Zadatak 001 (Ines, hotelijerska škola)

Odredite presjek elipse $3x^2 + 8y^2 = 35$ i pravca $x + 4y - 7 = 0$.

Rješenje 001

U analitičkoj geometriji geometrijske probleme rješavamo algebarski. Riješit ćemo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$3x^2 + 8y^2 = 35,$$
$$x + 4y - 7 = 0.$$

Prva jednadžba je kvadratna, a druga linearna. Uvijek se iz linearne jednadžbe izračuna jedna nepoznanica. Ovdje će to biti nepoznanica x jer uz nju stoji koeficijent 1. Dakle, pišemo:

$$3x^2 + 8y^2 = 35,$$
$$x = 7 - 4y.$$

Vrijednost od x uvrstimo u kvadratnu jednadžbu:

$$3(7 - 4y)^2 + 8y^2 = 35.$$

Koristimo formulu za kvadrat razlike:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Zato je:

$$3(49 - 56y + 16y^2) + 8y^2 = 36.$$

Pomoću zakona distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

riješimo se zagrade:

$$147 - 168y + 48y^2 + 8y^2 = 35.$$

Vidimo da smo dobili kvadratnu jednadžbu pa je sredimo tako da sve "prebacimo" na lijevu stranu i reduciramo:

$$147 - 168y + 48y^2 + 8y^2 - 35 = 0,$$
$$56y^2 - 168y + 112 = 0.$$

Cijelu jednadžbu podijelimo s 56:

$$56y^2 - 168y + 112 = 0 \; / : 56$$
$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Pomoću Vièteovih formula dobije se:

$$y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = 1.$$

Našli smo nepoznanicu y! Na početku zadatka izračunali smo da je $x = 7 - 4y$.
Sada je:

$$x_1 = 7 - 4y_1 = 7 - 4 \cdot 2 = 7 - 8 = -1,$$
$$x_2 = 7 - 4y_2 = 7 - 4 \cdot 1 = 7 - 4 = 3.$$

Dakle, presjek pravca i elipse su dvije točke: $T_1(-1, 2)$ i $T_2(3, 1)$.

Vježba 001

Odredi presjek elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ i pravca $x + 2y - 4 = 0$.

Rezultat: $T_1(4, 0)$ i $T_2(0, 2)$.

Zadatak 002 (Denis, konobarska škola)

Odredite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 100$ u točki drugog kvadranta s apscisom $x_0 = -6$.

Rješenje 002

Najprije trebamo izračunati ordinatu y_0 dirališta tangente, $D(x_0, y_0)$. Budući da diralište tangente pripada kružnici, koordinate dirališta x_0 i y_0 moraju zadovoljiti jednadžbu kružnice. Dakle, mora vrijediti:

$$(-6)^2 + y_0^2 = 100,$$

odnosno

$$36 + y_0^2 = 100 \quad = \quad y_0^2 = 100 - 36 \quad \Rightarrow \quad y_0^2 = 64 \; / \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \pm 8.$$

Budući da je riječ o točki iz drugog kvadranta, diralište je točka $D(-6, 8)$.

Ponovimo predznake koordinata točaka u sva četriri kvadranta:

kvadrant	apscisa	ordinata
I.	+	+
II.	–	+
III.	–	–
IV.	+	–

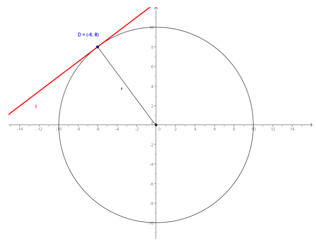
Ako je zadana kružnica jednadžbom $x^2 + y^2 = r^2$, onda jednadžba tangente na kružnicu u točki $D(x_0, y_0)$ glasi:

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2.$$

Tražena jednadžba tangente je:

$-6x + 8y = 100$, odnosno u implicitnom obliku $6x - 8y + 100 = 0$.

Grafičko rješenje:



Vježba 002

Odredite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ u točki prvog kvadranta s apscisom $x_0 = 3$.

Rezultat: $3x + 4y - 25 = 0$.

Zadatak 003 (Fox, gimnazija)

Da li jednadžba

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$$

određuje kružnicu?

Rješenje 003

Podsjetimo se jednadžbe kružnice:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

i formula za kvadrat binoma:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad , \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Sada možemo pisati:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 + 2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + \mathbf{2^2 - 2^2} + y^2 + 2y + \mathbf{1^1 - 1^2} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4x + 2^2) \mathbf{- 2^2} + (y^2 + 2y + 1^2) \mathbf{- 1^2} + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 - 4x + 2^2) \mathbf{- 4} + (y^2 + 2y + 1^2) \mathbf{- 1} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 5 + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -1.$$

Jednadžba ne određuje kružnicu.

