Zadatak 161 (Marijan, tehnička škola)

Zadani su vrhovi A(1, 2) i B(3, 1) jednakostraničnog trokuta ABC. Pravac na kome leži vrh C glasi:

$A.\ x+2\cdot y-5=0$ $\quad B.\ 4\cdot x+2\cdot y+5=0$ $\quad C.\ 4\cdot x-2\cdot y-5=0$ $\quad D.\ x+2\cdot y+5=0$

Rješenje 161

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta α = 60° i tri stranice jednake duljine.
Simetrala dužine je pravac okomit na dužinu te prolazi njezinim polovištem. Ta svojstva uvjetuju da je svaka točka na simetrali jednako udaljena od rubnih točaka dužine.
Udaljenost točaka $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x, y)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

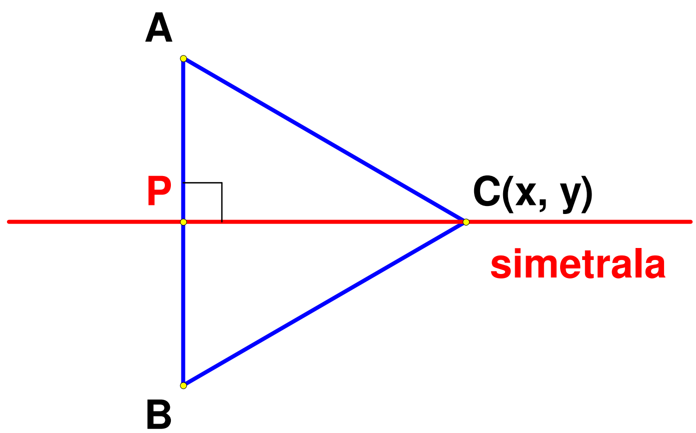
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1\cdot k_2=-1 \ \Rightarrow \ k_1=-\frac{1}{k_2} \ \Rightarrow \ k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$



1.inačica

Vrh C jednakostraničnog trokuta ABC leži na simetrali stranice $\overline{AB}$ i vrijedi:

$$|AC| = |BC|.$$

Računamo $|AC|$.

$$\left.\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= A(1, 2) \\ C(x_2, y_2) &= C(x, y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\, |AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}.$$

Računamo $|BC|$.

$$\left.\begin{aligned} B(x_1, y_1) &= B(3, 1) \\ C(x_2, y_2) &= C(x, y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\, |BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}.$$

Iz

$$|AC| = |BC|$$

slijedi

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 = x^2 - 6 \cdot x + 9 + y^2 - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 = x^2 - 6 \cdot x + 9 + y^2 - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow -2 \cdot x - 4 \cdot y + 4 = -6 \cdot x + 9 - 2 \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 = x^2 - 6 \cdot x + 9 + y^2 - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow -2 \cdot x - 4 \cdot y + 4 = -6 \cdot x + 9 - 2 \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot x - 4 \cdot y + 4 + 6 \cdot x - 9 + 2 \cdot y = 0 \Rightarrow 4 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Vrh C jednakostraničnog trokuta ABC leži na simetrali stranice $\overline{AB}$. Tražimo jednadžbu tog pravca (simetrale). Idemo redom!

Najprije odredimo polovište P dužine $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(3, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \right] \Rightarrow P(x, y) = P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x, y) = P\left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow P(x, y) = P\left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow P(x, y) = P\left(2, \frac{3}{2}\right).$$

Tražimo koeficijent smjera pravca AB.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(3, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] \Rightarrow k_1 = \frac{1-2}{3-1} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}.$$

Simetrala, na kojoj leži točka C, okomita je na pravac AB pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow k_2 = 2.$$

Jednadžba pravca (simetrale) je:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1) = P\left(2, \frac{3}{2}\right) \\ k_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \right] \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot x - 4 \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot x - 4 \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot y - 3 = 4 \cdot x - 8 \Rightarrow 2 \cdot y - 3 - 4 \cdot x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot x + 2 \cdot y + 5 = 0 \Rightarrow -4 \cdot x + 2 \cdot y + 5 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow 4 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 161

