Zadatak 121 (Antun, srednja škola)

Izvedi segmentnu jednadžbu pravca tako da iskoristiš jednadžbu pravca kroz dvije točke, $M(m, 0)$ i $N(0, n)$.

Rješenje 121

Ponovimo!

Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \quad , \quad a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

$$\left.\begin{aligned} &M(x_1, y_1) = M(m, 0) \\ &N(x_2, y_2) = N(0, n) \\ &y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{n - 0}{0 - m} \cdot (x - m) \Rightarrow y = \frac{n}{-m} \cdot (x - m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{n}{m} \cdot (x - m) \Rightarrow y = -\frac{n}{m} \cdot x + n \Rightarrow y + \frac{n}{m} \cdot x = n \Rightarrow \frac{n}{m} \cdot x + y = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m} \cdot x + y = n \; / \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Vježba 121

Izvedi segmentnu jednadžbu pravca tako da iskoristiš jednadžbu pravca kroz dvije točke, $M(m, 0)$ i $N(0, -n)$.

Rezultat: $\frac{x}{m} + \frac{y}{-n} = 1.$

Zadatak 122 (Matea, veleučilište)

Odredi kut među ravninama: $x + 2 \cdot y + 2 = 0$, $2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 0$.

Rješenje 122

Ponovimo!

$$\cos 90^0 = 0 \quad , \quad \frac{0}{n} = 0 \; , \; n \neq 0.$$

Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.
Kut φ između dviju ravnina

www.halapa.com

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

računa se po formuli

$$\cos\varphi = \frac{\left| A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Odredimo koeficijente A, B i C zadanih ravnina:

- $x + 2 \cdot y + 2 = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot y + 0 \cdot z + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1 = 1 \\ B_1 = 2 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\}$

- $2 \cdot x - y + 2 \cdot z = 0 \Rightarrow 2 \cdot x - y + 2 \cdot z + 0 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_2 = 2 \\ B_2 = -1 \\ C_2 = 2 \end{array}\right\}.$

Kut među ravninama iznosi:

$$\cos\varphi = \frac{\left| A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left| 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 4}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0 \Rightarrow \varphi = 90^0.$$

Vježba 122

Odredi kut među ravninama: $x + y + 2 \cdot z - 3 = 0$, $2 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z + 3 = 0$.

Rezultat: 90°.

Zadatak 123 (Matea, veleučilište)

Odredi odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0$.

Rješenje 123

Ponovimo!

Segmentni oblik jednadžbe ravnine glasi

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

gdje su p, q i r segmenti, realni brojevi. Njihove apsolutne vrijednosti jednake su duljinama odrezaka ravnine na koordinatnim osima.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

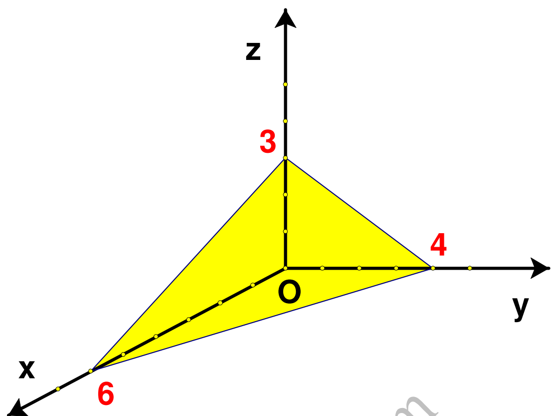
www.halapa.com

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;\;,\;\; n \neq 0 \;\;,\;\; n \neq 1.$$

Preoblikujemo opću jednadžbu ravnine u segmentni oblik.

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z = 12 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z = 12 \;/ \cdot \frac{1}{12} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot x}{12} + \frac{3 \cdot y}{12} + \frac{4 \cdot z}{12} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot x}{12} + \frac{3 \cdot y}{12} + \frac{4 \cdot z}{12} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} p = 6 \\ q = 4 \\ r = 3 \end{matrix}\right\}.$$



Vježba 123

Odredi odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina 2 · x + 4 · y – 3 · z – 12 = 0.

