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 0-3\cdot q=27 \Rightarrow -3\cdot q=27 \; /:(-3) \Rightarrow q=-9.$$

Uvrstimo li p i q u bilo koju od početnih triju jednadžbi dobivamo polumjer r:

$$\left.\begin{array}{l} p=0 \quad , \quad q=-9 \\ r^2=169+26\cdot p+p^2+q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2=169+26\cdot 0+0^2+(-9)^2 \Rightarrow r^2=169+81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=250 \; /\sqrt{\ } \Rightarrow r=\sqrt{250}=\sqrt{25\cdot 10}=5\cdot\sqrt{10}.$$

Vježba 045

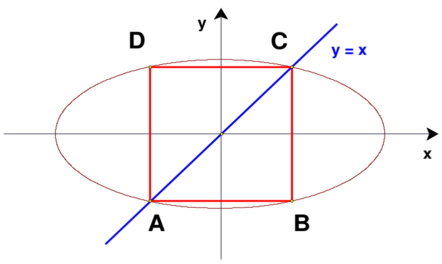
Kružnica prolazi žarištima hiperbole $144\cdot x^2-25\cdot y^2=3600$ i točkom T(5, 6). Koliki je opseg kružnice?

Rezultat: $10\cdot\sqrt{10}\cdot\pi.$

Zadatak 046 (Gregor, gimnazija)

U elipsu $9\cdot x^2+16\cdot y^2=25$ upisan je kvadrat tako da su mu stranice usporedne (paralelne) s koordinatnim osima. Kolika je duljina njegove dijagonale?

Rješenje 046



Dijagonala kvadrata ABCD nalazi se na pravcu y = x (simetrala prvog i trećeg kvadranta). Nađimo sjecište pravca y = x i elipse $9 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 25$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ 9 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 \cdot x^2 + 16 \cdot x^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot x^2 = 25 \; /:25 \Rightarrow x^2 = 1 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(1, 1) \\ C\left(x_2, y_2\right) = C(-1, -1) \end{array}\right\}.$$

Duljina dijagonale kvadrata ABCD iznosi:

$$|AC| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 046

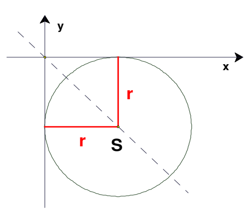
U elipsu $9 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 25$ upisan je kvadrat tako da su mu stranice usporedne (paralelne) s koordinatnim osima. Koliki je njegov opseg?

Rezultat: 8.

Zadatak 047 (Mira, gimnazija)

Kako glasi jednadžba kružnice kojoj je središte u IV. kvadrantu i pripada pravcu $x - 2 \cdot y - 6 = 0$, a kružnica dira obje koordinatne osi?

Rješenje 047



Budući da je središte kružnice u četvrtom kvadrantu i da ona dira obje koordinatne osi, vrijedi:

$$r = p = q \Rightarrow S(p, -p).$$

Središte S pripada zadanom pravcu (i simetrali II. i IV. kvadranta, y = – x):

$$\left.\begin{array}{l} S(p, -p) \\ x - 2 \cdot y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p + 2 \cdot p - 6 = 0 \Rightarrow 3 \cdot p = 6 \; /:3 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow S(2, -2).$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(2, -2)\;,\; r = 2 \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 + y^2 + 4 \cdot y + 4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 4 \cdot y + 4 = 0.$$

Vježba 047

Kako glasi jednadžba kružnice kojoj je središte u IV. kvadrantu i pripada pravcu $x - 3 \cdot y - 12 = 0$, a kružnica dira obje koordinatne osi?

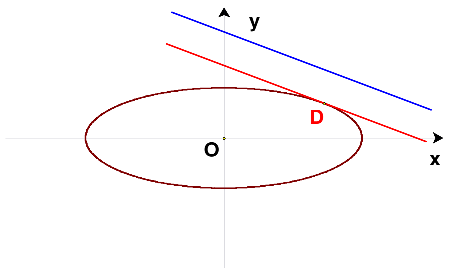
Rezultat: $x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 6 \cdot y + 9 = 0.$

Zadatak 048 (Vix, gimnazija)

Nađite koordinate točke na elipsi $x^2 + 4 \cdot y^2 = 20$ koja je najbliža pravcu x + y = 7.

