Zadatak 141 (Rex, ekonomska škola)

Koji od pravaca prolazi ishodištem koordinatnog sustava?

$$A.\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \qquad B.\ x+y=1 \qquad C.\ 2\cdot x+3\cdot y=0 \qquad D.\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

Rješenje 141

Ponovimo!

$$\frac{0}{n}=0\ ,\ n\neq 0 \quad , \quad n\cdot 0=0.$$

Budući da pravac treba prolaziti ishodištem koordinatnog sustava (točkom O(0, 0)), uvrstit ćemo koordinate ishodišta u jednadžbe pravaca i provjeriti dobije li se točna (istinita) jednakost.

$$O(x,\ y)=O(0,\ 0) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \\ x+y=1 \\ 2\cdot x+3\cdot y=0 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{0}{3}+\frac{0}{-2}=1 \\ 0+0=1 \\ 2\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ 0=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0+0=1 \\ 0+0=1 \\ 0+0=0 \\ 0=0+\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0\neq 1 \\ 0\neq 1 \\ 0=0\ \text{točno} \\ 0\neq \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 141

Koji od pravaca prolazi ishodištem koordinatnog sustava?

$$A.\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=0 \qquad B.\ x+y=1 \qquad C.\ 2\cdot x+3\cdot y=1 \qquad D.\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

Rezultat: A.

Zadatak 142 (Martin, srednja škola)

Odredite koordinate točke koja je simetrična točki A(4, – 2) s obzirom na pravac y = 2 · x – 3.

Rješenje 142

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

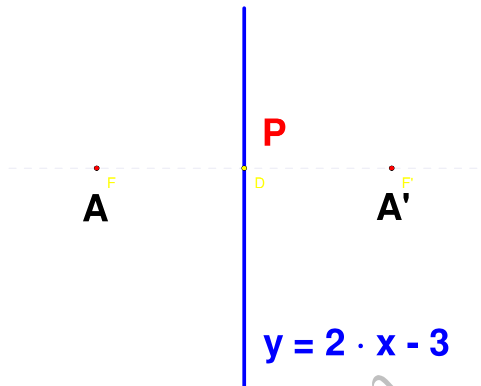
$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right).$$

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P\left(x,\ y\right) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Najprije naći ćemo jednadžbu pravca koji prolazi točkom A i okomit je na pravac $y = 2 \cdot x - 3$ čiji je koeficijent smjera

$$k_1 = 2.$$

Traženi pravac ima koeficijent smjera

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{2}$$

pa njegova jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right) = A\left(4,\ -2\right) \\ k_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ y - y_1 = k_2 \cdot \left(x - x_1\right)\ \right] \Rightarrow\; y - (-2) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + 2 \;\Rightarrow\; y + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + 2 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

Da bismo odredili koordinate polovišta P dužine $\overline{AA'}$ moramo riješiti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 3 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow\; 2 \cdot x - 3 = -\frac{1}{2} \cdot x \;\Rightarrow\; 2 \cdot x - 3 = -\frac{1}{2} \cdot x \ /\cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot x - 6 = -x \;\Rightarrow\; 4 \cdot x + x = 6 \;\Rightarrow\; 5 \cdot x = 6 \;\Rightarrow\; 5 \cdot x = 6 \ /:5 \;\Rightarrow\; x = \frac{6}{5}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \cdot x \\ x = \frac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow\; y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{5}.$$

Točka P ima koordinate:

$$P(x,\ y)=P\left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right).$$

Sada računamo koordinate točke A' koja je simetrična točki A s obzirom na pravac y = 2 · x – 3. Uočimo da je točka P polovište dužine $\overline{AA'}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(4,\ -2) \\ P(x_\circ,\ y_\circ)=P\left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right) \\ A'(x_2,\ y_2)=A'(x,\ y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x_1+x_2}{2}=x_\circ \\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_\circ \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{4+x}{2}=\frac{6}{5} \\ \frac{-2+y}{2}=-\frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{4+x}{2}=\frac{6}{5}\ /\cdot 10 \\ \frac{-2+y}{2}=-\frac{3}{5}\ /\cdot 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot(4+x)=12 \\ 5\cdot(-2+y)=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20+5\cdot x=12 \\ -10+5\cdot y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot x=12-20 \\ 5\cdot y=-6+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot x=-8 \\ 5\cdot y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot x=-8\ /:5 \\ 5\cdot y=4\ /:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{array}\right\}.$$

Točka A' ima koordinate:

$$A'(x,\ y)=A'\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right).$$

Vježba 142

Odredite koordinate točke koja je simetrična točki $A\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ s obzirom na pravac y = 2 · x – 3.

Rezultat: A(4, – 2).

Zadatak 143 (Marina, srednja škola)

Točka T(x, 2 · x – 6) jednako je udaljena od točaka A(0, 4) i B(8, 0) za svaku vrijednost realnog broja x. Dokaži!

Rješenje 143

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a=n \\ b=n \end{array}\right\} \Rightarrow a=b.$$

Udaljenost točaka $A(x_1,\ y_1)$ i $B(x_2,\ y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Odredimo | AT | i | BT |:

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(0,\ 4) \\ T(x_2,\ y_2)=T(x,\ 2\cdot x-6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\,|AT|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{(x-0)^2+(2\cdot x-6-4)^2} \Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+(2\cdot x-10)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+(2\cdot x)^2-2\cdot 2\cdot x\cdot 10+10^2} \Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+4\cdot x^2-40\cdot x+100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100}$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(8, 0) \\ T(x_2, y_2) = T(x, 2 \cdot x - 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|BT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{(x-8)^2 + (2 \cdot x - 6 - 0)^2} \Rightarrow |BT| = \sqrt{(x-8)^2 + (2 \cdot x - 6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 + (2 \cdot x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{x^2 - 16 \cdot x + 64 + 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 36} \Rightarrow |BT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100}.$$

Očito je:

$$\left.\begin{array}{l} |AT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100} \\ |BT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100} \end{array}\right\} \Rightarrow |AT| = |BT|.$$

Vježba 143

Točka T(x, – 6 + 2 · x) jednako je udaljena od točaka A(0, 4) i B(8, 0) za svaku vrijednost realnog broja x. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 144 (Ante, tehnička škola)

Odredi koeficijent a tako da pravci $x + 3 \cdot y + 5 = 0$, $a \cdot x + (a-1) \cdot y = 1$ i $2 \cdot x - 5 \cdot y - 12 = 0$ prolaze istom točkom.

Rješenje 144

Ponovimo!

Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.