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 162 (Filip, gimnazija)

Jednadžba pravca s obzirom na kojeg su pravci $2 \cdot x - y + 7 = 0$ i $4 \cdot x - 2 \cdot y + 1 = 0$ međusobno simetrični je:

$A.\ 8 \cdot x - 4 \cdot y + 13 = 0$ $B.\ 8 \cdot x - 4 \cdot y + 15 = 0$ $C.\ 2 \cdot x - y + 5 = 0$ $D.\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 15 = 0$

Rješenje 162

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

Preoblikujemo jednadžbe zadanih pravaca u eksplicitni oblik.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x - y + 7 = 0 \\ 4 \cdot x - 2 \cdot y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -2 \cdot x - 7 \\ -2 \cdot y = -4 \cdot x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -2 \cdot x - 7 \; / \cdot (-1) \\ -2 \cdot y = -4 \cdot x - 1 \; / : (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x + 7 \\ y = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow \text{pravci su međusobno usporedni}.$$

Pravac s obzirom na kojeg su oni simetrični također je s njima usporedan i ima jednaki koeficijent smjera, k = 2.
Odsječci zadanih pravaca na y osi su:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x + 7 \\ y = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1 = 7 \\ l_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Odsječak l traženog pravca iznosi:

$$l = \frac{1}{2} \cdot \left(l_1 + l_2\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot \left(7 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{1} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot \frac{14+1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \Rightarrow l = \frac{15}{4}.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k = 2 \;\;,\;\; l = \frac{15}{4} \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot x + \frac{15}{4} \Rightarrow y = 2 \cdot x + \frac{15}{4} \; / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot y = 8 \cdot x + 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot x + 15 = 4 \cdot y \Rightarrow 8 \cdot x - 4 \cdot y + 15 = 0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 162

Jednadžba pravca s obzirom na kojeg su pravci $2 \cdot x - y + 7 = 0$ i $2 \cdot x - y + 0.5 = 0$ međusobno simetrični je:

$A.\ 8 \cdot x - 4 \cdot y + 13 = 0$ $\quad B.\ 8 \cdot x - 4 \cdot y + 15 = 0$ $\quad C.\ 2 \cdot x - y + 5 = 0$ $\quad D.\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 15 = 0$

Rezultat: B.

Zadatak 163 (Maja, gimnazija)

Napiši jednadžbu pravca koji je usporedan (paralelan) s pravcem $3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0$ i udaljen je od njega za d = 4.

Rješenje 163

Ponovimo!

$$b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Dva pravca $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ i $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$ su usporedni ako i samo ako postoji $\lambda \in R$ takav da je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Udaljenost točke od pravca
Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Ako točka T leži na x – osi ima koordinate T(x, 0).
Ako točka T leži na y – osi ima koordinate T(0, y).

Postoje dva pravca usporedna sa pravcem $3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0.$ Njihova jednadžba glasi

$$3 \cdot x - 4 \cdot y + C = 0.$$

1.inačica

Neka je S točka u kojoj pravac

$$3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0$$

siječe x – os. Točka S leži na x – osi pa ima koordinate

$$S(x,\ y) = S(x,\ 0).$$

Dalje slijedi:

$$3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \left[\, S(x,\ y) = S(x,\ 0) \,\right] \;\Rightarrow\; 3 \cdot x - 4 \cdot 0 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x - 0 - 2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3 \cdot x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x = 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x = 2 \;/ : 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}.$$

Koordinate točke S su

$$S(x,\ y) = S\left(\frac{2}{3},\ 0\right).$$

Računamo koeficijent C.

$$\left.\begin{array}{l} S(x_\circ,\ y_\circ)=S\left(\frac{2}{3},\ 0\right) \\ 3\cdot x-4\cdot y+C=0 \\ A=3\ ,\ \ B=-4\ ,\ \ C=C \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{|A\cdot x_\circ+B\cdot y_\circ+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4\right] \Rightarrow \frac{\left|3\cdot\frac{2}{3}-4\cdot 0+C\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left|3\cdot\frac{2}{3}-0+C\right|}{\sqrt{9+16}}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{\sqrt{25}}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{5}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{5}=4\ /\cdot 5 \Rightarrow |2+C|=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+C=-20 \\ 2+C=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C=-20-2 \\ C=20-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1=-22 \\ C_2=18 \end{array}\right\}.$$