Rješenje 048

Tražena točka je diralište D u kojem tangenta, usporedna (paralelna) sa zadanim pravcem, siječe zadanu elipsu. Budući da je tangenta elipse usporedna sa zadanim pravcem, ima isti koeficijent smjera kao i pravac. Jednadžba tangente glasi:



$$\left.\begin{aligned} x^2+4\cdot y^2&=20\\ x+y&=7\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2+4\cdot y^2&=20\ /:20\\ y&=-x+7\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{20}+\frac{4\cdot y^2}{20}&=1\\ y&=-x+7\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1\ ,\ a^2=20\ ,\ b^2=5\\ y=-x+7\ ,\ k=-1\ ,\ l=7\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet da pravac } y=k\cdot x+l \text{ bude tangenta elipse}\\ a^2\cdot k^2+b^2=l^2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot(-1)^2+5=l^2 \Rightarrow 20+5=l^2 \Rightarrow l^2=25\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \left.\begin{aligned} l_1&=-5\\ l_2&=5\end{aligned}\right\}.$$

Zbog uvjeta zadatka je l = 5 pa tražena jednadžba tangente glasi:

$$y = -x + 5.$$

Da bismo odredili dioralište D naći ćemo presjek tangente i elipse, tj. riješiti sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} y&=-x+5\\ x^2+4\cdot y^2&=20\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+4\cdot(-x+5)^2=20 \Rightarrow \left[(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4\cdot\left(x^2-10\cdot x+25\right)=20 \Rightarrow x^2+4\cdot x^2-40\cdot x+100-20=0 \Rightarrow 5\cdot x^2-40\cdot x+80=0\ /:5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8\cdot x+16=0 \Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=4\\ y&=-x+5\end{aligned}\right\} \Rightarrow y=1 \Rightarrow D(4,1).$$

Vježba 048

Nađite koordinate točke na elipsi $x^2 + 4 \cdot y^2 = 20$ koja je najdalja pravcu x + y = 7.

Rezultat: $D(-4,-1)$.

Zadatak 049 (Mira, gimnazija)

Ako je fokus parabole $y = a \cdot x^2 + 2$ u ishodištu koordinatnog sustava, koliki je parametar a?

Rješenje 049

Parabola $y = a \cdot x^2 + 2$ je translatirana parabola $y = a \cdot x^2$ za 2 prema gore. Fokus parabole $y = a \cdot x^2$, tj. $x^2=\frac{1}{a}\cdot y$ je $F\left(0,\frac{1}{4\cdot a}\right)$.

Ponovimo!

Parabola kojoj se os podudara s x – osi koordinatnog sustava, vrh sa ishodištem, a fokus se nalazi na pozitivnom dijelu x – osi ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

pri čemu je p parametar parabole.

Ukoliko se fokus F nalazi na pozitivnom dijelu y – osi, njegove koordinate su $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, a jednadžbu parabole dobijemo tako da zamijenimo uloge x i y, tj. jednadžba parabole glasi

$$x^2 = 2 \cdot p \cdot y.$$

Pomakom za 2 u smjeru y – osi dobivamo da je fokus zadane parabole $F\left(0,\frac{1}{4\cdot a}+2\right)$. Budući da fokus mora biti u ishodištu koordinatnog sustava, slijedi:

$$\frac{1}{4\cdot a}+2=0 \Rightarrow \frac{1}{4\cdot a}=-2\ /\cdot\frac{a}{-2} \Rightarrow a=-\frac{1}{8} \Rightarrow a=-0.125.$$

Vježba 049

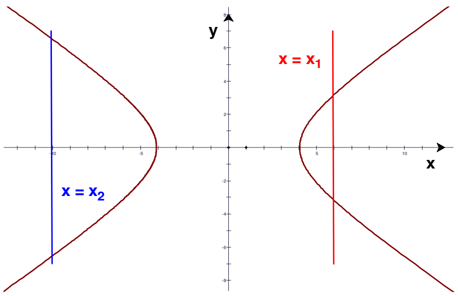
Ako je fokus parabole $y = a \cdot x^2 + 1$ u ishodištu koordinatnog sustava, koliki je parametar a?

Rezultat: – 0.25.