Naći ćemo sjecište prvog i trećeg pravca tako da riješimo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y + 5 = 0 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \; / \cdot (-2) \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \cdot x - 6 \cdot y = 10 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow -11 \cdot y = 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 \cdot y = 22 \; / : (-11) \Rightarrow y = -2.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 3 \cdot (-2) = -5 \Rightarrow x - 6 = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 + 6 \Rightarrow x = 1.$$

Sjecište pravaca je točka

$$S(x, y) = S(1, -2).$$

Točka S pripada i pravcu

$$a \cdot x + (a-1) \cdot y = 1$$

pa njezine koordinate uvrstimo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,\ y) = S(1,\ -2) \\ a \cdot x + (a-1) \cdot y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot 1 + (a-1) \cdot (-2) = 1 \Rightarrow a - 2 \cdot a + 2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 2 \cdot a = 1 - 2 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow -a = -1 \ / \cdot (-1) \Rightarrow a = 1.$$

Vježba 144

Odredi koeficijent a tako da pravci $x + 3 \cdot y + 5 = 0,\ a \cdot x - (1-a) \cdot y = 1$ i $2 \cdot x - 5 \cdot y - 12 = 0$ prolaze istom točkom.

Rezultat: a = 1.

Zadatak 145 (Miroslav, srednja škola)

Kakvi moraju biti predznaci od A i B da kut, što ga pravac $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ čini s pozitivnim smjerom osi x, bude:

a) manji od 90º

b) veći od 90º?

Rješenje 145

Ponovimo!

$$-\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow a \text{ i } b \text{ imaju suprotne predznake} \quad , \quad -\frac{a}{b} < 0 \Rightarrow a \text{ i } b \text{ imaju jednake predznake}$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

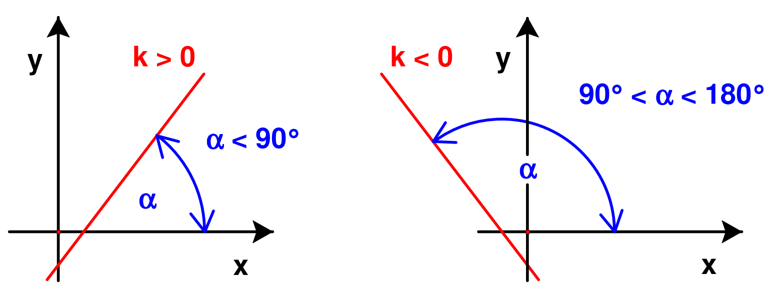
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Za koeficijent smjera k vrijedi:

- k > 0 … pravac čini s pozitivnim smjerom osi x šiljasti kut (kut manji od 90º)
- k < 0 … pravac čini s pozitivnim smjerom osi x tupi kut (kut između 90º i 180º)



Preoblikujemo implicitni oblik jednadžbe pravca u eksplicitni.

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \Rightarrow B \cdot y = -A \cdot x - C \Rightarrow B \cdot y = -A \cdot x - C \ / \cdot \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B} \Rightarrow [\ y = k \cdot x + l\ ] \Rightarrow k = -\frac{A}{B}.$$

a)

$$k > 0 \Rightarrow -\frac{A}{B} > 0 \Rightarrow A \text{ i } B \text{ imaju suprotne predznake}$$

b)

$$k < 0 \Rightarrow -\frac{A}{B} < 0 \Rightarrow A \text{ i } B \text{ imaju jednake predznake}.$$

Vježba 145

Kakvi moraju biti predznaci od A i B da kut, što ga pravac $A \cdot x - B \cdot y + C = 0$ čini s pozitivnim smjerom osi x, bude:
a) manji od 90º
b) veći od 90º?

Rezultat: a) jednaki b) suprotni

Zadatak 146 (Asterix, gimnazija)

Napiši nekoliko točaka koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2. Nacrtaj ih u koordinatnom sustavu. Što primjećuješ? Kako bismo ovu svezu koordinata napisali matematičkim simbolima?

Rješenje 146

Ponovimo!

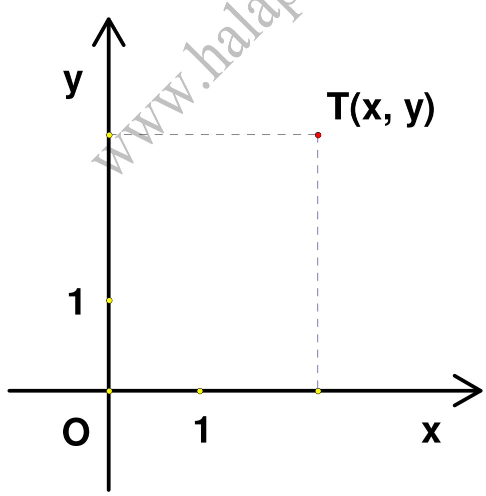
Kako zapisati "… broj b je n – terostruko veći od broja a …?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

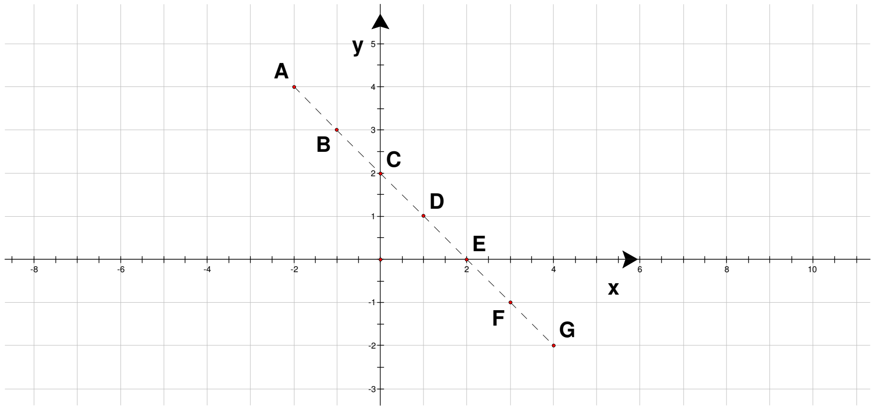
naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Uređenu trojku (O; x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevni pravci s istim ishodištem nazivamo pravokutni koordinatni sustav u ravnini.



Svakoj točki T ravnine pridružen je jedan i samo jedan uređeni par realnih brojeva (x, y). Broj x zove se apscisa točke T, a broj y ordinata točke T.
Točke koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2, na primjer, su:

$$A(-2, 4), B(-1, 3), C(0, 2), D(1, 1), E(2, 0), F(3, -1), G(4, -2), itd.$$

Točke leže na pravcu. Uvjerimo se!



Neka su T(x, y) točke koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2. Matematički zapisujemo

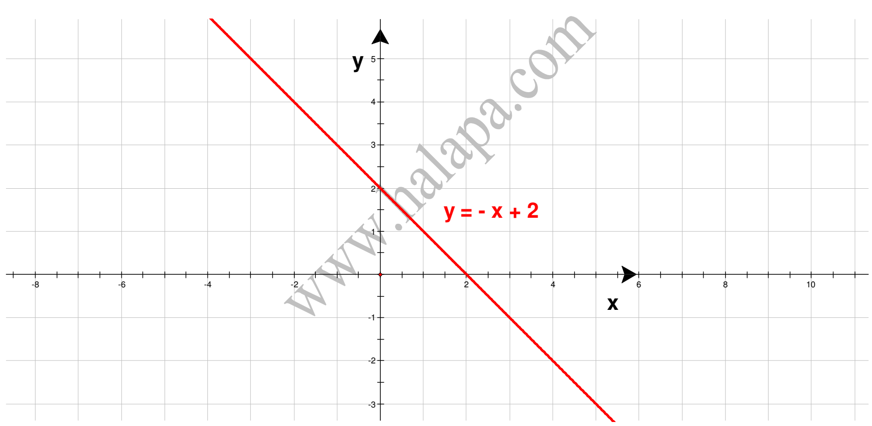
$$x + y = 2.$$

To je jednadžba pravca.

$$x + y = 2 \;\Rightarrow\; y = -x + 2.$$

Budući da je pravac određen s dvije točke, dovoljno je naći dvije njegove točke.