Rezultat: p = 6, q = 3, r = – 4 .

www.halapa.com

Zadatak 124 (Miro, gimnazija)

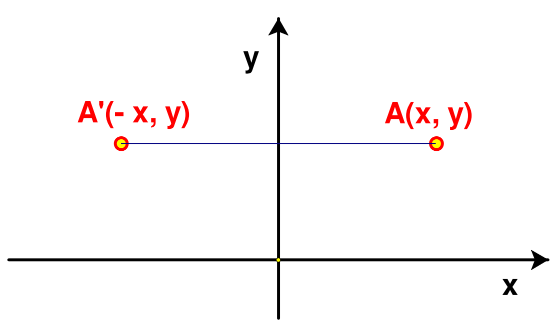
Pravac p je usporedan s osi y i prolazi točkom T(– 2, 3). Odredite jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu p s obzirom na os y.

Rješenje 124

Ponovimo!

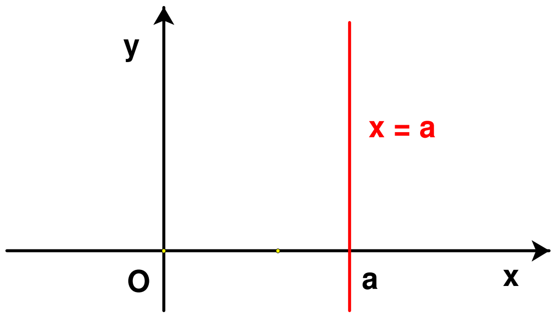
Uređenu trojku (O, x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevni pravci s istim ishodištem nazivamo pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Točka O zove se ishodište. Za pravac x koristimo nazive apscisna os, os apscisa, prva koordinatna os, x – os. Za pravac y koristimo nazive ordinatna os, os ordinata, druga koordinatna os, y – os. Svakoj točki T ravnine pridružen je jedan i samo jedan par realnih brojeva (x, y). Broj x zove se apscisa točke T, a broj y ordinata točke T. Točku T poistovjećujemo s njoj pridruženim uređenim parom (x, y) i pišemo T = (x, y) ili T(x, y).

Ako je zadana točka A(x, y) njoj simetrična točka s obzirom na os y ima koordinate A' (– x , y).



Pravac usporedan s osi y ima jednadžbu

$$x = a \;\;,\;\; a \in R.$$

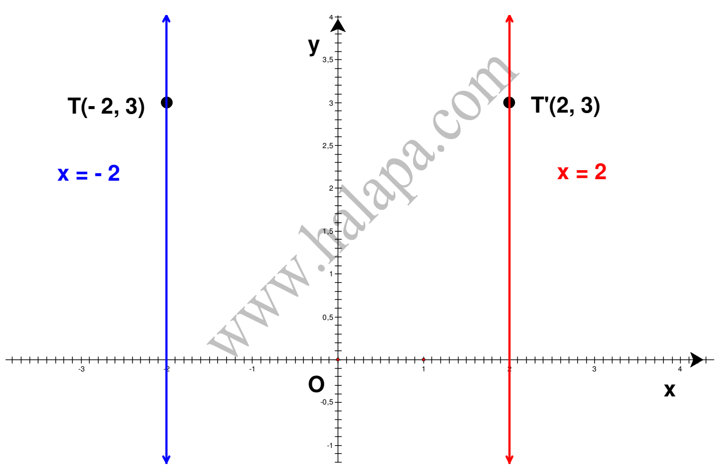


Slovom q označimo traženi pravac. On je također usporedan s osi y i prolazi točkom T ' koja je simetrična zadanoj točki T s obzirom na os y. Budući da točka T ima koordinate T(– 2, 3), njoj simetrična točka s obzirom na os y ima koordinate T ' (2, 3). Kako napisati jednadžbu pravca q koji prolazi točkom T ' i usporedan je s osi y? Njegova opća jednadžba glasi x = a pri čemu je a realan broj. Konkretnu vrijednost broja a u ovom ćemo slučaju dobiti uvrstimo li koordinate točke T ' u jednakost x = a.