Zadatak 050 (Deny, ekonomska škola)

Pravac $x - x_1 = 0$ odsijeca na lijevoj grani hiperbole $x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2$ tetivu duljine $2 \cdot a$, a pravac $x - x_2 = 0$ na desnoj grani iste hiperbole tetivu duljine $a \cdot \sqrt{32}$. Odredite udaljenost pravaca $x = x_1$ i $x = x_2$.

Rješenje 050



Budući da zadani pravac $x - x_1 = 0$ odsijeca na lijevoj grani hiperbole $x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2$ tetivu duljine $2 \cdot a$, sjecišta su točke s koordinatama:

$$\left.\begin{array}{l} T_1\left(x_1, \dfrac{2 \cdot a}{2}\right) = T_1\left(x_1, a\right) \\ T_2\left(x_1, -\dfrac{2 \cdot a}{2}\right) = T_2\left(x_1, -a\right) \end{array}\right\}.$$

Računamo apscisu x_1 točke $T_1(x_1, a)$ (ili $T_2(x_1, -a)$):

$$\left.\begin{array}{l} T_1\left(x_1, a\right) \\ x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^2 - a^2 = 8 \cdot a^2 \Rightarrow x_1^2 = 9 \cdot a^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow x_1 = 3 \cdot a.$$

Drugo rješenje nema smisla. Dakle, jednadžba pravca glasi:

$$x = 3 \cdot a.$$

Budući da zadani pravac $x - x_2 = 0$ odsijeca na desnoj grani hiperbole $x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2$ tetivu duljine $a \cdot \sqrt{32}$, sjecišta su točke s koordinatama:

$$T_3\left(x_2, \frac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right) \quad , \quad T_4\left(x_2, -\frac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right).$$

Računamo apscisu x_2 točke $T_3\left(x_2, \dfrac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right)\left(\text{ili } T_4\left(x_2, -\dfrac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right)\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} T_3\left(x_2, \dfrac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right) \\ x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{32}}{2}\right)^2 = 8 \cdot a^2 \Rightarrow x_2^2 - \frac{32 \cdot a^2}{4} = 8 \cdot a^2 \Rightarrow x_2^2 - 8 \cdot a^2 = 8 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^2 = 16 \cdot a^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow x_2 = -4 \cdot a.$$

Drugo rješenje nema smisla. Dakle, jednadžba pravca glasi:

$$x = -4 \cdot a.$$

Udaljenost pravaca iznosi:

$$\left|3 \cdot a - (-4 \cdot a)\right| = \left|3 \cdot a + 4 \cdot a\right| = \left|7 \cdot a\right| = 7 \cdot a.$$

Vježba 050

Pravac $x - x_1 = 0$ odsijeca na lijevoj grani hiperbole $x^2 - y^2 = 8 \cdot a^2$ tetivu duljine $2 \cdot a$, a pravac $x - x_2 = 0$ na desnoj grani iste hiperbole tetivu duljine $a \cdot \sqrt{32}$. Odredite dvostruku udaljenost pravaca $x = x_1$ i $x = x_2$.

Rezultat: $14 \cdot a$.

Zadatak 051 (Goran, elektrotehnička škola)

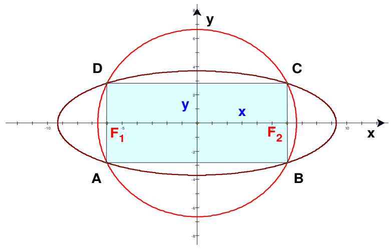
Točke na elipsi $9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225$ iz kojih se njezini fokusi vide pod pravim kutom čine vrhove konveksnog četverokuta. Kolika je površina četverokuta?

Rješenje 051

Ponovimo!

Talesov poučak: Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Dužina $\overline{F_1 F_2}$ vidi se pod pravim kutom iz svake točke kružnice čija je jednadžba: $x^2 + y^2 = e^2$.