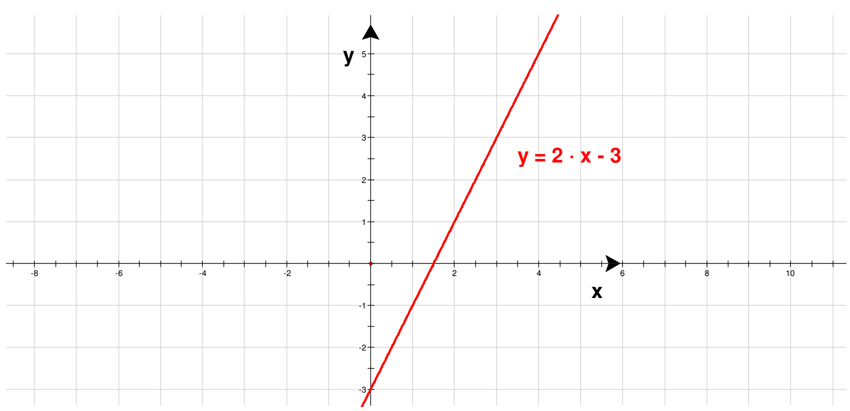
x	0	1
y = – x + 2	2	1



Vježba 146

Napiši nekoliko točaka koje imaju svojstvo da im je razlika dvostruke apscise i ordinate jednaka 3. Što primjećuješ? Kako bismo ovu svezu koordinata napisali matematičkim simbolima?

Rezultat: $2 \cdot x - y = 3 \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; y = 2 \cdot x - 3.$



Zadatak 147 (Dora, gimnazija)

Odredite jednadžbu pravca koji sadrži točku T(8, 1), a sa pravcima $7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 0$ i $9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0$ zatvara jednakokračan trokut.

Rješenje 147

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \alpha = \beta \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = tg\,\beta \quad , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Kut između pravaca

$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

računa se iz formule

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| = |y| \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x = y \\ x = -y \end{matrix}\right\}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot \left(b + c\right) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot \left(b + c\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Množenje zagrada

$$\left(a + b\right) \cdot \left(c + d\right) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Jednadžbe simetrala kutova što ih zatvaraju dva pravca koji se sijeku

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

glase:

$$\frac{\left| A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{\left| A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \right|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Izostavimo li apsolutne vrijednosti, dobijemo

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

ili

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{simetrala kuta koji ne sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava} \end{array}\right]$$

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{simetrala kuta koji sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava} \end{array}\right].$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut. Nasuprot stranica jednake duljine u trokutu leže jednaki kutovi.

1.inačica

Jednadžba pravca točkom T(8, 1) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1, y_1\right) = T(8, 1) \\ y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = k \cdot (x - 8) \Rightarrow y - 1 = k \cdot x - 8 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = k \cdot x - 8 \cdot k + 1 \Rightarrow y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k.$$

Njegov koeficijent smjera je k.
Jednadžbe zadanih pravaca, također, napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo našli njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 0 \\ 9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot y = -7 \cdot x + 42 \\ 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot y = -7 \cdot x + 42 \;/:6 \\ 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 \;/:2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\frac{7}{6} \cdot x + 7 \\ y = -\frac{9}{2} \cdot x + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = -\frac{7}{6} \\ k_2 = -\frac{9}{2} \end{array}\right\}.$$

Odredimo kutove koje pravac

$$y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k$$

zatvara sa pravcima

$$y = -\frac{7}{6} \cdot x + 7 \;,\; y = -\frac{9}{2} \cdot x + 7.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{7}{6}\cdot x+7 \;\;,\;\; k_1=-\frac{7}{6} \\ y=k\cdot x+1-8\cdot k \;\;,\;\; k_2=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[tg\,\varphi_1=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \right] \Rightarrow tg\,\varphi_1=\left|\frac{k-\left(-\frac{7}{6}\right)}{1+\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot k}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi_1=\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k \;\;,\;\; k_1=k \\ y=-\frac{9}{2}\cdot x+7 \;\;,\;\; k_2=-\frac{9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[tg\,\varphi_2=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \right] \Rightarrow tg\,\varphi_2=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1+k\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi_2=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right|.$$

Budući da traženi pravac sa zadanim pravcima pravi jednakokračan trokut, kutovi koje s njima zatvara međusobno su jednaki.

$$tg\,\varphi_1=tg\,\varphi_2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right|.$$

Treba riješiti dvije jednadžbe.
Prva jednadžba

$$\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right| \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \;/\cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k+\frac{7}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)=\left(-\frac{9}{2}-k\right)\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=-\frac{9}{2}+\frac{21}{4}\cdot k-k+\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=-\frac{9}{2}+\frac{21}{4}\cdot k-k+\frac{7}{6}\cdot k^2 \;/\cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot k-54\cdot k^2+14-63\cdot k=-54+63\cdot k-12\cdot k+14\cdot k^2 \;/\cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot k-54\cdot k^2+14-63\cdot k+54-63\cdot k+12\cdot k-14\cdot k^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -68\cdot k^2-102\cdot k+68=0 \Rightarrow -68\cdot k^2-102\cdot k+68=0 \;/:(-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 34\cdot k^2+51\cdot k-34=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 34\cdot k^2+51\cdot k-34=0 \\ a=34 \;\;,\;\; b=51 \;\;,\;\; c=-34 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=34\ ,\ b=51\ ,\ c=-34 \\ k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{51^2-4\cdot 34\cdot(-34)}}{2\cdot 34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{2601+4624}}{68} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{7225}}{68} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm 85}{68} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{-51+85}{68} \\ k_2=\dfrac{-51-85}{68} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{34}{68} \\ k_2=-\dfrac{136}{68} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{34}{68} \\ k_2=-\dfrac{136}{68} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{1}{2} \\ k_2=-2 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva pravca:

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k \\ k=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x-3.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k \\ k=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2\cdot x+1-8\cdot(-2) \Rightarrow y=-2\cdot x+1+16 \Rightarrow y=-2\cdot x+17.$$

Druga jednadžba

$$\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right| \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{\frac{9}{2}+k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{\frac{9}{2}+k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\ /\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k+\frac{7}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)=\left(\frac{9}{2}+k\right)\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right) \Rightarrow$$