Vježba 003

Da li jednadžba

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

određuje kružnicu?

Rezultat: Da, $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Zadatak 004 (Marko, gimnazija)

Pravac $y = 2x - 14$ dodiruje elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 2$. Koliko iznosi mala poluos b?

Rješenje 004

Podsjetimo se kako glasi uvjet tangencijalnosti pravca $y = kx + l$ i elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$:

$$a^2k^2 + b^2 = l^2.$$

U našem slučaju je:

$$a^2 \cdot 2^2 + b^2 = (-14)^2 \quad \Rightarrow \quad 4a^2 + b^2 = 196.$$

Linearni ekscentricitet elipse definira se:

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$a^2 - b^2 = 4.$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{r} 4a^2+b^2=196 \\ a^2-b^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a^2+b^2=196 \\ a^2-b^2=4 \;/\cdot(-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a^2+b^2=196 \\ -4a^2+4b^2=-16 \end{array}\right\} \Rightarrow 5b^2=180 \;/:5 \Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=6.$$

Vježba 004

Pravac $y = x + 5$ dodiruje elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 3$. Koliko iznosi mala poluos b?

Rezultat: $b = 2\sqrt{2}.$

Zadatak 005 (Lea, gimnazija)

Nađite najkraću udaljenost točke A(6, 8) do kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Rješenje 005

Zadana kružnica ima središte S(0, 0) i polumjer r = 3. Nađimo udaljenost točke A do središta S:

$$|AS| = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

Tada je udaljenost točke A do kružnice:

$$d = |AS| - r = 10 - 3 = 7.$$

Vježba 005

Nađite najkraću udaljenost točke A(3, 4) do kružnice $x^2 + y^2 = 4$.

Rezultat: d = 3.

Zadatak 006 (Matea, hotelijerska škola)

Opseg manje kružnice kružnog vijenca je 20π, a širina vijenca je 3. Nađite površinu kružnog vijenca.

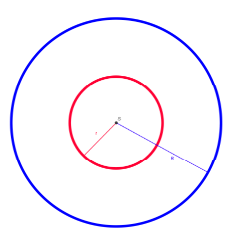
Rješenje 006

Budući da je zadan opseg manje kružnice, možemo izračunati njezin polumjer:

$$O = 2r\pi \quad \Rightarrow \quad 20\pi = 2r\pi \;/:2\pi \quad \Rightarrow \quad r = 10.$$

Tada je polumjer veće kružnice:

$$R = r + 3 = 10 + 3 = 13.$$



Površina kružnog vijenca iznosi:

$$P = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi = (13^2 - 10^2) \cdot \pi = (169 - 100) \cdot \pi = 69 \cdot \pi.$$

Vježba 006

Opseg manje kružnice kružnog vijenca je 10π, a širina vijenca je 1. Nađite površinu kružnog vijenca.

Rezultat: 11π.

Zadatak 007 (Željka, ugostiteljska škola)

Odredi koordinate središta i polumjer kružnice kojoj jednadžba glasi: $5x^2 + 5(y - 1)^2 = 125$.

Rješenje 007

Ako je S(p, q) središte kružnicem, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Zato je

$$5x^2 + 5(y - 1)^2 = 125 \ / : 5 \quad => \quad x^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad => \quad (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Središte je S(0, 1), a polumjer r = 5.

Vježba 007

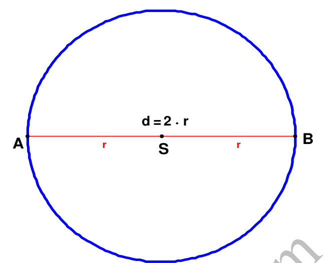
Odredi koordinate središta i polumjer kružnice kojoj jednadžba glasi: $3(x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 = 75$.

Rezultat: S(– 2, 1), r = 5.

Zadatak 008 (Petra, gimnazija)

Napiši jednadžbu kružnice kojoj je $\overline{AB}$ promjer (dijametar) ako je A(4, 6), B(8, 2).

Rješenje 008



Budući da je središte kružnice S polovište promjera $\overline{AB}$, koordinate točke S naći ćemo po formuli za polovište dužine.