$$\left.\begin{array}{l} T'(x,\ y) = T'(2,\ 3) \\ x = a \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 = a\ \Rightarrow\ a = 2.$$

Jednadžba pravca q glasi

$$x = 2.$$



Vježba 124

Pravac p je usporedan s osi y i prolazi točkom T(– 5, 7). Odredite jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu p s obzirom na os y.

Rezultat: x = 5.

Zadatak 125 (Pavle, gimnazija)

Odredi jednadžbu pravca čiji odsječak između zadanih pravaca 2 · x – y – 2 = 0 i x + y + 3 = 0 ima središte u točki P(3, 0).

Rješenje 125

Ponovimo!

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) su

$$P(x,\ y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se

koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Neka točka $A(x_1, y_1)$ pripada pravcu $2 \cdot x - y - 2 = 0$. Tada je:

$$2\cdot x_1-y_1-2=0.$$

Neka točka $B(x_2, y_2)$ pripada pravcu $x + y + 3 = 0$. Tada je:

$$x_2+y_2+3=0.$$

Budući da je točka P polovište dužine $\overline{AB}$, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1)=A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2)=B(x_2, y_2) \\ P(x, y)=P(3, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=\frac{x_1+x_2}{2} \\ 0=\frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x_1+x_2}{2}=3 \\ \frac{y_1+y_2}{2}=0 \end{array}\right\}.$$

Postavimo sustav od četiri jednadžbe koji preoblikujemo na dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_1+x_2}{2}=3 \\ \frac{y_1+y_2}{2}=0 \\ 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ x_2+y_2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x_1+x_2}{2}=3 \ /\cdot 2 \\ \frac{y_1+y_2}{2}=0 \ /\cdot 2 \\ 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ x_2+y_2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=6 \\ y_1+y_2=0 \\ 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ x_2+y_2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=6-x_1 \\ y_2=-y_1 \\ 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ x_2+y_2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ 6-x_1-y_1+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1-y_1-2=0 \\ -x_1-y_1+9=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1-y_1=2 \\ -x_1-y_1=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1-y_1=2 \\ -x_1-y_1=-9 \ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_1-y_1=2 \\ x_1+y_1=9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x_1=11 \Rightarrow 3\cdot x_1=11 \ /:3 \Rightarrow x_1=\frac{11}{3}.$$

Računamo y_1.

www.halapa.com

$$\left.\begin{array}{l} x_1+y_1=9 \\ x_1=\frac{11}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{3}+y_1=9 \Rightarrow y_1=9-\frac{11}{3} \Rightarrow y_1=\frac{9}{1}-\frac{11}{3} \Rightarrow y_1=\frac{27-11}{3} \Rightarrow y_1=\frac{16}{3}.$$

Koordinate točke A glase:

$$A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(\frac{11}{3},\ \frac{16}{3}\right).$$

Računamo koordinate točke B.

$$\left.\begin{array}{l} x_2=6-x_1 \\ y_2=-y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{11}{3} \\ y_1=\frac{16}{3}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=6-\frac{11}{3} \\ y_2=-\frac{16}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\frac{6}{1}-\frac{11}{3} \\ y_2=-\frac{16}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\frac{18-11}{3} \\ y_2=-\frac{16}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\frac{7}{3} \\ y_2=-\frac{16}{3}\end{array}\right\}.$$