Tražimo linearni ekscentricitet e elipse:

$$9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \Rightarrow 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \; / : 225 \Rightarrow$$

$$\frac{9 \cdot x^2}{225} + \frac{25 \cdot y^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e^2 = 25 - 9 \Rightarrow e^2 = 16.$$

Vrhove konveksnog četverokuta ABCD naći ćemo tako da riješimo sustav jednadžbi (tj. tražimo presjek elipse i kružnice):

$$\left. \begin{array}{l} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \; / \cdot (-9) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225 \\ -9 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = -144 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot y^2 = 81 \; / : 16 \Rightarrow y^2 = \frac{81}{16} \; / \sqrt{} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = -\frac{9}{4} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + \frac{81}{16} = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - \frac{81}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{175}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{175}{16} \; / \sqrt{} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} \\ x_2 = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} \end{array} \right\}.$$

Četverokut ABCD je pravokutnik sa stranicama:

$$a = 2 \cdot x = 2 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{2}, \quad b = 2 \cdot y = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

Površina pravokutnika ABCD iznosi:

$$P = a \cdot b = \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{45 \cdot \sqrt{7}}{4}.$$

Vježba 051

Točke na elipsi $9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225$ iz kojih se njezini fokusi vide pod pravim kutom čine vrhove konveksnog četverokuta. Koliki je opseg četverokuta?

Rezultat: $9 + 5 \cdot \sqrt{7}.$

Zadatak 052 (Vedrana, gimnazija)

Pravac $y = 2 \cdot x – 14$ dodiruje elipsu $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 2$. Kolika je duljina male poluosi b elipse?

Rješenje 052

Ponovimo!

Uvjet da pravac $y = k \cdot x + l$ bude tangenta elipse $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ glasi:

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = l^2.$$

Linearni ekscentricitet je:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Budući da pravac $y = 2 \cdot x – 14$ dodiruje elipsu, slijedi:

$$2^2 \cdot a^2 + b^2 = (-14)^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2 + b^2 = 196.$$

Formula za linearni ekscentricitet daje:

$$2^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4.$$

Iz sustava jednadžbi proizlazi b:

$$\left.\begin{array}{l}4\cdot a^2+b^2=196\\ a^2-b^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\cdot a^2+b^2=196\\ a^2-b^2=4\ /\cdot(-4)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\cdot a^2+b^2=196\\ -4\cdot a^2+4\cdot b^2=-16\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot b^2=180\ /:5\ \Rightarrow b^2=36\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\left.\begin{array}{l}b_1=-6\ (\text{nije rješenje})\\ b_2=6\ (\text{rješenje})\end{array}\right\}.$$

Vježba 052

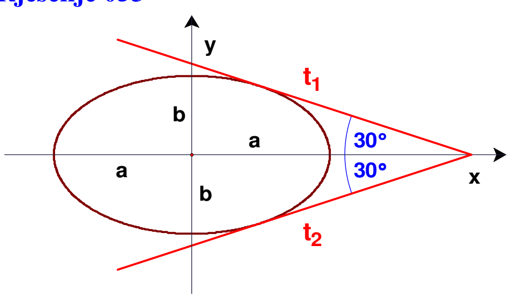
Pravac $y = 2 \cdot x - 14$ dodiruje elipsu $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 2$. Kolika je duljina velike poluosi a elipse?

Rezultat: $a=2\cdot\sqrt{10}.$

Zadatak 053 (Vedrana, gimnazija)

Koliko od ishodišta mora biti udaljena točka na x – osi iz koje se elipsa $8 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 72$ vidi pod kutom 60º?

Rješenje 053



$$8\cdot x^2+9\cdot y^2=72\Rightarrow 8\cdot x^2+9\cdot y^2=72\ /:72\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8\cdot x^2}{72}+\frac{9\cdot y^2}{72}=1\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2=9\\ b^2=8\end{array}\right\}.$$

Tražimo tangente t_1 i t_2 koje sa x – osi zatvaraju kutove 30º i – 30º, odnosno koje imaju koeficijente smjerova:

$$\left.k_1=tg\,30^0,\ k_2=-tg\,30^0\right\}\Rightarrow\left.k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ k_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

Uvjet da bi pravac $y = k \cdot x + l$ bio tangenta elipse je:

$$a^2\cdot k^2+b^2=l^2$$

pa imamo:

$$9\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+8=l^2\Rightarrow 9\cdot\frac{3}{9}+8=l^2\Rightarrow l^2=11\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\left.\begin{array}{l}l_1=\sqrt{11}\\ l_2=-\sqrt{11}\end{array}\right\}.$$

Jednadžbe tangenata glase:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x-\sqrt{11}\qquad,\qquad y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\sqrt{11}.$$

Iz jedne od jednadžbi tangenata nađemo traženi x. Budući da tangenta siječe x – os, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}y=0\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\sqrt{11}\end{array}\right\}\Rightarrow 0=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\sqrt{11}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x=\sqrt{11}\ /\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow x=\sqrt{33}.$$

Vježba 053

Koliko od ishodišta mora biti udaljena točka na x – osi iz koje se elipsa $8 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 72$ vidi pod kutom 90º?