Ako su zadane točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tada polovište P dužine $\overline{AB}$ ima koordinate

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Središte S je polovište promjera $\overline{AB}$, tj.

$$\left.\begin{array}{r} A(4,6) \\ B(8,2) \\ S(p,q) \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4+8}{2} = 6, \quad q = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \Rightarrow S(6,4).$$

Našli smo središte kružnice pa njezina jednadžba glasi:

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = r^2.$$

Moramo još odrediti polumjer r. Budući da točke A i B pripadaju kružnici dovoljno je uvrstiti koordinate jedne točke u jednadžbu kružnice i izračunati r.

$$\left.\begin{array}{l} A(4,6) \\ (x-6)^2 + (y-4)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (4-6)^2 + (6-4)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 4 \Rightarrow r^2 = 8.$$

Polumjer r možemo naći i pomoću formule za udaljenost točaka u ravnini.

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Sada je polumjer r jednak:

$$\left.\begin{array}{l} S(6,4) \\ A(4,6) \quad \text{i} \quad |SA| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |SA| = \sqrt{(4-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8}.$$

Jednadžba kružnice je $(x-6)^2+(y-4)^2=8$.

Vježba 008

Napiši jednadžbu kružnice kojoj je $\overline{AB}$ promjer (dijametar) ako je A(– 3, – 4), B(10, – 1).

Rezultat: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{89}{2}.$

Zadatak 009 (Tonka, ekonomska škola)

Odredite jednadžbu tangente u točki D(x < 0, 3) elipse $3x^2+4y^2=48$.

Rješenje 009

Prvo odredimo apscisu točke D. Budući da točka D pripada elipsi, uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu elipse i riješiti kvadratnu jednadžbu:

$$3x^2+4\cdot 3^2=48 \Rightarrow 3x^2+36=48 \Rightarrow 3x^2=48-36 \Rightarrow 3x^2=12 \;/:3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow x_1=-2,\; x_2=2.$$

Zbog x < 0 točka D ima koordinate D(– 2, 3).

Napišimo osnu ili kanonsku jednadžbu zadane elipse:

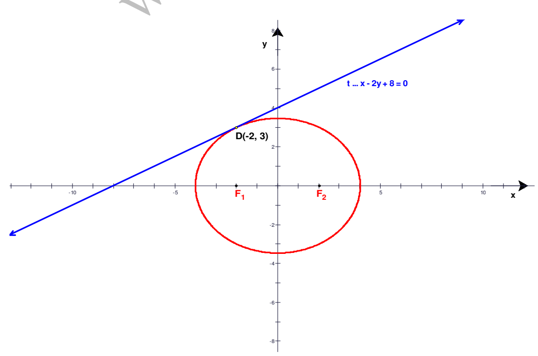
$$3x^2+4y^2=48 \;/:48 \Rightarrow \frac{3x^2}{48}+\frac{4y^2}{48}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \Rightarrow a^2=16,\; b^2=12.$$

Jednadžba tangente elipse u točki elipse D(x_1, y_1) glasi:

$$\frac{x_1\cdot x}{a^2}+\frac{y_1\cdot y}{b^2}=1.$$

Konačno je:

$$\left.\begin{array}{l} D(\overset{x_1}{-2},\ \overset{y_1}{3}) \\ \frac{x_1\cdot x}{a^2}+\frac{y_1\cdot y}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2x}{16}+\frac{3y}{12}=1 \Rightarrow \frac{-x}{8}+\frac{y}{4}=1 \;/\cdot(-8) \Rightarrow x-2y=-8 \Rightarrow x-2y+8=0.$$



Vježba 009

Odredite jednadžbu tangente u točki D(2, y > 0) elipse $x^2+4y^2=8$.

Rezultat: D(2, 1), t ... x + 2y – 4 = 0.

Zadatak 010 (3A, hotelijerska škola)

Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkama A i B, polumjera r, ako je: A(– 2, 3), B(– 4, 1), r = 10.