Koordinate točke B glase:

$$B\left(x_2,\ y_2\right)=B\left(\frac{7}{3},\ -\frac{16}{3}\right).$$

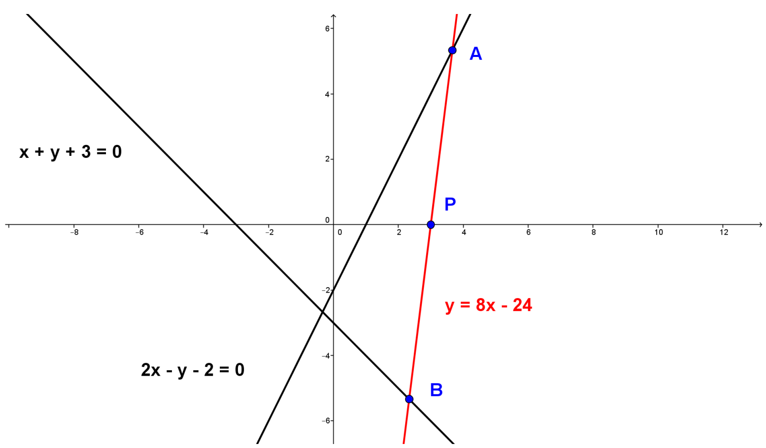
Tražena jednadžba pravca je jednadžba kroz dvije točke A i B.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(\frac{11}{3},\ \frac{16}{3}\right) \\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B\left(\frac{7}{3},\ -\frac{16}{3}\right) \\ y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right)\end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{16}{3}=\frac{-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}}{\frac{7}{3}-\frac{11}{3}}\cdot\left(x-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow y-\frac{16}{3}=\frac{-\frac{32}{3}}{-\frac{4}{3}}\cdot\left(x-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow y-\frac{16}{3}=\frac{-\frac{32}{3}}{-\frac{4}{3}}\cdot\left(x-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow y-\frac{16}{3}=\frac{\frac{8}{1}}{\frac{1}{1}}\cdot\left(x-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow y-\frac{16}{3}=8\cdot\left(x-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-\frac{16}{3}=8\cdot x-\frac{88}{3} \Rightarrow y=8\cdot x-\frac{88}{3}+\frac{16}{3} \Rightarrow y=8\cdot x-\frac{72}{3} \Rightarrow y=8\cdot x-\frac{72}{3} \Rightarrow y=8\cdot x-24.$$



Vježba 125

Odredi jednadžbu pravca čiji odsječak između zadanih pravaca y = 2 · x – 2 = 0 i y = – x – 3 ima središte u točki P(3, 0).

Rezultat: $y=8\cdot x-24.$

Zadatak 126 (Robert, gimnazija)

Na pravcu y = x + 2 odredi točku jednako udaljenu od pravaca y = 7 · x – 11 i y = – x + 5.

Rješenje 126

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

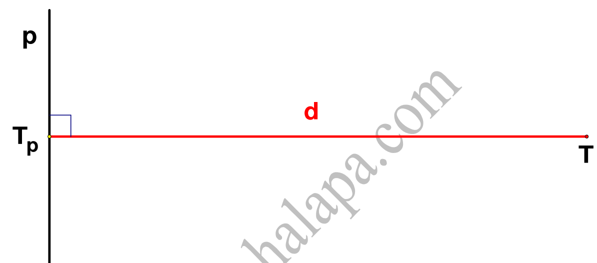
naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... A · x + B · y + C = 0 dana je formulom

$$d = \frac{\left| A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Udaljenost točke T od pravca p je udaljenost između točaka T i T_p pri čemu je T_p nožište okomice iz točke T na pravac p.



www.halapa.com

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \ne 0 \quad , \quad n \ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad |a| = |b| \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = b \\ a = -b \end{matrix}\right\} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Odaberemo po volji točku T koja pripada pravcu y = x + 2. Njezine koordinate glase:

$$T(x, y) = T(x, x + 2).$$

Zadane pravce y = 7 · x – 11 i y = – x + 5 napišemo u implicitnom obliku.