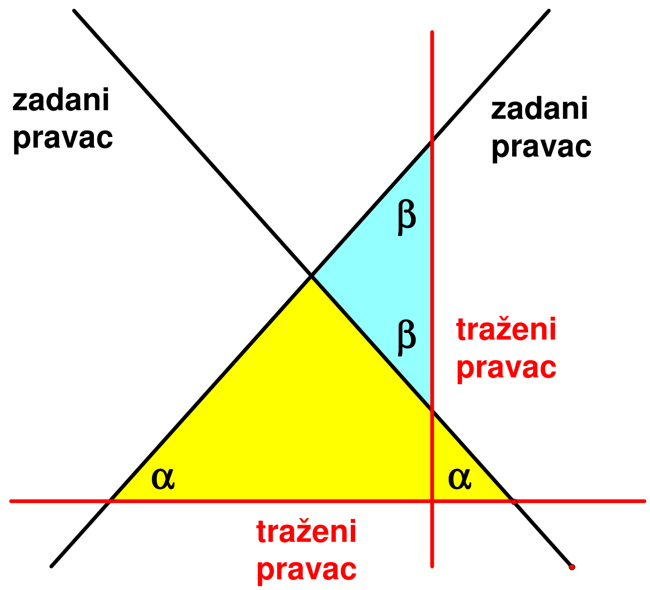
$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=\frac{9}{2}-\frac{21}{4}\cdot k+k-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=\frac{9}{2}-\frac{21}{4}\cdot k+k-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow -\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\cdot k^2\ /\cdot 6 \Rightarrow -27\cdot k^2+7=27-7\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -27\cdot k^2+7\cdot k^2=27-7 \Rightarrow -20\cdot k^2=20 \Rightarrow -20\cdot k^2=20\ /:(-20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2=-1 \Rightarrow k^2=-1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow k_{1,2}=\pm i\ ,\ \text{nema realnih rješenja}.$$



2.inačica

Jednadžba pravca točkom T(8, 1) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1, y_1) = T(8, 1) \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = k \cdot (x - 8) \Rightarrow y - 1 = k \cdot x - 8 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = k \cdot x - 8 \cdot k + 1 \Rightarrow y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k.$$

Njegov koeficijent smjera je k.

Simetrala kuta je pravac kojem je svaka točka jednako udaljena od oba kraka kuta. Budući da dva pravca koji se sijeku određuju dva suplementarna kuta (zbroj dva kuta je 180º), dobit ćemo jednadžbe dvaju međusobno okomitih pravaca.

$$\left.\begin{array}{l} 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 0 \\ 9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42|}{\sqrt{7^2 + 6^2}} = \frac{|9 \cdot x + 2 \cdot y - 14|}{\sqrt{9^2 + 2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42|}{\sqrt{49 + 36}} = \frac{|9 \cdot x + 2 \cdot y - 14|}{\sqrt{81 + 4}} \Rightarrow \frac{|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42|}{\sqrt{85}} = \frac{|9 \cdot x + 2 \cdot y - 14|}{\sqrt{85}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42|}{\sqrt{85}} = \frac{|9 \cdot x + 2 \cdot y - 14|}{\sqrt{85}} \; / \cdot \sqrt{85} \Rightarrow |7 \cdot x + 6 \cdot y - 42| = |9 \cdot x + 2 \cdot y - 14|.$$

Jednadžba prve simetrale glasi:

$$|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42| = |9 \cdot x + 2 \cdot y - 14| \Rightarrow 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot y - 2 \cdot y = 9 \cdot x - 14 - 7 \cdot x + 42 \Rightarrow 4 \cdot y = 2 \cdot x + 28 \Rightarrow 4 \cdot y = 2 \cdot x + 28 \; /:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{4} \cdot x + 7 \Rightarrow y = \frac{2}{4} \cdot x + 7 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x + 7.$$

Koeficijent smjera je $k = \frac{1}{2}$.

Traženi pravac je okomit na tu simetralu pa njegov koeficijent smjera iznosi $k = -2$, a pripadna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k \\ k = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = -2 \cdot x + 1 - 8 \cdot (-2) \ \Rightarrow \ y = -2 \cdot x + 1 + 16 \ \Rightarrow \ y = -2 \cdot x + 17.$$

Jednadžba druge simetrale glasi:

$$|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42| = |9 \cdot x + 2 \cdot y - 14| \ \Rightarrow \ 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = -(9 \cdot x + 2 \cdot y - 14) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = -9 \cdot x - 2 \cdot y + 14 \ \Rightarrow \ 6 \cdot y + 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 - 7 \cdot x + 42 \ \Rightarrow$$

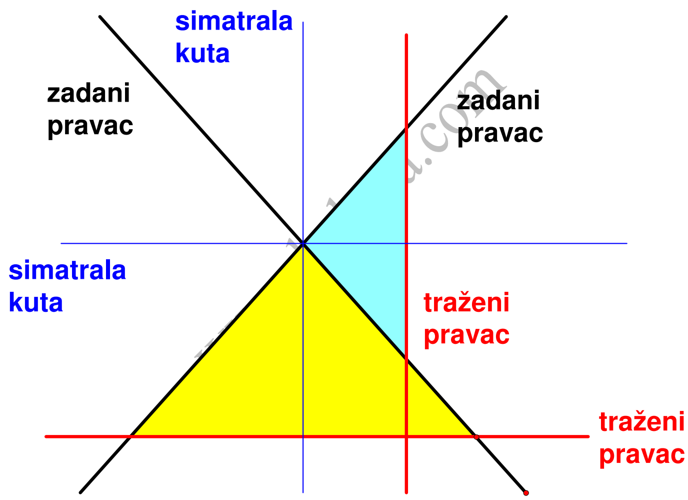
$$\Rightarrow \ 8 \cdot y = -16 \cdot x + 56 \ \Rightarrow \ 8 \cdot y = -16 \cdot x + 56 \ /: 8 \ \Rightarrow \ y = -2 \cdot x + 7.$$

Koeficijent smjera je $k = -2.$

Traženi pravac je okomit na tu simetralu pa njegov koeficijent smjera iznosi $k = \frac{1}{2},$ a pripadna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k \\ k = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y = \frac{1}{2} \cdot x - 3.$$



Vježba 147

Odredite jednadžbu pravca koji sadrži točku T(8, 1), a sa pravcima 7 · x + 6 · y = 42 i 9 · x + 2 · y = 14 zatvara jednakokračan trokut.

Rezultat: $y = -2 \cdot x + 17 \ , \ y = \frac{1}{2} \cdot x - 3.$

Zadatak 148 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu eksplicitnu jednadžbu pravca napišite u implicitnom i segmentnom obliku, ako je $y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5}.$

Rješenje 148

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \ / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot y = -20 \cdot x - 3 \Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y + 3 = 0.$$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \ / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot y = -20 \cdot x - 3 \Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y = -3 \ / : (-3) \Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{15 \cdot y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{15 \cdot y}{-3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{5 \cdot y}{-1} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{20}} + \frac{y}{-\frac{1}{5}} = 1.$$

Vježba 148

Danu eksplicitnu jednadžbu pravca napišite u implicitnom i segmentnom obliku, ako je $y = -\frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{3}$.