Rješenje 010

Središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Budući da točke A i B leže na kružnici, njihove koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice:

$$A(\overset{x}{-2}, \overset{y}{3}) \qquad (-2-p)^2+(3-q)^2=10^2,$$
$$B(\overset{x}{-4}, \overset{y}{1}) \qquad (-4-p)^2+(1-q)^2=10^2.$$

Uporabimo formule za kvadrat binoma:

$$(-a-b)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Sada je:

$$(2+p)^2+(3-q)^2=100,$$
$$(4+p)^2+(1-q)^2=100.$$

Kvadriramo:

$$4+4p+p^2+9-6q+q^2=100,$$
$$16+8p+p^2+1-2q+q^2=100.$$

Nakon sređivanja dobijemo sustav:

$$p^2+q^2+4p-6q=87, \qquad (1)$$
$$p^2+q^2+8p-2q=83. \qquad (2)$$

Od (1) oduzmemo (2):

$$p^2+q^2+4p-6q-p^2-q^2-8p+2q=87-83,$$
$$-4p-4q=4 \quad / : (-4)$$
$$p+q=-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p=-1-q}.$$

Vrijednost $p=-1-q$ uvrstimo u jednadžbu (1):

$$(-1-q)^2+q^2+4(-1-q)-6q=87 \quad \Rightarrow \quad 1+2q+q^2+q^2-4-4q-6q=87 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2q^2-8q-90=0 \quad / : 2 \quad \Rightarrow \quad q^2-4q-45=0,$$

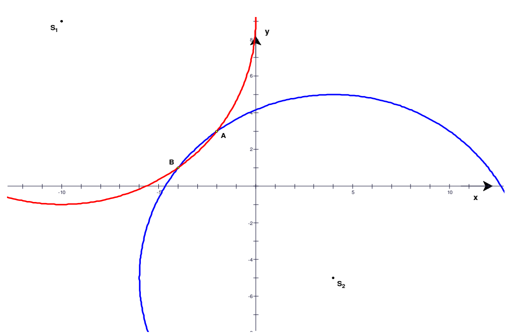
$$q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-45)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{4\pm 14}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q_1=\frac{4+14}{2}=\frac{18}{2}=9, \qquad q_2=\frac{4-14}{2}=\frac{-10}{2}=-5.$$

Sada izračunamo p:

$$p_1=-1-q_1=-1-9=-10,$$
$$p_2=-1-q_2=-1+5=4.$$

Dobili smo dva središta $S_1(-10, 9)$ i $S_2(4, -5)$ pa postoje dvije kružnice koje ispunjavaju zadane uvjete:

$$(x+10)^2+(y-9)^2=100 \quad , \quad (x-4)^2+(y+5)^2=100.$$



Vježba 010

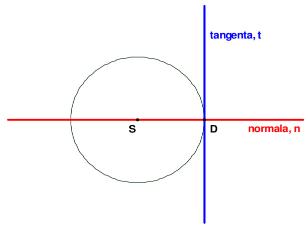
Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkama A i B, polumjera r, ako je: $A(6, 7)$, $B(-2, 3)$, $r = 5$.

Rezultat: $(x-1)^2+(y-7)^2=25$, $(x-3)^2+(y-3)^2=25$.

Zadatak 011 (Marko, hotelijerska škola)

Odredi jednadžbu normale kružnice $x^2 + y^2 = 9$ koja je paralelna s pravcem $y = -x + 4$.

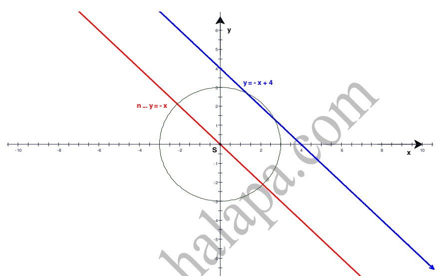
Rješenje 011



Tangenta t je pravac okomit na polumjer $\overline{SD}$, a prolazi točkom D, diralištem. Normala kružnice u točki D je pravac koji spaja središte S i dirалište D tangente.

Kružnica $x^2 + y^2 = 9$ ima središte S(0, 0). Normala je pravac koji prolazi središtem kružnice. Budući da je normala paralelna sa zadanim pravcem, imat će isti koeficijent smjera $k = -1$. Sada se lako odredi jednadžba pravca zadanog točkom S i koeficijentom smjera k.

$$\left.\begin{array}{l} S(\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{0}) \\ k = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x.$$



Vježba 011

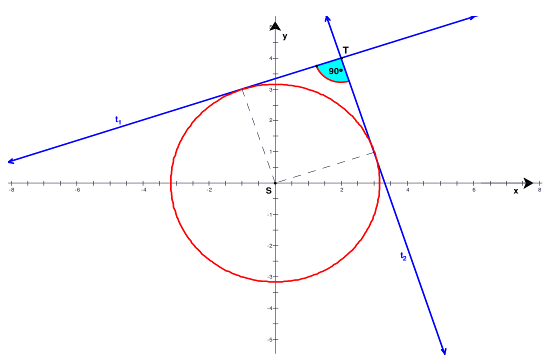
Odredi jednadžbu normale kružnice $x^2 + y^2 = 25$ koja je paralelna s pravcem $y = x + 4$.