$$\left.\begin{matrix} y = 7 \cdot x - 11 \\ y = -x + 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -7 \cdot x + y + 11 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -7 \cdot x + y + 11 = 0 \; / \cdot (-1) \\ x + y - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7 \cdot x - y - 11 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo:

- udaljenost točke T od pravca 7 · x – y – 11 = 0

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ y_0\right)=T(x,\ x+2) \\ 7\cdot x-y-11=0 \\ A=7\ ,\ B=-1\ ,\ C=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d_1=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right] \Rightarrow d_1=\frac{\left|7\cdot x-1\cdot(x+2)-11\right|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1=\frac{\left|7\cdot x-x-2-11\right|}{\sqrt{49+1}} \Rightarrow d_1=\frac{\left|6\cdot x-13\right|}{\sqrt{50}} \Rightarrow d_1=\frac{\left|6\cdot x-13\right|}{\sqrt{25\cdot 2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1=\frac{\left|6\cdot x-13\right|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow d_1=\frac{\left|6\cdot x-13\right|}{5\cdot\sqrt{2}}$$

- udaljenost točke T od pravca x + y – 5 = 0

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ y_0\right)=T(x,\ x+2) \\ x+y-5=0 \\ A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d_2=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right] \Rightarrow d_2=\frac{\left|1\cdot x+1\cdot(x+2)-5\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2=\frac{\left|x+x+2-5\right|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow d_2=\frac{\left|2\cdot x-3\right|}{\sqrt{2}}.$$

Budući da točka T mora biti jednako udaljena od pravaca y = 7 · x – 11 i y = – x + 5, slijedi:

$$d_1=d_2 \Rightarrow \frac{\left|6\cdot x-13\right|}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{\left|2\cdot x-3\right|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\left|6\cdot x-13\right|}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{\left|2\cdot x-3\right|}{\sqrt{2}}\ /\cdot 5\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|6\cdot x-13\right|=5\cdot\left|2\cdot x-3\right|.$$

Jednadžba s apsolutnim vrijednostima ima dva rješenja.

$$\left|6\cdot x-13\right|=5\cdot\left|2\cdot x-3\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\cdot x-13=5\cdot(2\cdot x-3) \\ 6\cdot x-13=5\cdot(-(2\cdot x-3)) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\cdot x-13=10\cdot x-15 \\ 6\cdot x-13=-10\cdot x+15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\cdot x-10\cdot x=-15+13 \\ 6\cdot x+10\cdot x=15+13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot x=-2 \\ 16\cdot x=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot x=-2\ /:(-4) \\ 16\cdot x=28\ /:16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{2}{4} \\ x=\frac{28}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{2}{4} \\ x=\frac{28}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{7}{4} \end{array}\right\}.$$

Postoje dvije točke:

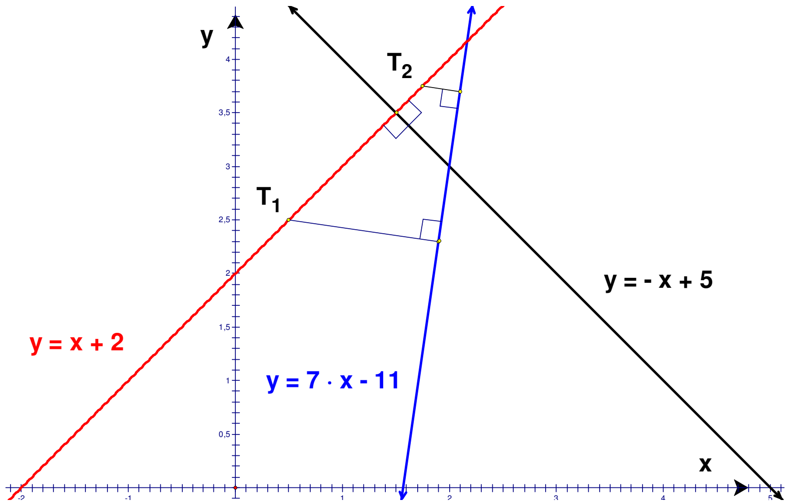
- $$\left.\begin{array}{l} T_1(x,\ y)=T_1(x,\ x+2) \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow T_1(x,\ y)=T_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+2\right) \Rightarrow T_1(x,\ y)=T_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(x,\ y)=T_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1+4}{2}\right) \Rightarrow T_1(x,\ y)=T_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