Traženi pravci imaju jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x-4\cdot y+C_1=0 \\ 3\cdot x-4\cdot y+C_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1=-22 \\ C_2=18 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x-4\cdot y-22=0 \\ 3\cdot x-4\cdot y+18=0 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Neka je S točka u kojoj pravac

$$3\cdot x-4\cdot y-2=0$$

siječe y – os. Točka S leži na y – osi pa ima koordinate

$$S(x,\ y)=S(0,\ y).$$

Dalje slijedi:

$$3\cdot x-4\cdot y-2=0 \Rightarrow [\ S(x,\ y)=S(0,\ y)\ ] \Rightarrow 3\cdot 0-4\cdot y-2=0 \Rightarrow 0-4\cdot y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot y-2=0 \Rightarrow -4\cdot y=2 \Rightarrow -4\cdot y=2\ /:(-4) \Rightarrow y=-\frac{2}{4} \Rightarrow y=-\frac{2}{4} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}.$$

Koordinate točke S su

$$S(x,\ y)=S\left(0,\ -\frac{1}{2}\right).$$

Računamo koeficijent C.

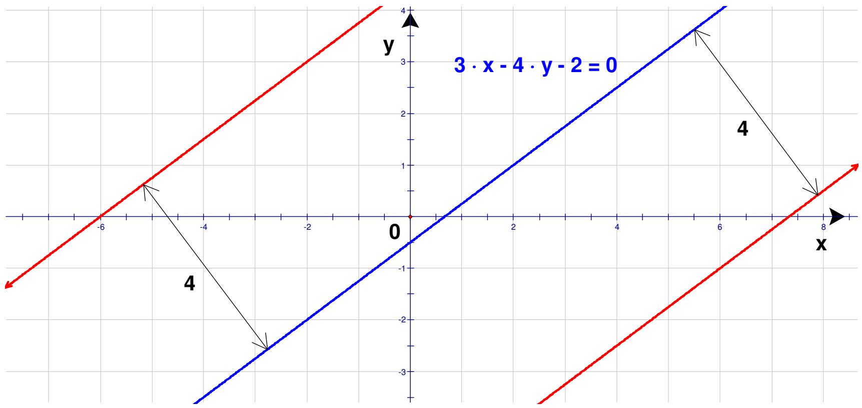
$$\left.\begin{array}{l} S(x_\circ,\ y_\circ)=S\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) \\ 3\cdot x-4\cdot y+C=0 \\ A=3\ ,\ \ B=-4\ ,\ \ C=C \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{|A\cdot x_\circ+B\cdot y_\circ+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4\right] \Rightarrow \frac{\left|3\cdot 0-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+C\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left|0-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+C\right|}{\sqrt{9+16}}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{\sqrt{25}}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{5}=4 \Rightarrow \frac{|2+C|}{5}=4\ /\cdot 5 \Rightarrow |2+C|=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+C=-20 \\ 2+C=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C=-20-2 \\ C=20-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1=-22 \\ C_2=18 \end{array}\right\}.$$

Traženi pravci imaju jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 4 \cdot y + C_1 = 0 \\ 3 \cdot x - 4 \cdot y + C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1 = -22 \\ C_2 = 18 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 4 \cdot y - 22 = 0 \\ 3 \cdot x - 4 \cdot y + 18 = 0 \end{array}\right\}.$$



Vježba 163

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 164 (Maja, gimnazija)