Rezultat: $y = x$.

Zadatak 012 (3A, hotelijerska škola)

Pod kojim se kutom iz točke T(2, 4) vidi kružnica $x^2 + y^2 = 10$?

Rješenje 012



Iz točke T(2, 4) povucimo tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 10$. Uvjet dodira pravca i kružnice ima oblik:

$$r^2 \cdot (1 + k^2) = l^2.$$

Budući da točka T(2, 4) pripada tangenti $y = kx + l$, vrijedi:

$$4 = 2k + l.$$

Rješavamo sustav:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \cdot \left(1+k^2\right) = l^2 \\ 4 = 2k + l \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \cdot \left(1+k^2\right) = l^2 \\ l = 4 - 2k \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot \left(1+k^2\right) = (4-2k)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 10k^2 = 16 - 16k + 4k^2 \Rightarrow 6k^2 + 16k - 6 = 0 \;/:2 \Rightarrow 3k^2 + 8k - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{-8+10}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad k_2 = \frac{-8-10}{6} = \frac{-18}{6} = -3.$$

Budući da za koeficijente tangenata vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

zaključujemo da su one okomite pa je kut pod kojim se iz točke T vidi kružnica jednak 90°. Podsjetimo se:

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni. Na primjer,

k_1	1	2	–3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
k_2	– 1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{6}{7}$	8	– 9

Vježba 012

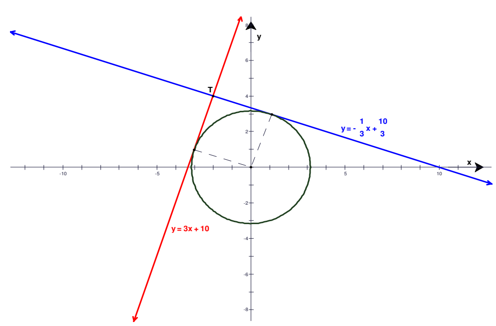
Pod kojim se kutom iz točke T(1, 7) vidi kružnica $x^2 + y^2 = 25$?

Rezultat: 90°.

Zadatak 013 (3A, hotelijerska škola)

Iz točke T povučene su tangente na kružnicu k. Napiši jednadžbe tangenata, ako je zadano: T(– 2, 4), $x^2 + y^2 = 10$.

Rješenje 013



Jednadžba kružnice glasi $x^2 + y^2 = 10$ pa je S(0, 0) i $r^2 = 10$. Tada uvjet dodira $r^2 \cdot (1 + k^2) = l^2$ ima oblik $10 \cdot (1 + k^2) = l^2$.

S druge strane, točka T(– 2, 4) pripada tangenti $y = kx + l$ pa je $4 = -2k + l$.

Rješavamo sustav:

$$\begin{cases} 10 \cdot \left(1+k^2\right) = l^2 \\ 4 = -2k + l. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe izrazimo l:

$$l = 2k + 4$$

i uvrstimo u prvu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \cdot \left(1+k^2\right) = l^2 \\ l = 2k+4 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot \left(1+k^2\right) = \left(2k+4\right)^2 \Rightarrow 10 + 10k^2 = 4k^2 + 16k + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6k^2 - 16k - 6 = 0 \; /:2 \Rightarrow 3k^2 - 8k - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3, \; k_2 = \frac{8-10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Tada je:

$$l_1 = 2 \cdot k_1 + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10 \quad , \quad l_2 = 2 \cdot k_2 + 4 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = -\frac{2}{3} + 4 = \frac{10}{3}.$$

Jednadžbe zangenata su:

$$y = 3x + 10 \text{ i } y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

Vježba 013

Iz točke T povučene su tangente na kružnicu k. Napiši jednadžbe tangenata, ako je zadano: T(2, 2), $x^2 + y^2 = 4$.

Rezultat: y = 2, x = 2.

Zadatak 014 (Ivana, gimnazija)

Za koji l je pravac y = x + l tangenta parabole $y = x^2 + 2$?