www.halapa.com

$$\bullet \quad \left.\begin{array}{l} T_2(x, y) = T_2(x, x+2) \\ x = \frac{7}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow T_2(x, y) = T_2\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}+2\right) \Rightarrow T_2(x, y) = T_2\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}+\frac{2}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2(x, y) = T_2\left(\frac{7}{4}, \frac{7+8}{4}\right) \Rightarrow T_2(x, y) = T_2\left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right).$$



Vježba 126

Na pravcu x – y + 2 = 0 odredi točku jednako udaljenu od pravaca y = 7 · x – 11 i y = – x + 5.

Rezultat: $T_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), T_2\left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right).$

www.halapa.com

Zadatak 127 (Tomislav, gimnazija)

Odredi parametar m tako da pravci (m + 1) · x + (2 · m – 1) · y + m = 0 i 6 · x – 4 · y + 1 = 0 budu:

a) usporedni (paralelni)

b) okomiti.

Rješenje 127

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžbe pravaca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} (m+1) \cdot x + (2 \cdot m - 1) \cdot y + m = 0 \\ 6 \cdot x - 4 \cdot y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2 \cdot m - 1) \cdot y = -(m+1) \cdot x - m \\ -4 \cdot y = -6 \cdot x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2 \cdot m - 1) \cdot y = -(m+1) \cdot x - m \;/ \cdot \dfrac{1}{2 \cdot m - 1} \\ -4 \cdot y = -6 \cdot x - 1 \;/ \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{m+1}{2 \cdot m - 1} \cdot x - \dfrac{m}{2 \cdot m - 1} \\ y = \dfrac{6}{4} \cdot x + \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{m+1}{2 \cdot m - 1} \cdot x - \dfrac{m}{2 \cdot m - 1} \\ y = \dfrac{6}{4} \cdot x + \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{m+1}{2 \cdot m - 1} \cdot x - \dfrac{m}{2 \cdot m - 1} \\ y = \dfrac{3}{2} \cdot x + \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = -\dfrac{m+1}{2 \cdot m - 1} \\ k_2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}.$$

a)
Kada su pravci usporedni (paralelni) vrijedi:

$$k_1 = k_2 \;\Rightarrow\; -\frac{m+1}{2 \cdot m - 1} = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{m+1}{2 \cdot m - 1} = \frac{3}{2} \;/ \cdot 2 \cdot (2 \cdot m - 1) \;\Rightarrow\; -2 \cdot (m+1) = 3 \cdot (2 \cdot m - 1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -2 \cdot m - 2 = 6 \cdot m - 3 \;\Rightarrow\; -2 \cdot m - 6 \cdot m = -3 + 2 \;\Rightarrow\; -8 \cdot m = -1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -8 \cdot m = -1 \;/ : (-8) \;\Rightarrow\; m = \frac{1}{8}.$$

b)
Kada su pravci okomiti vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{m+1}{2 \cdot m - 1} \cdot \frac{3}{2} = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{3 \cdot (m+1)}{2 \cdot (2 \cdot m - 1)} = -1 \;\Rightarrow\; -\frac{3 \cdot (m+1)}{2 \cdot (2 \cdot m - 1)} = -1 \;/ \cdot (-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{3 \cdot (m+1)}{2 \cdot (2 \cdot m - 1)} = 1 \;\Rightarrow\; 3 \cdot (m+1) = 2 \cdot (2 \cdot m - 1) \;\Rightarrow\; 3 \cdot m + 3 = 4 \cdot m - 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot m - 4 \cdot m = -2 - 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -m = -5 \;\Rightarrow\; -m = -5 \;/ \cdot (-1) \;\Rightarrow\; m = 5.$$