Rezultat: $9 \cdot x + 6 \cdot y + 2 = 0 \ , \ \frac{x}{-\frac{2}{9}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1.$

Zadatak 149 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu implicitnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i segmentnom obliku, ako je $2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0.$

Rješenje 149

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i

jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$$2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x + 6 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x + 6 \ /: (-3) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x - 2.$$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x - 3 \cdot y = 6 \Rightarrow 2 \cdot x - 3 \cdot y = 6 \ /: 6 \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{6} - \frac{3 \cdot y}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot x}{6} - \frac{3 \cdot y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Vježba 149

Danu implicitnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i segmentnom obliku, ako je $3 \cdot x - 2 \cdot y + 6 = 0.$

Rezultat: $y = \frac{3}{2} \cdot x + 3 \ , \ \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1.$

Zadatak 150 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu segmentnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i implicitnom obliku, ako je $\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1.$

Rješenje 150

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1 \ / \cdot (-10) \Rightarrow -5 \cdot x + 2 \cdot y = -10 \Rightarrow 2 \cdot y = 5 \cdot x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot y = 5 \cdot x - 10 \ /: 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot x - 5.$$

Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1 \; / \cdot 10 \Rightarrow 5 \cdot x-2 \cdot y=10 \Rightarrow 5 \cdot x-2 \cdot y-10=0.$$

Vježba 150

Danu segmentnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i implicitnom obliku, ako je $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$

Rezultat: $y=\frac{2}{3} \cdot x-2 \;, \; 2 \cdot x-3 \cdot y-6=0.$

Zadatak 151 (Marija, ekonomska škola)

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od 45°. Tada vrijedi jednakost:

$$A. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=2 \quad , \quad B. \left(1+k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=1$$

$$C. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1+k_2\right)=2 \quad , \quad D. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=-2$$

Rješenje 151

Ponovimo!

$$tg\, 45^{\circ}=1 \quad , \quad tg \frac{\pi}{4}=1 \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \quad , \quad a=b \;,\; c \in R \Rightarrow a+c=b+c.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k \cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Kut između pravaca

$$y=k_1 \cdot x+l_1 \quad , \quad y=k_2 \cdot x+l_2$$

računa se iz formule

$$tg\, \varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Budući da je $0 < k_1 < k_2$, slijedi:

$$tg\, 45^{\circ}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2} \Rightarrow 1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2} \Rightarrow k_2-k_1=1+k_1 \cdot k_2 \Rightarrow k_2-k_1=1+k_1 \cdot k_2 \; / +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+k_2-k_1=1+1+k_1 \cdot k_2 \Rightarrow 1+k_2-k_1=2+k_1 \cdot k_2 \Rightarrow 1+k_2-k_1-k_1 \cdot k_2=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-k_1+k_2-k_1 \cdot k_2=2 \Rightarrow \left(1-k_1\right)+k_2 \cdot \left(1-k_1\right)=2 \Rightarrow \left(1-k_1\right) \cdot \left(1+k_2\right)=2.$$

Odgovor je pod C.

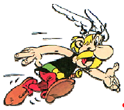
Vježba 151

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od $\frac{\pi}{4}$. Tada vrijedi jednakost:

$$A. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=2 \quad , \quad B. \left(1+k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=1$$

$$C. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1+k_2\right)=2 \quad , \quad D. \left(1-k_1\right) \cdot \left(1-k_2\right)=-2$$

Rezultat: C.

Zadatak 152 (, gimnazija)

Odredite sve vrijednosti realnog broja p za koje se pravci zadani jednadžbama $2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0$ i $p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0$ **ne sijeku**.

Rješenje 152

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \; n \neq 1.$$

Jednadžbe pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijente smjerova. Budući da se pravci ne sijeku, oni su usporedni. To znači da imaju jednake koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0 \\ p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \; / \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \; / \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet paralelnosti} \\ k_1 = k_2 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{p}{7} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \; / \cdot 7 \Rightarrow p = \frac{7}{2}.$$

Vježba 152

Odredite sve vrijednosti realnog broja p za koje se pravci zadani jednadžbama $2 \cdot x - 4 \cdot y - 3 = 0$ i $p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0$ ne sijeku.

Rezultat: $p = \frac{7}{2}.$

Zadatak 153 (Iva, gimnazija)

Zadan je pravac 5 + y – 2 · x = 0. Nađite sjecišta pravca s koordinatnim osima.

Rješenje 153

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Ako pravac ne prolazi ishodištem tada točka presjeka pravca s x – osi ima koordinate $S_1(x, 0)$, a točka presjeka pravca s y – osi ima koordinate $S_2(0, y)$.

Kada pravac siječe y – os vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 5 + y - 2 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + y - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 5 + y - 0 = 0 \Rightarrow 5 + y = 0 \Rightarrow y = -5.$$

Sjecište pravca i y – osi glasi:

$$S_1(0, -5).$$

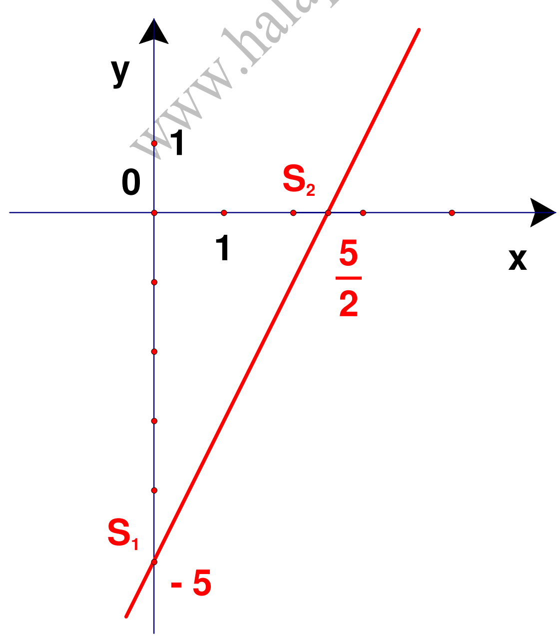
Kada pravac siječe x – os vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 5 + y - 2 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + 0 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow 5 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow -2 \cdot x = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot x = -5 \; / : (-2) \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Sjecište pravca i x – osi glasi:

$$S_2\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$



Vježba 153

Zadan je pravac 5 + y – x = 0. Nađite sjecišta pravca s koordinatnim osima.

Rezultat: $S_1(5, 0)$, $S_2(0, -5)$.

Zadatak 154 (Trnoružica, gimnazija)

Odredite sve vrijednosti realnog broja p za koje se pravci zadani jednadžbama $2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0$ i $p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0$ **ne sijeku**.