Odredi kut između pravca $3 \cdot x - 4 \cdot y = 0$ i $x = 2.$

Rješenje 164

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

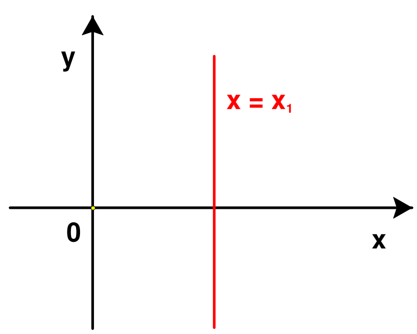
naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Kut za koji treba u pozitivnom smjeru (smjer suprotan od gibanja kazaljke na satu) zarotirati pozitivni dio x – osi oko sjecišta pravca i osi x do pravca naziva se **prikloni kut** pravca. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\, \alpha = k.$$

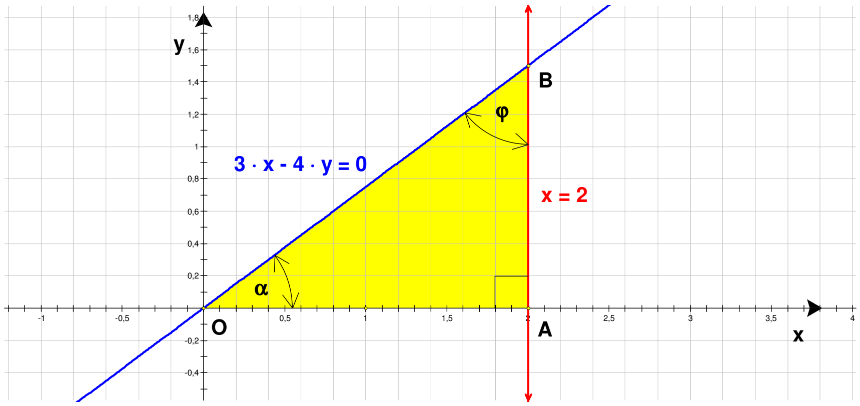
Jednadžba pravca usporednog s y – osi glasi x = x_1.



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Pravac x = 2 usporedan je s osi y pa ćemo mjeru traženog kuta φ odrediti iz pravokutnog trokuta OAB.



Prvo moramo izračunati mjeru kuta α, kuta kojeg pravac $3 \cdot x - 4 \cdot y = 0$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x.

$$3 \cdot x - 4 \cdot y = 0 \Rightarrow -4 \cdot y = -3 \cdot x \Rightarrow -4 \cdot y = -3 \cdot x \;/:(-4) \Rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot x \Rightarrow k = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, tg\,\alpha = k \,\right] \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52'.$$

Trokut OAB pravokutan je pa vrijedi.

$$\alpha + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \varphi = 90^\circ - 36^\circ 52' \Rightarrow \varphi = 89^\circ 60' - 36^\circ 52' \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8'.$$

Vježba 164

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 165 (Josip, tehnička škola)

U jednadžbi $A \cdot x + B \cdot y + 4 = 0$ odredi realne brojeve A i B tako da pravac sadrži točke P(– 4, – 4) i Q(2, 5).

Rješenje 165

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Budući da pravac sadrži točke P i Q, u njegovu jednadžbu uvrstit ćemo koordinate tih točaka:

- $$\left.\begin{matrix} P(x,\ y) = P(-4,\ -4) \\ A \cdot x + B \cdot y + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cdot (-4) + B \cdot (-4) + 4 = 0 \Rightarrow -4 \cdot A - 4 \cdot B + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot A - 4 \cdot B + 4 = 0 \;/:(-4) \Rightarrow A + B - 1 = 0 \Rightarrow A + B = 1$$

- $$\left.\begin{matrix} Q(x,\ y) = Q(2,\ 5) \\ A \cdot x + B \cdot y + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cdot 2 + B \cdot 5 + 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot A + 5 \cdot B + 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot A + 5 \cdot B = -4.$$

Da bismo odredili koeficijente A i B riješit ćemo sustav:

$$\left.\begin{matrix} A + B = 1 \\ 2 \cdot A + 5 \cdot B = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} A + B = 1 \;/\cdot(-5) \\ 2 \cdot A + 5 \cdot B = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -5 \cdot A - 5 \cdot B = -5 \\ 2 \cdot A + 5 \cdot B = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot A = -9 \Rightarrow -3 \cdot A = -9 \;/:(-3) \Rightarrow A = 3.$$