Rješenje 014

Potražimo rješenje sustava:

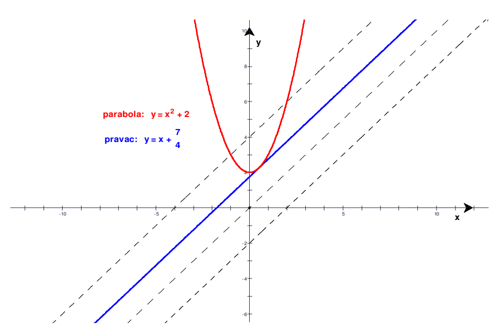
$$\begin{cases} y = x + l \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$$

Izjednačimo li y – e (metoda komparacije, vidi Zadatak002) dobit ćemo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 + 2 = x + l \quad => \quad x^2 - x + 2 - l = 0. \; [a = 1, b = -1, c = 2 - l]$$

Kvadratna jednadžba ima dvostruko rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli, D = 0. Iz D = 0 slijedi:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - l) = 0 \Rightarrow 1 - 8 + 4l = 0 \Rightarrow 4l = 7 \; /:4 \Rightarrow l = \frac{7}{4}.$$



Vježba 014

Za koji l je pravac y = x + l tangenta parabole $y = x^2 + 3$?

Rezultat: $\frac{11}{4}.$

Zadatak 015 (Ines, gimnazija)

Kako glasi jednadžba hiperbole koju pravac x – y – 2 = 0 dira u točki T(4, 2)?

Rješenje 015

Uvjet da pravac y = kx + l bude tangenta hiperbole je:

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2.$$

Zato je:

$$x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow k = 1 \text{ i } l = -2 \Rightarrow a^2 \cdot 1^2 - b^2 = (-2)^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4.$$

Budući da točka T(4, 2) leži na hiperboli, uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu hiperbole:

$$\left.\begin{array}{l} T(4,2) \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 16b^2 - 4a^2 = a^2b^2.$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 16b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ a^2 - b^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ a^2 = b^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 16b^2 - 4\cdot\left(b^2+4\right) = \left(b^2+4\right)\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16b^2 - 4b^2 - 16 = b^4 + 4b^2 \Rightarrow b^4 - 8b^2 + 16 = 0 \Rightarrow \left(b^2-4\right)^2 = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = 4.$$

Sada je a^2 jednak:

$$a^2 = b^2 + 4 = 4 + 4 = 8.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \ /\cdot 8 \Rightarrow x^2 - 2y^2 = 8.$$

Vježba 015

Kako glasi jednadžba hiperbole koju pravac x – y – 2 = 0 dira u točki T(– 4, – 2)?

Rezultat: $x^2 - 2y^2 = 8.$

Zadatak 016 (Ines, gimnazija)

U točki T(2, 3) elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ povučene su tangenta i normala. Izračunajte površinu trokuta kojeg one zatvaraju s y – osi.

Rješenje 016

Odredimo osnu jednadžbu elipse:

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \ /:48 \Rightarrow \frac{3x^2}{48} + \frac{4y^2}{48} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ako je zadana točka $T(x_1, y_1)$ elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tada jednadžba tangente glasi:

$$\frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} T(2,3) \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1 \;/\cdot 8 \Rightarrow x+2y=8.$$

Presjek tangente i y – osi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+2y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+2y=8 \Rightarrow y=4 \;,\; A(0,4).$$

Budući da je normala okomita na tangentu, za njihove koeficijente smjerova vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Koeficijent smjera tangente je:

$$x+2y=8 \Rightarrow 2y=-x+8 \;/:2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}.$$

Koeficijent smjera normale jednak je:

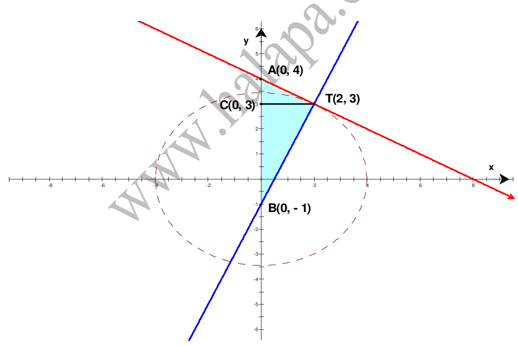
$$k = 2.$$

Budući da normala prolazi točkom T(2, 3) i ima koeficijent smjera k = 2, vrijedi:

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \Rightarrow y-3=2\cdot\left(x-2\right) \Rightarrow y=2x-4+3 \Rightarrow y=2x-1.$$

Presjek normale i y – osi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2\cdot 0-1 \Rightarrow y=-1 \;,\; B(0,-1).$$



U pravokutnom trokutu ABT hipotenuza je $|AB| = 5$, a visina na nju $|CT| = 2$. Površina trokuta je:

$$P=\frac{|AB|\cdot|CT|}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}=5.$$

Vježba 016

U točki T(2 ,3) elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ povučene su tangenta i normala. Izračunajte površinu trokuta kojeg one zatvaraju s x – osi.