Vježba 127

Odredi parametar m tako da pravci $(m + 1) \cdot x - (1 - 2 \cdot m) \cdot y + m = 0$ i $6 \cdot x - 4 \cdot y + 1 = 0$ budu:

www.halapa.com

a) usporedni (paralelni)
b) okomiti.

Rezultat: $a)\ m = \frac{1}{8}\ ,\ b)\ m = 5.$

Zadatak 128 (Lucija, gimnazija)

Prikaži grafički skup svih točaka ravnine za čije koordinate x i y vrijedi $(x+1)^2 = (y-1)^2$.

Rješenje 128

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \ \Leftrightarrow\ a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k\cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Preoblikujemo danu jednadžbu tako da je zapišemo u obliku

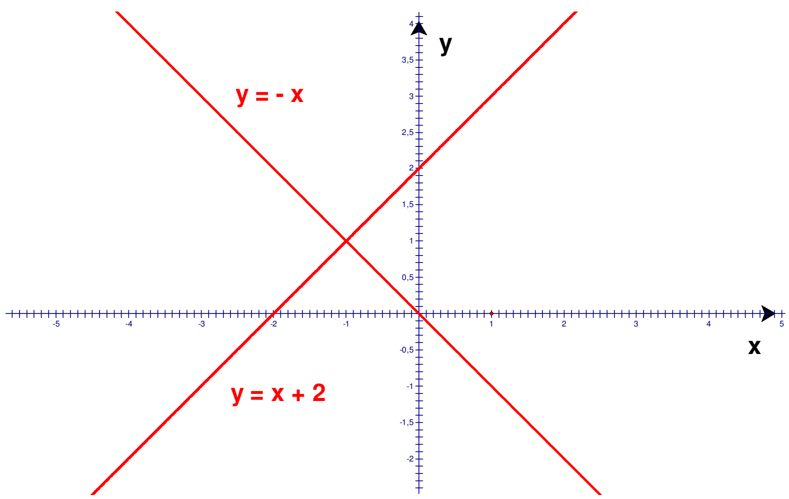
$$(x+1)^2 = (y-1)^2 \ \Rightarrow\ (x+1)^2 - (y-1)^2 = 0 \ \Rightarrow\ ((x+1)-(y-1))\cdot((x+1)+(y-1)) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+1-y+1)\cdot(x+1+y-1) = 0 \ \Rightarrow\ (x-y+2)\cdot(x+1+y-1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x-y+2)\cdot(x+y) = 0 \ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y=-x-2 \\ y=-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} -y=-x-2 \ /\cdot(-1) \\ y=-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=-x \end{array}\right\}.$$

Unija ovih dvaju pravaca je skup koji je valjalo odrediti.



Vježba 128

Prikaži grafički skup svih točaka ravnine za čije koordinate x i y vrijedi $(x+1)^2 = (y+1)^2$.

Rezultat: $y = x\ ,\ y = -x-2.$

www.halapa.com

Zadatak 129 (Damira, srednja škola)

Kolika je vrijednost izraza $S = a^2 + b^2$ ako su a i b brojevi za koje se pravci $a \cdot x + 2 \cdot y + 1 = 0$ i $3 \cdot x + b \cdot y - 2 = 0$ sijeku u točki (1, 1)?