Računamo B.

$$\left.\begin{array}{l} A=3 \\ A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+B=1 \Rightarrow B=1-3 \Rightarrow B=-2.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A=3 \ , \ B=-2 \\ A\cdot x+B\cdot y+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x-2\cdot y+4=0.$$

Vježba 165

U jednadžbi $A\cdot x+B\cdot y-7=0$ odredi realne brojeve A i B tako da pravac sadrži točke P(2, 1) i Q(– 1, 3).

Rezultat: $2\cdot x+3\cdot y-7=0.$

Zadatak 166 (Josip, tehnička škola)

Odredi $k\in R$ tako da pravci $k\cdot x-y-4=0,$ $4\cdot x-3\cdot y-6=0$ i $-x+y+1=0$ prolaze istom točkom.

Rješenje 166

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Da bismo odredili koeficijent k prvo moramo naći sjecište S pravaca $4\cdot x-3\cdot y-6=0$ i $-x+y+1=0.$ Riješit ćemo sustav:

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot x-3\cdot y-6=0 \\ -x+y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x-3\cdot y=6 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x-3\cdot y=6 \\ -x+y=-1 \ /\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x-3\cdot y=6 \\ -3\cdot x+3\cdot y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -3+y=-1 \Rightarrow y=-1+3 \Rightarrow y=2.$$

Točka S ima koordinate:

$$S\left(x,\ y\right)=S\left(3,\ 2\right).$$

Budući da i pravac $k\cdot x-y-4=0$, također, prolazi točkom S, koordinate točke S uvrstit ćemo u njegovu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} S\left(x,\ y\right)=S\left(3,\ 2\right) \\ k\cdot x-y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot 3-2-4=0 \Rightarrow 3\cdot k-6=0 \Rightarrow 3\cdot k=6 \Rightarrow 3\cdot k=6 \ /:3 \Rightarrow k=2.$$

Vježba 166

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 167 (Matko, srednja škola)

Na osi ordinata odredi točku C koja je jednako udaljena od točaka A(– 4 , – 1) i B(1, 2).

Rješenje 167

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a-b\right)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Ako točka T leži na y – osi ima koordinate T(0, y).

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Točka C pripada osi ordinata pa ima koordinate C(0, y). Budući da je jednako udaljena od točaka A i B, vrijedi jednakost:

$$|AC| = |BC|.$$

Odredimo udaljenosti $|AC|$ i $|BC|$.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-4, -1) \\ C(x_2, y_2) = C(0, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{(0-(-4))^2 + (y-(-1))^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{(0+4)^2 + (y+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{4^2 + (y+1)^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{16 + (y+1)^2}$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(1, 2) \\ C(x_2, y_2) = C(0, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{(0-1)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{(-1)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{1 + (y-2)^2}.$$

Iz uvjeta

$$|AC| = |BC|$$

slijedi:

$$\sqrt{16 + (y+1)^2} = \sqrt{1 + (y-2)^2} \Rightarrow \sqrt{16 + (y+1)^2} = \sqrt{1 + (y-2)^2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{16 + (y+1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{1 + (y-2)^2}\right)^2 \Rightarrow 16 + (y+1)^2 = 1 + (y-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + y^2 + 2 \cdot y + 1 = 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 \Rightarrow 16 + y^2 + 2 \cdot y + 1 = 1 + y^2 - 4 \cdot y + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + 2 \cdot y = -4 \cdot y + 4 \Rightarrow 2 \cdot y + 4 \cdot y = 4 - 16 \Rightarrow 6 \cdot y = -12 \Rightarrow 6 \cdot y = -12 \ /:6 \Rightarrow y = -2.$$

Točka C ima koordinate:

$$C(x, y) = C(0, -2).$$

Vježba 167

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 168 (Matko, srednja škola)

U jednadžbi pravca $3 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot a - 1 = 0$ odredi realni parametar a tako da pravac na osi ordinata odsijeca odsječak 4.