Rezultat: 11.25.

Zadatak 017 (Ines, gimnazija)

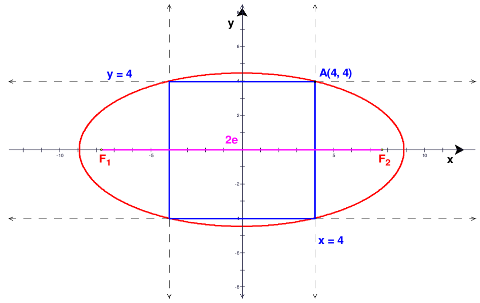
Kvadrat površine 64 upisan je elipsi. Udaljenost žarišta elipse je $4\sqrt{15}$. Kako glasi jednadžba elipse?

Rješenje 017

Iz površine kvadrata izračuna se duljina njegove stranice:

$$\left.\begin{array}{l} P=a^2 \\ P=64 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=64 \Rightarrow a=8.$$

Stranice upisanog kvadrata paralelne su s koordinatnim osima.



Vrhovi kvadrata pripadaju elipsi, a odgovaraju presjeku pravaca x = ± 4 i y = ± 4. Tako se, na primjer, točka A(4, 4) dobije kao presjek pravaca x = 4 i y = 4. Budući da točka A(4, 4) pripada elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, slijedi:

$$16b^2 + 16a^2 = a^2b^2.$$

Udaljenost žarišta elipse je $4\sqrt{15}$. pa vrijedi:

$$2e = 4\sqrt{15} \Rightarrow e = 2\sqrt{15} \Rightarrow \left[e^2 = a^2 - b^2\right] \Rightarrow \left(2\sqrt{15}\right)^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 60.$$

Iz sustava jednadžbi odredimo a^2 i b^2:

$$\left.\begin{array}{l} 16b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \\ a^2 - b^2 = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \\ a^2 = 60 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 16b^2 + 16\left(60 + b^2\right) = \left(60 + b^2\right)b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16b^2 + 960 + 16b^2 = 60b^2 + b^4 \Rightarrow b^4 + 28b^2 - 960 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 3840}}{2} =$$

$$= \frac{-28 \pm 68}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow a^2 = 60 + b^2 = 60 + 20 = 80.$$

Jednadžba elipse je:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 20x^2 + 80y^2 = 1600 \ /:20 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 80.$$

Vježba 017

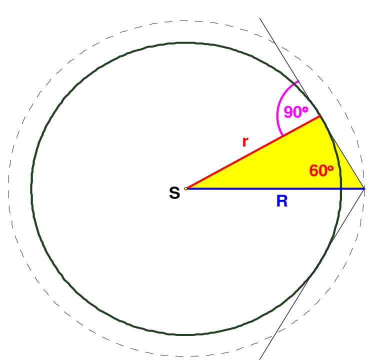
U elipsu $x^2 + 9y^2 = 9$ upisan je kvadrat čije su stranice paralelne s koordinatnim osima. Kolika je površina kvadrata?

Rezultat: Vrhovi kvadrata odgovaraju presjeku elipse i pravaca y = ± x. Treba riješiti sustav jednadžbi y = x i $x^2 + 9y^2 = 9$. P = 3.6.

Zadatak 018 (Marko, Hrvoje, gimnazija, tehnička škola)

Što je skup svih točaka ravnine iz kojih se kružnica $x^2 + y^2 = 9$ vidi pod kutom 120°?

Rješenje 018



$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3.$$

Polumjer zadane kružnice je r = 3.

Iz označenog pravokutnog trokuta proizlazi:

$$\sin 60^0 = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r}{\sin 60^0} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Traženi skup točaka je kružnica čija je jednadžba:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 12.$$

Vježba 018

Što je skup svih točaka ravnine iz kojih se kružnica $x^2 + y^2 = 4$ vidi pod kutom 120°?

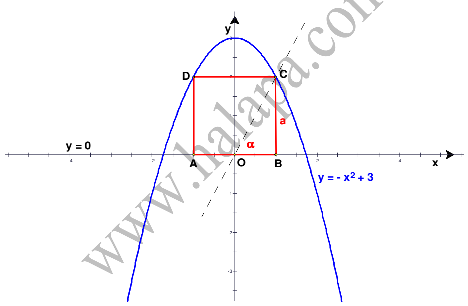
Rezultat: $x^2 + y^2 = \frac{16}{3}.$

Zadatak 019 (Anastazija, gimnazija)

U lik omeđen s $y = 3 - x^2$ i $y = 0$ upisan je kvadrat. Kolika je dijagonala kvadrata?