Rješenje 154

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Nazivnik razlomka ne smije niti jednak nuli.

$$\frac{a}{b}, \ a, b \in Z \quad , \quad b \neq 0.$$

1.inačica

Jednadžbe pravaca preoblikujemo u eksplicitne oblike kako bismo odredili koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0 \\ p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \ / : (-4) \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \ / : (-7) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{p}{7} \end{array}\right\}.$$

Zadani pravci neće se sjeći u ravnini ako su usporedni (paralelni), tj. ako su im jednaki koeficijenti smjerova.

$$k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{p}{7} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \ / \cdot 7 \Rightarrow p = \frac{7}{2}.$$

2.inačica

Sjecište pravaca može se naći rješavanjem sustava jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x-4\cdot y-5=0 \\ p\cdot x-7\cdot y+p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x-4\cdot y=5 \\ p\cdot x-7\cdot y=-p \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x-4\cdot y=5 \;/\cdot 7 \\ p\cdot x-7\cdot y=-p \;/\cdot(-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 14\cdot x-28\cdot y=35 \\ -4\cdot p\cdot x+28\cdot y=4\cdot p \end{array}\right\} \Rightarrow 14\cdot x-4\cdot p\cdot x=35+4\cdot p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (14-4\cdot p)\cdot x=35+4\cdot p \Rightarrow (14-4\cdot p)\cdot x=35+4\cdot p \;/\cdot\frac{1}{14-4\cdot p} \Rightarrow x=\frac{35+4\cdot p}{14-4\cdot p}.$$

Izračunamo p za koji x nije definiran tako da nazivnik izjednačimo s nulom.

$$14-4\cdot p=0 \Rightarrow -4\cdot p=-14 \Rightarrow -4\cdot p=-14 \;/:(-4) \Rightarrow p=\frac{14}{4} \Rightarrow p=\frac{14}{4} \Rightarrow p=\frac{7}{2}.$$

Vježba 154

Malo odmora!

Rezultat: Život je kompleksan. Ima svoj realan i imaginaran dio. ☺

Zadatak 155 (Josip, gimnazija)

Zadane su točke A(– 3, 1), B(1, – 3). Polovište dužine $\overline{AB}$ je na pravcu:

$A.\ y=-2\cdot x+1 \qquad B.\ y=2\cdot x+1 \qquad C.\ y=2\cdot x-5 \qquad D.\ y=-2\cdot x+5$

Rješenje 155

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x,y)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Nađemo koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,y_1)=A(-3,1) \\ B(x_2,y_2)=B(1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right] \Rightarrow P\left(\frac{-3+1}{2},\frac{1+(-3)}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-2}{2},\frac{1-3}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{-2}{2},\frac{-2}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{-2}{2},\frac{-2}{2}\right) \Rightarrow P(-1,-1).$$

Uvrštavanjem koordinata točke P u zadane jednadžbe dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y=-2\cdot x+1 \\ y=2\cdot x+1 \\ y=2\cdot x-5 \\ y=-2\cdot x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P(x,y)=P(-1,-1)\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1=-2\cdot(-1)+1 \\ -1=2\cdot(-1)+1 \\ -1=2\cdot(-1)-5 \\ -1=-2\cdot(-1)+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1=2+1 \\ -1=-2+1 \\ -1=-2-5 \\ -1=2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 \neq 3 \\ -1=-1 \text{ Točka P je na pravcu.} \\ -1 \neq -7 \\ -1 \neq 7 \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 155

Zadane su točke A(– 5, 2), B(3, – 4). Polovište dužine $\overline{AB}$ je na pravcu:

$A.\ y=-2\cdot x+1 \qquad B.\ y=2\cdot x+1 \qquad C.\ y=2\cdot x-5 \qquad D.\ y=-2\cdot x+5$

Rezultat: B.

Zadatak 156 (4B, TUPŠ, Tonka ☺ gimnazija)

Pravac p zadan je jednadžbom $y=\frac{1}{2}\cdot x+3.$ Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki T(4, y)?

$A.\ -3\cdot x+7\cdot y=-5 \qquad B.\ 3\cdot x-8\cdot y=-4 \qquad C.\ 3\cdot x-2\cdot y=2 \qquad D.\ x-3\cdot y=-4$

Rješenje 156

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ ,\ n\neq 0 \ ,\ n\neq 1.$$

Pravci se sijeku pa točka T pripada i jednom i drugom pravcu. Budući da točka T pripada pravcu $y=\frac{1}{2}\cdot x+3,$ njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca i tako izračunati ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ y) \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=2+3 \Rightarrow y=5.$$

Koordinate točke T glase:

$$T(x,\ y)=T(4,\ 5).$$

1.inačica

Točka T mora pripadati traženom pravcu koji siječe pravac p. Ispitajmo redom!

- $\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ 5) \\ -3\cdot x+7\cdot y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot 4+7\cdot 5=-5 \Rightarrow -12+35=-5 \Rightarrow 23\neq -5$ nije rješenje
- $\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ 5) \\ 3\cdot x-8\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 4-8\cdot 5=-4 \Rightarrow 12-40=-4 \Rightarrow -28\neq -4$ nije rješenje

- $\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ 5) \\ 3\cdot x-2\cdot y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 4-2\cdot 5=2 \Rightarrow 12-10=2 \Rightarrow 2=2$ je rješenje
- $\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ 5) \\ x-3\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4-3\cdot 5=-4 \Rightarrow 4-15=-4 \Rightarrow -11\neq -4$ nije rješenje.

Odgovor je pod C.

2.inačica

Točka T sjecište je pravca p i jednog od ponuđenih pravaca. Njezine koordinate bit će rješenja sustava jednadžba.

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ -3\cdot x+7\cdot y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow -3\cdot x+7\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3\cdot x+\frac{7}{2}\cdot x+21=-5 \Rightarrow -3\cdot x+\frac{7}{2}\cdot x+21=-5 \ /\cdot 2 \Rightarrow -6\cdot x+7\cdot x+42=-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cdot x+7\cdot x=-10-42 \Rightarrow x=-52.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-52 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-52)+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-52)+3 \Rightarrow y=-26+3 \Rightarrow y=-23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(-52,\ -23) \text{ nije rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ 3\cdot x-8\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x-8\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\cdot x-4\cdot x-24=-4 \Rightarrow 3\cdot x-4\cdot x=-4+24 \Rightarrow -x=20 \Rightarrow -x=20 \ /\cdot(-1) \Rightarrow x=-20.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-20 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-20)+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot(-20)+3 \Rightarrow y=-10+3 \Rightarrow y=-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(-20,\ -7) \text{ nije rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ 3\cdot x-2\cdot y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\cdot x-x-6=2 \Rightarrow 3\cdot x-x=2+6 \Rightarrow 2\cdot x=8 \Rightarrow 2\cdot x=8 \ /:2 \Rightarrow x=4.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 4+3 \Rightarrow y=2+3 \Rightarrow y=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,\ y)=T(4,\ 5) \text{ je rješenje}$$

- $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \\ x-3\cdot y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow x-3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\right)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ x-\frac{3}{2}\cdot x-9=-4\ \Rightarrow\ x-\frac{3}{2}\cdot x-9=-4\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2\cdot x-3\cdot x-18=-8\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x-3\cdot x=-8+18\ \Rightarrow\ -x=10\ \Rightarrow\ -x=10\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x=-10.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=-10 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+3 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\cdot(-10)+3\ \Rightarrow\ y=-5+3\ \Rightarrow\ y=-2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T(x,\ y)=T(-10,\ -2)\ \text{nije rješenje}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 156

Pravac p zadan je jednadžbom $y=\frac{3}{2}\cdot x-1.$ Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki T(4, y)?