Rješenje 168

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Ako točka T leži na y – osi ima koordinate T(0, y).
Pravac siječe os ordinata u točki T(0. 4) pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu pravca:

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(0, 4) \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot a - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot a - 1 = 0 \Rightarrow 0 + 8 + 5 \cdot a - 1 = 0 \Rightarrow 8 + 5 \cdot a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot a = -8 + 1 \Rightarrow 5 \cdot a = -7 \Rightarrow 5 \cdot a = -7 \; /:5 \Rightarrow a = -\frac{7}{5}.$$

Vježba 168

U jednadžbi pravca $3 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot a - 3 = 0$ odredi realni parametar a tako da pravac na osi ordinata odsijeca odsječak 4.

Rezultat: $a = -1.$

Zadatak 169 (Filip, srednja škola)

U jednadžbi $2 \cdot x + (a - 1) \cdot y + 3 = 0$ odredi $a \in R \setminus \{1\}$ tako da duljina odsječka pravca između koordinatnih osi bude $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Rješenje 169

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Ako točka T leži na x – osi ima koordinate T(x, 0).
Ako točka T leži na y – osi ima koordinate T(0, y).
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Jednadžbu pravca preoblikovat ćemo u segmentni oblik.

$$2 \cdot x + (a - 1) \cdot y + 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x + (a - 1) \cdot y = -3 \Rightarrow 2 \cdot x + (a - 1) \cdot y = -3 \; /:(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot x}{-3} + \frac{(a - 1) \cdot y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{-\frac{3}{a - 1}} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = -\frac{3}{2} \\ n = -\frac{3}{a - 1} \end{array}\right\}.$$

Pravac siječe os:

- apscisa u točki $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
- ordinata u točki $N\left(0, -\frac{3}{a-1}\right)$.

Duljina dužine $\overline{MN}$ je $\frac{\sqrt{10}}{2}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} M\left(x_1, y_1\right)=M\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \\ N\left(x_2, y_2\right)=N\left(0, -\frac{3}{a-1}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, |MN|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2} \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2+\left(-\frac{3}{a-1}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{a-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{a-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{(a-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{(a-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{(a-1)^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4}+\frac{9}{(a-1)^2}=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{2^2} \Rightarrow \frac{9}{4}+\frac{9}{(a-1)^2}=\frac{10}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{(a-1)^2}=\frac{10}{4}-\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{9}{(a-1)^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow (a-1)^2=36 \Rightarrow (a-1)^2=36 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2}=\sqrt{36} \Rightarrow |a-1|=6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-1=-6 \\ a-1=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-6+1 \\ a=6+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=-5 \\ a_2=7 \end{array}\right\}.$$

Vježba 169

U jednadžbi $2 \cdot x-(1-a) \cdot y+3=0$ odredi $a \in R \setminus \{1\}$ tako da duljina odsječka pravca između koordinatnih osi bude $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Rezultat: $a_1=-5, \; a_2=7.$

Zadatak 170 (Filip, srednja škola)

Točkom P(3, – 2) položi pravac tako da P bude polovište odsječka što ga na pravcu odsijecaju koordinatne osi.

Rješenje 170

Ponovimo!

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Ako točka T leži na x – osi ima koordinate T(x, 0).
Ako točka T leži na y – osi ima koordinate T(0, y).

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) su

$$P(x,\ y)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Traženi pravac siječe koordinatne osi u točkama:

- M(m, 0) na osi apscisa
- N(0, n) na osi ordinata.