Rezultat: $x=\sqrt{17}.$

Zadatak 054 (Dyno, gimnazija)

Koliki kut čine tangente iz točke T(– 14, – 2) na kružnicu $x^2 + y^2 = 100$?

Rješenje 054

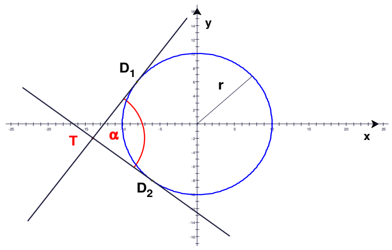
Uočimo da je $x^2 + y^2 = 100$ ($x^2 + y^2 = 10^2$) jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjerom r = 10.

Uvjet da pravac $y = k \cdot x + l$ bude tangenta kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ glasi:

$$r^2 \cdot (k^2 + 1) = l^2.$$

Zato je:

$$100 \cdot (k^2 + 1) = l^2.$$



Budući da pravac y = k · x + l prolazi točkom T(– 14, – 2), slijedi:

$$-2 = k \cdot (-14) + l \Rightarrow -2 = -14 \cdot k + l \Rightarrow 14 \cdot k - 2 = l.$$

Iz sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobijemo koeficijente smjerova k_1 i k_2:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot \left(k^2 + 1\right) = l^2 \\ 14 \cdot k - 2 = l \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100 \cdot k^2 + 100 = l^2 \\ 14 \cdot k - 2 = l \;/^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100 \cdot k^2 + 100 = l^2 \\ 196 \cdot k^2 - 56 \cdot k + 4 = l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 196 \cdot k^2 - 56 \cdot k + 4 - 100 \cdot k^2 - 100 = l^2 - l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 96 \cdot k^2 - 56 \cdot k - 96 = 0 \;/:8 \Rightarrow 12 \cdot k^2 - 7 \cdot k - 12 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12 \cdot (-12)}}{2 \cdot 12} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{24} \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm 25}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{7 + 25}{24} \\ k_2 = \frac{7 - 25}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{32}{24} \\ k_2 = -\frac{18}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{4}{3} \\ k_2 = -\frac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Budući da koeficijenti smjerova zadovoljavaju uvjet okomitosti dva pravca:

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

slijedi da je kut α = 90º.

Vježba 054

Koliki kut čine tangente iz točke T(– 14, 2) na kružnicu $x^2 + y^2 = 100$?

Rezultat: 90º.

Zadatak 055 (Anamarija, gimnazija)

Za koji realni broj a pravac 2 · x + 3 · y + a = 0 prolazi žarištem (fokusom) parabole $y^2 = -4 \cdot x$?

Rješenje 055

Ponovimo!

Jednadžba parabole: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x, \; 2 \cdot p - \text{parametar parabole}.$

Žarište (fokus) parabole: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = -4 \cdot x \;,\; y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot p = -4 \cdot x \;/:2 \\ F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = -2 \\ F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow F(-1, 0).$$

Budući da pravac prolazi žarištem parabole, koordinate žarišta uvrstimo u jednadžbu pravca:

$$\left.\begin{array}{l} F(-1, 0) \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + a = 0 \Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Vježba 055

Za koji realni broj a pravac 3 · x + 3 · y + a = 0 prolazi žarištem (fokusom) parabole $y^2 = -4 \cdot x$?

Rezultat: a = 3.

Zadatak 056 (Anamarija, gimnazija)

Nađite presjek pravca $5 \cdot x - 3 \cdot y = 9$ i hiperbole $16 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 144$.