$A.\ -3\cdot x+7\cdot y=-5$ $\qquad B.\ 3\cdot x-8\cdot y=-4$ $\qquad C.\ -x+2\cdot y=6$ $\qquad D.\ x-3\cdot y=-4$

Rezultat: C.

Zadatak 157 (Tea, srednja škola)

Poznato je da pravac $-2\cdot x+a\cdot y+4=0$ s koordinatnim osima zatvara trokut površine 4. Tada je a jednak:

$A.\ 1$ $\qquad B.\ 4$ $\qquad C.\ -2$ $\qquad D.\ -1$ $\qquad E.\ -4$

Rješenje 157

Ponovimo!

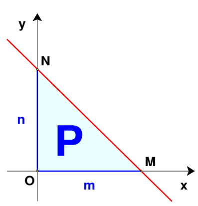
Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžbu pravca oblika

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$



nazivamo segmentnim oblikom jednadžbe pravca. Točke M(m, 0) i N(0, n) su presjeci tog pravca s koordinatnim osima. Brojevi m i n se nazivaju odsječci ili segmenti na osima. Površina pravokutnog trokuta OMN kojeg zatvaraju pravac

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

i koordinatne osi glasi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|m\cdot n|.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| = a \ , \ a > 0 \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = +a \\ x = -a \end{matrix}\right\} \quad , \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Preoblikujemo implicitni oblik jednadžbe pravca u segmentni oblik kako bismo odredili m i n.

$$-2 \cdot x + a \cdot y + 4 = 0 \ \Rightarrow \ -2 \cdot x + a \cdot y = -4 \ \Rightarrow \ -2 \cdot x + a \cdot y = -4 \ /:(-4) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{2 \cdot x}{4} + \frac{a \cdot y}{-4} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{2 \cdot x}{4} + \frac{a \cdot y}{-4} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{x}{2} + \frac{a \cdot y}{-4} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{x}{2} + \frac{y}{-\frac{4}{a}} = 1 \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} m = 2 \\ n = -\frac{4}{a} \end{matrix}\right\}.$$

Budući da pravac s koordinatnim osima zatvara trokut površine 4, slijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |m \cdot n| \ \Rightarrow \begin{bmatrix} P = 4 \\ m = 2 \\ n = -\frac{4}{a} \end{bmatrix} \Rightarrow \ 4 = \frac{1}{2} \cdot \left|2 \cdot \left(-\frac{4}{a}\right)\right| \ \Rightarrow \ 4 = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{a}\right| \ \Rightarrow \ 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{|a|} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{|a|} \ \Rightarrow \ 4 = \frac{4}{|a|} \ \Rightarrow \ 4 = \frac{4}{|a|} \ / \cdot \frac{|a|}{4} \ \Rightarrow |a| = 1 \ \Rightarrow \ a = \pm 1 \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = +1 \\ a = -1 \end{matrix}\right\}.$$

Odgovori su pod A i D.

Vježba 157

Poznato je da pravac $2 \cdot x - a \cdot y - 4 = 0$ s koordinatnim osima zatvara trokut površine 4. Tada je a jednak:

A. 1 *B.* 4 *C.* −2 *D.* −1 *E.* −4

Rezultat: A i D.

Zadatak 158 (Katarina, maturantica)

Odredite skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od pravca $3 \cdot x + 5 \cdot y - 1 = 0$ i od pravca $3 \cdot x + 5 \cdot y + 10 = 0$.

Rješenje 158

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$a > 0 \ \Rightarrow \ |a| = \left.\begin{matrix} -a \\ a \end{matrix}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ dana je formulom

$$d=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

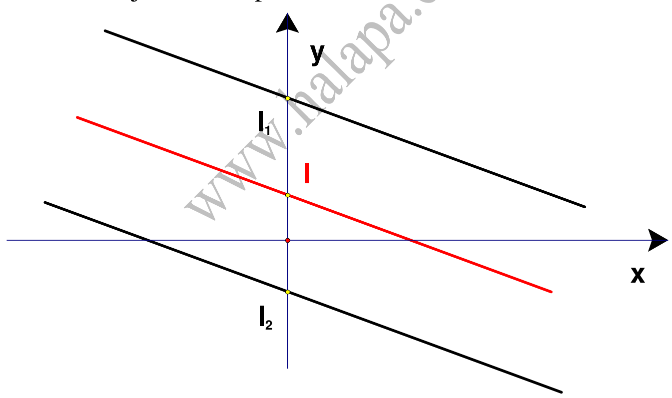
naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1\cdot x + l_1$, $y = k_2\cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od dva usporedna (paralelna) pravca je pravac usporedan s njima i jednako udaljen od oba pravca.



1.inačica

Jednadžbe zadanih pravaca preoblikujemo u eksplicitni oblik.

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot x+5\cdot y-1=0\\3\cdot x+5\cdot y+10=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5\cdot y=-3\cdot x+1\\5\cdot y=-3\cdot x-10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5\cdot y=-3\cdot x+1\ /:5\\5\cdot y=-3\cdot x-10\ /:5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{1}{5}\\y=-\frac{3}{5}\cdot x-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k_1=-\frac{3}{5}\ ,\ l_1=\frac{1}{5}\\k_2=-\frac{3}{5}\ ,\ l_2=-2\end{array}\right\}.$$

Pravci su usporedni (imaju jednake koeficijente smjerova) pa je i traženi pravac s njima usporedan i ima jednaki koeficijent smjera

$$k=-\frac{3}{5}.$$

Njegov odsječak l na y osi je aritmetička sredina odsječaka l_1 i l_2.

$$l=\frac{1}{2}\cdot(l_1+l_2)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}l_1=\frac{1}{5}\\ l_2=-2\end{array}\right]\Rightarrow l=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-2\right)\Rightarrow l=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-10}{5}\Rightarrow l=\frac{1}{2}\cdot\frac{-9}{5}\Rightarrow l=-\frac{9}{10}.$$

Jednadžba traženog pravca glasi:

$$y=k\cdot x+l\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-\frac{3}{5}\\ l=-\frac{9}{10}\end{array}\right]\Rightarrow y=-\frac{3}{5}\cdot x-\frac{9}{10}\Rightarrow y=-\frac{3}{5}\cdot x-\frac{9}{10}\ /\cdot 10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot y=-6\cdot x-9\Rightarrow 6\cdot x+10\cdot y+9=0.$$

2.inačica

Neka je $T(x_0, y_0)$ po volji odabrana točka jednako udaljena od pravaca. Udaljenost točke T od:

- prvog pravca jednaka je

$$\left.\begin{array}{l}T(x,y)=T(x_\circ,y_\circ)\\ 3\cdot x+5\cdot y-1=0\\ A=3\ ,\ B=5\ ,\ C=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left[d_1=\frac{|A\cdot x_\circ+B\cdot y_\circ+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]\Rightarrow d_1=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1|}{\sqrt{3^2+5^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1|}{\sqrt{34}}$$