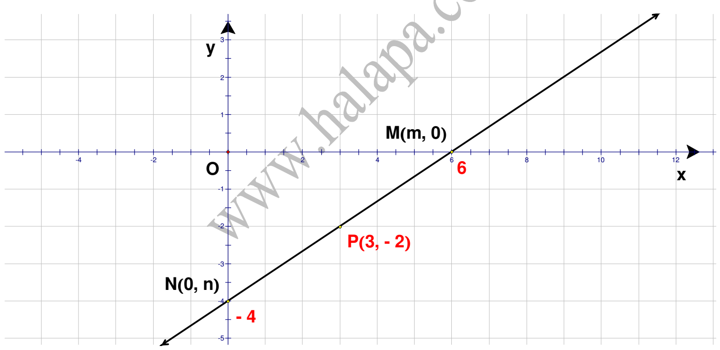
Točka P je polovište dužine $\overline{MN}$ pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} M(x_1,\ y_1)=M(m,\ 0) \\ N(x_2,\ y_2)=N(0,\ n) \\ P(x_\circ,\ y_\circ)=P(3,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x_1+x_2}{2}=x_\circ \\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_\circ \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{m+0}{2}=3 \\ \frac{0+n}{2}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{m}{2}=3 \\ \frac{n}{2}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{m}{2}=3\ /\cdot 2 \\ \frac{n}{2}=-2\ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=6 \\ n=-4 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba traženog pravca napisana u segmentnom obliku glasi:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ n=-4 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1.$$



Vježba 170

Točkom P(5, – 3) položi pravac tako da P bude polovište odsječka što ga na pravcu odsijecaju koordinatne osi.

Rezultat: $\frac{x}{10}+\frac{y}{-6}=1.$

Zadatak 171 (Manuela, srednja škola)

Odredi točku kružnice $(x-4)^2+(y-3)^2=13$ koja je najmanje i onu koja je najviše udaljena od točke T(– 2, – 1).

Rješenje 171

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad , \qquad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Udaljenost točaka $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Koordinate središta S zadane kružnice iznose:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=13 \Rightarrow S(p, q)=S(4, 3).$$

Prvo odredimo jednadžbu pravca koji prolazi točkama S i T.

$$\left.\begin{array}{l} S\left(x_1, y_1\right)=S(4, 3) \\ T\left(x_2, y_2\right)=T(-2, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right) \,\right] \Rightarrow y-3=\frac{-1-3}{-2-4}\cdot(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-3=\frac{-4}{-6}\cdot(x-4) \Rightarrow y-3=\frac{\cancel{-}4}{\cancel{-}6}\cdot(x-4) \Rightarrow y-3=\frac{2}{3}\cdot(x-4) \Rightarrow y-3=\frac{2}{3}\cdot x-\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-\frac{8}{3}+3 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-\frac{8}{3}+\frac{3}{1} \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{-8+9}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}.$$

Sada odredimo sjecište pravca i kružnice tako da riješimo sustav.

$$\left.\begin{array}{l} (x-4)^2+(y-3)^2=13 \\ y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow [\,\text{metoda zamjene}\,] \Rightarrow (x-4)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}-3\right)^2=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}-\frac{3}{1}\right)^2=13 \Rightarrow (x-4)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1-9}{3}\right)^2=13 \Rightarrow (x-4)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot x-\frac{8}{3}\right)^2=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8\cdot x+16+\left(\frac{2}{3}\cdot x\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot x\cdot\frac{8}{3}+\left(\frac{8}{3}\right)^2=13 \Rightarrow x^2-8\cdot x+16+\frac{4}{9}\cdot x^2-\frac{32}{9}\cdot x+\frac{64}{9}=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8\cdot x+16+\frac{4}{9}\cdot x^2-\frac{32}{9}\cdot x+\frac{64}{9}=13 \;/\cdot 9 \Rightarrow 9\cdot x^2-72\cdot x+144+4\cdot x^2-32\cdot x+64=117 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot x^2-72\cdot x+144+4\cdot x^2-32\cdot x+64-117=0 \Rightarrow 13\cdot x^2-104\cdot x+91=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13\cdot x^2-104\cdot x+91=0 \\ a=13\ ,\ b=-104\ ,\ c=91 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=13\ ,\ b=-104\ ,\ c=91 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-104)\pm\sqrt{(-104)^2-4\cdot 13\cdot 91}}{2\cdot 13} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{104\pm\sqrt{10816-4732}}{26} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{104\pm\sqrt{6084}}{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{104\pm 78}{26} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{104+78}{26} \\ x_2=\dfrac{104-78}{26} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{182}{26} \\ x_2=\dfrac{26}{26} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{182}{26} \\ x_2=\dfrac{26}{26} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_2=1 \end{array}\right\}.$$

Računamo y_1 i y_2.