Rješenje 056

Presjek pravca i hiperbole naći ćemo tako da riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot x - 3 \cdot y = 9 \\ 16 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 \cdot y = -5 \cdot x + 9 \\ 16 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 \cdot y = -5 \cdot x + 9 \; /:(-3) \\ 16 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{3} \cdot x - 3 \\ 16 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 16 \cdot x^2 - 9 \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot x - 3\right)^2 = 144 \Rightarrow 16 \cdot x^2 - 9 \cdot \left(\frac{25}{9} \cdot x^2 - 10 \cdot x + 9\right) = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot x^2 - 25 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 81 = 144 \Rightarrow 16 \cdot x^2 - 25 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 81 - 144 = 0 \Rightarrow -9 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 225 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 \cdot x^2 + 90 \cdot x - 225 = 0 \; /:(-9) \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = \frac{5}{3} \cdot x - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{3} \cdot 5 - 3 \Rightarrow y = \frac{25}{3} - 3 \Rightarrow y = \frac{16}{3} \Rightarrow T\left(5, \frac{16}{3}\right).$$

Pravac dodiruje hiperbolu u točki T.

Vježba 056

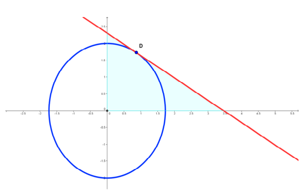
Nađite presjek pravca $x + y - 1 = 0$ i hiperbole $3 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 12$.

Rezultat: $T(4, -3)$.

Zadatak 057 (Mirna, gimnazija)

Na elipsu $4 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 = 12$ povučena je tangenta u točki $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$. Izračunajte površinu trokuta koji tangenta zatvara s koordinatnim osima.

Rješenje 057



$$4 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 = 12 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 = 12 \; /:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot x^2}{12} + \frac{3 \cdot y^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 3 \\ b^2 = 4 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba tangente iznosi:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 \cdot x_1 \cdot x + a^2 \cdot y_1 \cdot y = a^2 \cdot b^2 \\ D(x_1, y_1) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y = 12 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot y = 12 \; /:12 \Rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot x}{12} + \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot y}{12} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} + \frac{\sqrt{3} \cdot y}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{6}{\sqrt{3}}} + \frac{y}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = \frac{6}{\sqrt{3}} \\ n = \frac{4}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{segmenti na} \\ \text{koordinatnim} \\ \text{osima} \end{array}\right\}.$$

Površina trokuta koji tangenta zatvara s koordinatnim osima je:

$$P=\frac{|m\cdot n|}{2}\Rightarrow P=\frac{\left|\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\right|}{2}\Rightarrow P=\frac{\frac{24}{3}}{\frac{2}{1}}\Rightarrow P=\frac{24}{6}\Rightarrow P=4.$$

Vježba 057

Na elipsu $4\cdot x^2+3\cdot y^2=12$ povučena je tangenta u točki $D(0,2)$. Nađite jednadžbu tangente.

Rezultat: $y=2.$

Zadatak 058 (Vedrana, gimnazija)

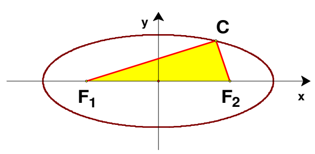
Spojnice točke C, koja leži na elipsi $x^2+4\cdot y^2=4$ u prvom kvadrantu, sa žarištima te elipse, sijeku se pod pravim kutom. Nađite koordinate točke C.

Rješenje 058

$$x^2+4\cdot y^2=4\ /:4\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{4\cdot y^2}{4}=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow\left.\begin{matrix}a^2=4\\b^2=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow e^2=a^2-b^2\Rightarrow e^2=4-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2=3\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\left.\begin{matrix}e_1=-\sqrt{3}\\e_2=+\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}F_1\left(-\sqrt{3},0\right)\\F_2\left(+\sqrt{3},0\right)\end{matrix}\right\}.$$

Budući da točka C sa žarištima F_1 i F_2 tvori pravokutan trokut (pravi kut kod vrha C), ishodište koordinatnog sustava je središte kružnice koja prolazi točkama F_1, F_2 i C (kružnica opisana trokutu F_1F_2C). Ta kružnica je:



$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2+y^2=r^2\\r=e=\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2+y^2=\left(\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=3.$$

Sjecište kružnice i elipse u prvom kvadrantu je točka C:

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2=3\\x^2+4\cdot y^2=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2+y^2=3\ /\cdot(-1)\\x^2+4\cdot y^2=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-x^2-y^2=-3\\x^2+4\cdot y^2=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\cdot y^2=1\ /:3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{1}{3}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow y_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{prvi}\\\text{kvadrant}\end{bmatrix}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2=3\\y^2=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2+\frac{1}{3}=3\Rightarrow x^2=3-\frac{1}{3}\Rightarrow x^2=\frac{8}{3}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{prvi}\\\text{kvadrant}\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3}\Rightarrow C\left(\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vježba 058

Spojnice točke C, koja leži na elipsi $x^2+4\cdot y^2=4$ u trećem kvadrantu, sa žarištima te elipse, sijeku se pod pravim kutom. Nađite koordinate točke C.