- drugog pravca jednaka je

$$\left.\begin{array}{l}T(x,y)=T(x_\circ,y_\circ)\\ 3\cdot x+5\cdot y+10=0\\ A=3\ ,\ B=5\ ,\ C=10\end{array}\right\}\Rightarrow\left[d_2=\frac{|A\cdot x_\circ+B\cdot y_\circ+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]\Rightarrow d_2=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10|}{\sqrt{3^2+5^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10|}{\sqrt{34}}.$$

Udaljenosti d_1 i d_2 moraju biti međusobno jednake.

$$d_1=d_2\Rightarrow\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1|}{\sqrt{34}}=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10|}{\sqrt{34}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1|}{\sqrt{34}}=\frac{|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10|}{\sqrt{34}}\ /\cdot\sqrt{34}\Rightarrow|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1|=|3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1=3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10\\ 3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1=-(3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1=3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10\\ 3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ-1+3\cdot x_\circ+5\cdot y_\circ+10=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-1=10\ \text{nema smisla}\\ 6\cdot x_\circ+10\cdot y_\circ+9=0\end{array}\right\}\Rightarrow 6\cdot x_\circ+10\cdot y_\circ+9=0.$$

Budući da je točka T odabrana po volji, traženi skup točaka u ravnini je pravac čija jednadžba glasi:

$$6\cdot x+10\cdot y+9=0.$$

Vježba 158

Odredite skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od pravca $3 \cdot x + 5 \cdot y = 1$ i od pravca $3 \cdot x + 5 \cdot y = -10$.

Rezultat: $6 \cdot x + 10 \cdot y + 9 = 0.$

Zadatak 159 (Katarina, maturantica)

Dužina $\overline{AB}$, počevši od točke A, podijeljena je redom točkama C, D i E na četiri dijela jednakih duljina. Ako su A(5, – 1) i B(– 2, 3), koje su koordinate točke E?

Rješenje 159

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n.$$

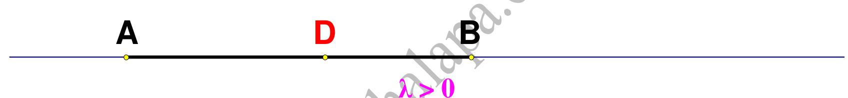
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

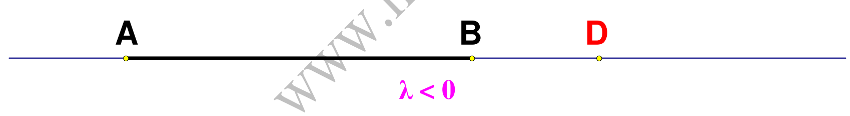
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

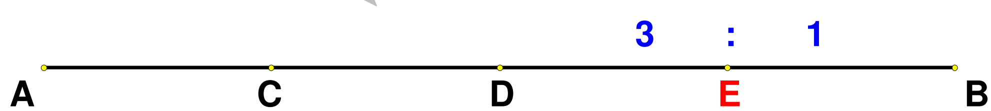
Neka je $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i djelišna točka $D(x_0, y_0)$ i $\lambda \neq 0$ omjer dijeljenja. Koordinate djelišne točke glase

$$x_\circ = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \qquad , \qquad y_\circ = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda},$$

pri čemu treba imati na umu da dijeljenje iznutra podrazumijeva $\lambda > 0$, a dijeljenje izvana $\lambda < 0$.







Sa slike vidi se da točka E dijeli iznutra dužinu $\overline{AB}$ u omjeru

$$\lambda = \frac{3}{1} \Rightarrow \lambda = 3.$$

Računamo koordinate točke E.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(5, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(-2, 3) \\ \lambda = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_\circ = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \\ y_\circ = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\circ = \dfrac{5 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3} \\ y_\circ = \dfrac{-1 + 3 \cdot 3}{1 + 3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\circ = \dfrac{5 - 6}{4} \\ y_\circ = \dfrac{-1 + 9}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\circ = -\dfrac{1}{4} \\ y_\circ = \dfrac{8}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\circ = -\dfrac{1}{4} \\ y_\circ = \dfrac{8}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\circ = -\dfrac{1}{4} \\ y_\circ = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow E(x_\circ, y_\circ) = E\left(-\frac{1}{4}, 2\right).$$

Vježba 159

Dužina $\overline{AB}$, počevši od točke A, podijeljena je redom točkama C, D i E na četiri dijela jednakih duljina. Ako su A(5, – 1) i B(– 2, 3), koje su koordinate točke D?

Rezultat: $D\left(\frac{3}{2}, 1\right).$

Zadatak 160 (Katarina, maturantica)

Pravac p prolazi kroz ishodište koordinatnoga sustava i paralelan je s pravcem x – 2 · y + 3 = 0. Kroz koju od navedenih točaka prolazi pravac p?

$$A. \ (-5, 10) \qquad B. \ (5, 10) \qquad C. \ (10, -5) \qquad D. \ (10, 5)$$

Rješenje 160

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Graf linearne funkcije f(x) = k · x je pravac jednadžbe y = k · x. Taj pravac prolazi ishodištem.
Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžbu zadanog pravca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijent smjera.

$$x - 2 \cdot y + 3 = 0 \ \Rightarrow \ -2 \cdot y = -x - 3 \ \Rightarrow \ -2 \cdot y = -x - 3 \ /:(-2) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ k = \frac{1}{2}.$$

Traženi pravac glasi:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x.$$

Ispitajmo koja od navedenih točaka pripada tom pravcu. Uvrstimo koordinate točke u njegovu jednadžbu!
Prva točka

$$(x, \ y) = (-5, 10) \ \Rightarrow \ \left[\ y = \frac{1}{2} \cdot x \ \right] \ \Rightarrow \ 10 = \frac{1}{2} \cdot (-5) \ \Rightarrow \ 10 \neq -\frac{5}{2} \ NE$$

Druga točka

$$(x, \ y) = (5, 10) \ \Rightarrow \ \left[\ y = \frac{1}{2} \cdot x \ \right] \ \Rightarrow \ 10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \ \Rightarrow \ 10 \neq \frac{5}{2} \ NE$$

Treća točka

$$\left(x,\ y\right)=\left(10,\ -5\right)\ \Rightarrow\ \left[\ y=\frac{1}{2}\cdot x\ \right]\Rightarrow\ -5=\frac{1}{2}\cdot 10\ \Rightarrow\ -5=\frac{1}{2}\cdot 10\ \Rightarrow\ -5\neq 5\ \textit{NE}$$

Četvrta točka

$$\left(x,\ y\right)=\left(10,\ 5\right)\ \Rightarrow\ \left[\ y=\frac{1}{2}\cdot x\ \right]\Rightarrow\ 5=\frac{1}{2}\cdot 10\ \Rightarrow\ 5=\frac{1}{2}\cdot 10\ \Rightarrow\ 5=5\ \textit{DAAA.}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 160

Odmor!

Rezultat: …