Rješenje 019

Graf kvadratne funkcije $y = - x^2 + 3$ je parabola "otvorom okrenuta prema dolje".



Ako duljinu stranice kvadrata ABCD označimo slovom a, vrijedi:

$$|OB| = \frac{a}{2} \quad , \quad |BC| = a.$$

Odredimo koeficijent smjera pravca OC:

$$k = tg\,\alpha = \frac{|BC|}{|OB|} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$$

Budući da pravac OC prolazi ishodištem, njegova jednadžba glasi $y = 2x$. Presjek pravca $y = 2x$ i parabole $y = - x^2 + 3$ odredimo tako da riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -x^2 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = -x^2 + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \text{[Vièteova formula]} \Rightarrow x_1 = -3 \text{ i } x_2 = 1.$$

Tada točka C ima koordinate (prvi kvadrant!):

$$x = 1 \;\Rightarrow\; y = 2 \cdot x = 2 \cdot 1 = 2 \;\Rightarrow\; C(1, 2).$$

Duljina stranice kvadrata ABCD je ordinata točke C:

$$a = 2 \Rightarrow d = a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 019

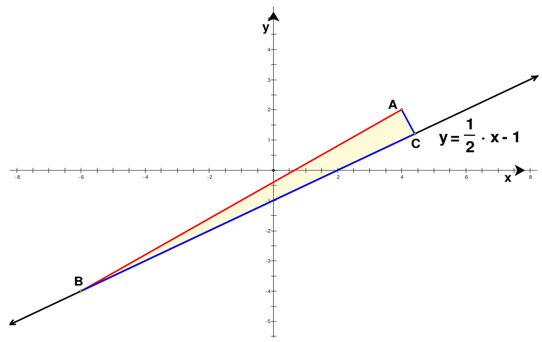
U lik omeđen s y = 3 – x^2 i y = 0 upisan je kvadrat. Kolika je površina kvadrata?

Rezultat: 4.

Zadatak 020 (Anastazija, gimnazija)

Dužina $\overline{AB}$, A(4, 2), B(– 6, – 2) hipotenuza je pravokutnog trokuta ABC kojemu jedna kateta leži na pravcu $y=\frac{1}{2}\cdot x-1.$ Odredi koordinate vrha C.

Rješenje 020



Točka C je na presjeku pravca $y=\frac{1}{2}\cdot x-1.$ i kružnice kojoj je promjer $\overline{AB}$. (Talesov poučak: Svi su obodni kutovi nad promjerom pravi.). Točka S, središte kružnice, je polovište dužine $\overline{AB}$:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)=S\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{2-4}{2}\right)=S(-1,\ -1).$$

Promjer kružnice je:

$$2\cdot r=\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{(-6-4)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{100+36}=$$

$$=\sqrt{136}=\sqrt{4\cdot 34}=2\cdot\sqrt{34}\ \Rightarrow\ r=\sqrt{34}.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=34.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x-1 \\ (x+1)^2+(y+1)^2=34 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (x+1)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot x-1+1\right)^2=34\ \Rightarrow\ (x+1)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)^2=34\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+2x+1+\frac{1}{4}x^2=34\ /\cdot 4\ \Rightarrow\ 4x^2+8x+4+x^2-136=0\ \Rightarrow\ 5x^2+8x-132=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{64+2640}}{10}=\frac{-8\pm\sqrt{2704}}{10}=\frac{-8\pm 52}{10},$$

dobijemo:

$$x_1=\frac{-8+52}{10}=\frac{44}{10}=\frac{22}{5}\ \Rightarrow\ y_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{22}{5}-1=\frac{11}{5}-1=\frac{6}{5},$$

$$x_2=\frac{-8-52}{10}=\frac{-60}{10}=-6\ \Rightarrow\ y_2=\frac{1}{2}\cdot(-6)-1=-4.$$

Rješenje je točka $C\left(\frac{22}{5}, \frac{6}{5}\right),$ a drugo rješenje sustava odgovara točki B.

Vježba 020

Dužina $\overline{AB}$, A(4, 2), B(– 6, – 2) hipotenuza je pravokutnog trokuta ABC kojemu jedna kateta leži na pravcu $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1.$ Odredi jednadžbu pravca na kojem leži druga kateta.

Rezultat: 2x – y – 10 = 0.