- $$\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=\dfrac{2}{3}\cdot x+\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{14}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{14+1}{3} \Rightarrow y=\frac{15}{3} \Rightarrow y=\frac{15}{3} \Rightarrow y_1=5.$$

Točka A ima koordinate:

$$A(x,\ y)=A(7,\ 5).$$

- $$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\dfrac{2}{3}\cdot x+\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2+1}{3} \Rightarrow y=\frac{3}{3} \Rightarrow y=\frac{3}{3} \Rightarrow y_2=1.$$

Točka B ima koordinate:

$$B(x,\ y)=B(1,\ 1).$$

Kako bismo odredili koja je od točaka A i B najbliža, a koja najudaljenija od točke T izračunat ćemo udaljenosti $|TA|$ i $|TB|$:

- $$\left.\begin{array}{l} T(x_1,\ y_1)=T(-2,\ -1) \\ A(x_2,\ y_2)=A(7,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |TA|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |TA|=\sqrt{(7-(-2))^2+(5-(-1))^2} \Rightarrow |TA|=\sqrt{(7+2)^2+(5+1)^2} \Rightarrow$$

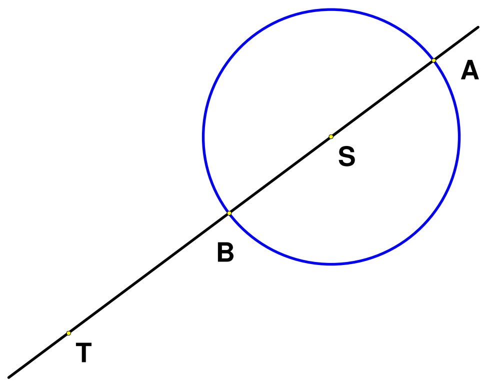
$$\Rightarrow |TA|=\sqrt{9^2+6^2} \Rightarrow |TA|=\sqrt{81+36} \Rightarrow |TA|=\sqrt{117} \Rightarrow |TA|\approx 10.82$$

- $$\left.\begin{array}{l} T(x_1,\ y_1)=T(-2,\ -1) \\ B(x_2,\ y_2)=B(1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |TB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |TB|=\sqrt{(1-(-2))^2+(1-(-1))^2} \Rightarrow |TB|=\sqrt{(1+2)^2+(1+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |TB|=\sqrt{3^2+2^2} \Rightarrow |TB|=\sqrt{9+4} \Rightarrow |TB|=\sqrt{13} \Rightarrow |TB|\approx 3.61.$$

Točka A je najudaljenija od točke T, a točka B je najbliža točki T.



Vježba 171

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 172 (Aleks, gimnazija)

Točke A(1, – 2, 0), B(2, 1, 3), C(– 2, 0, 5) i D(– 3, – 3, 2) vrhovi su paralelograma. Odredi duljinu dijagonale $\overline{AC}$.

Rješenje 172

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima.
Dijagonala paralelograma je spojnica dva nesusjedna vrha. Paralelogram ima dvije dijagonale koje se međusobno raspolavljaju.
Udaljenost točaka $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}.$$

Duljina dijagonale $\overline{AC}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1, z_1\right)=A(1,-2,0) \\ C\left(x_2, y_2, z_2\right)=C(-2,0,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\,|AC|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}\,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{(-2-1)^2+(0-(-2))^2+(5-0)^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{(-3)^2+(0+2)^2+5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{9+2^2+25} \Rightarrow |AC|=\sqrt{9+4+25} \Rightarrow |AC|=\sqrt{38}.$$

Vježba 172

Točke A(1, – 2, 0), B(2, 1, 3), C(– 2, 0, 5) i D(– 3, – 3, 2) vrhovi su paralelograma. Odredi duljinu dijagonale $\overline{BD}$.

Rezultat: $|BD|=\sqrt{42}.$