Rezultat: $C\left(-\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

Zadatak 059 (Vedrana, gimnazija)

Zadana je elipsa $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ Nađite koeficijent smjera k pravca koji prolazi kroz ishodište, ako je udaljenost tog pravca od obaju žarišta jednaka 3?

Rješenje 059

Ponovimo!

Udaljenost točke $T(x_0,y_0)$ od pravca $p\ \ldots\ A\cdot x+B\cdot y+C=0$ iznosi:

$$|\,pT\,| = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Računamo koordinate žarišta:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 = 25 \;,\; b^2 = 9 \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^2 = 25 - 9 \Rightarrow e^2 = 16 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow e = \pm 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_1(-4, 0) \\ F_2(4, 0) \end{matrix}\right\}.$$

Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava glasi:

$$y = k \cdot x \;\Rightarrow\; k \cdot x - y = 0$$

Udaljenost žarišta, na primjer, F_2 od pravca iznosi:

$$\left.\begin{matrix} F_2(-4, 0) \\ k \cdot x - y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left| pF_2 \right| = \frac{\left| k \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 + 0 \right|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \left| pF_2 \right| = \frac{\left| -4 \cdot k \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow \left| pF_2 \right| = \frac{\left| 4 \cdot k \right|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\frac{|4 \cdot k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Rightarrow \frac{|4 \cdot k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \;/\cdot\sqrt{k^2+1} \Rightarrow |4 \cdot k| = 3 \cdot \sqrt{k^2+1} \;/^2 \Rightarrow 16 \cdot k^2 = 9 \cdot \left(k^2 + 1\right) \Rightarrow 16 \cdot k^2 = 9 \cdot k^2 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot k^2 - 9 \cdot k^2 = 9 \Rightarrow 7 \cdot k^2 = 9 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{7} \;/\sqrt{} \;\Rightarrow k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}} \Rightarrow k_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \Rightarrow k_{1,2} = \pm\frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}.$$

Vježba 059

Zadana je elipsa $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ Nađite koeficijent smjera k pravca koji prolazi kroz ishodište, ako je udaljenost tog pravca od obaju žarišta jednaka 2?

Rezultat: $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Zadatak 060 (Maturant, gimnazija)

Žarište F parabole $y^2 = x$ i sjecišta A i B te parabole s pravcem x = 3 vrhovi su trokuta ABF. Nađite njegovu površinu.

Rješenje 060

Iz tjemene jednadžbe parabole dobiju se koordinate žarišta F:

$$\left.\begin{matrix} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ y^2 = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \\ p = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

Sjecišta parabole $y^2 = x$ i pravca x = 3 odredimo tako da riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} y^2 = x \\ x = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 = 3 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = \sqrt{3} \\ y_2 = -\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\left(3, \sqrt{3}\right) \\ B\left(3, -\sqrt{3}\right) \end{matrix}\right\}.$$

Površina trokuta koji je određen točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $F(x_3, y_3)$ je:

$$\left.\begin{matrix} A\left(x_1, y_1\right) = A\left(3, \sqrt{3}\right) \\ B\left(x_2, y_2\right) = B\left(3, -\sqrt{3}\right) \\ F\left(x_3, y_3\right) = F\left(\frac{1}{4}, 0\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| 3 \cdot \left(-\sqrt{3} - 0\right) + 3 \cdot \left(0 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) \right| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| -3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-6 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \right| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-11 \cdot \sqrt{3}}{2} \right| \Rightarrow P = \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Vježba 060

Žarište F parabole $y^2 = x$ i sjecišta A i B te parabole s pravcem $x = 4$ vrhovi su trokuta ABF. Nađite njegovu površinu.

Rezultat: $P = \frac{15}{2}.$