$A.\ S = 9 \qquad B.\ S = 17 \qquad C.\ S = 25 \qquad D.\ S = 10$

Rješenje 129

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Budući da se pravci $a \cdot x + 2 \cdot y + 1 = 0$ i $3 \cdot x + b \cdot y - 2 = 0$ sijeku u točki (1, 1), njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbe pravaca.

$$\left.\begin{array}{l}(x,\ y) = (1,\ 1) \\ a \cdot x + 2 \cdot y + 1 = 0 \\ 3 \cdot x + b \cdot y - 2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ 3 \cdot 1 + b \cdot 1 - 2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a + 2 + 1 = 0 \\ 3 + b - 2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a = -2 - 1 \\ b = -3 + 2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a = -3 \\ b = -1\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l}a = -3\ ,\ b = -1 \\ S = a^2 + b^2\end{array}\right\} \Rightarrow S = (-3)^2 + (-1)^2 \Rightarrow S = 9 + 1 \Rightarrow S = 10.$$

Odgovor je pod D

Vježba 129

Kolika je vrijednost izraza $S = a^3 + b^3$ ako su a i b brojevi za koje se pravci $a \cdot x + 2 \cdot y + 1 = 0$ i $3 \cdot x + b \cdot y - 2 = 0$ sijeku u točki (1, 1)?

$A.\ S = -9 \qquad B.\ S = -28 \qquad C.\ S = -26 \qquad D.\ S = 28$

Rezultat: B.

www.halapa.com

Zadatak 130 (Branimir, gimnazija)

Vrijednost broja k za koju pravac $k \cdot x + (k - 1) \cdot y - 3 = 0$ ima triput veći odsječak na osi Oy nego na osi Ox je:

$A.\ -\frac{1}{2} \qquad B.\ \frac{3}{2} \qquad C.\ \frac{1}{3} \qquad D.\ \frac{2}{3}$

Rješenje 130

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Kako zapisati "broj b je n puta veći od broja a"?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Jednadžbu pravca preoblikujemo u segmentni oblik.

$$k\cdot x+(k-1)\cdot y-3=0 \Rightarrow k\cdot x+(k-1)\cdot y=3 \Rightarrow k\cdot x+(k-1)\cdot y=3 \ /:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k\cdot x}{3}+\frac{(k-1)\cdot y}{3}=1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{k}}+\frac{y}{\frac{3}{k-1}}=1.$$

Odsječak na osi:

- Ox je $\frac{3}{k}$
- Oy je $\frac{3}{k-1}$.

Budući da pravac ima tri puta veći odsječak na osi Oy nego na osi Ox, vrijedi:

$$\frac{3}{k-1}=3\cdot\frac{3}{k} \Rightarrow \frac{3}{k-1}=\frac{9}{k} \Rightarrow \frac{3}{k-1}=\frac{9}{k} \ /\cdot k\cdot(k-1) \Rightarrow 3\cdot k=9\cdot(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot k=9\cdot k-9 \Rightarrow 3\cdot k-9\cdot k=-9 \Rightarrow -6\cdot k=-9 \Rightarrow -6\cdot k=-9 \ /:(-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{9}{6} \Rightarrow k=\frac{9}{6} \Rightarrow k=\frac{3}{2}.$$

Odgovor je pod B

Vježba 130

Vrijednost broja k za koju pravac k · x + (k – 1) · y – 3 = 0 ima dvaput veći odsječak na osi Oy nego na osi Ox je:

$$A.\ 2 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ \frac{1}{2} \qquad D.\ \frac{2}{3}$$

Rezultat: A.

Zadatak 131 (Zoran, srednja škola)

Zadani su pravci $p_1 \equiv y - x = 0$ i $p_2 \equiv y + 2\cdot x = 0$. Jednadžba pravca p_3 koji ima svojstvo da čitav leži u gornjoj poluravnini, $y \geq 0$, i da površina trokuta određenog pravcima p_1, p_2, p_3 bude 27, glasi:

$$A.\ y-6\cdot\sqrt{2}=0 \qquad B.\ y-3=0 \qquad C.\ y-6=0 \qquad D.\ y+6=0$$

Rješenje 131

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

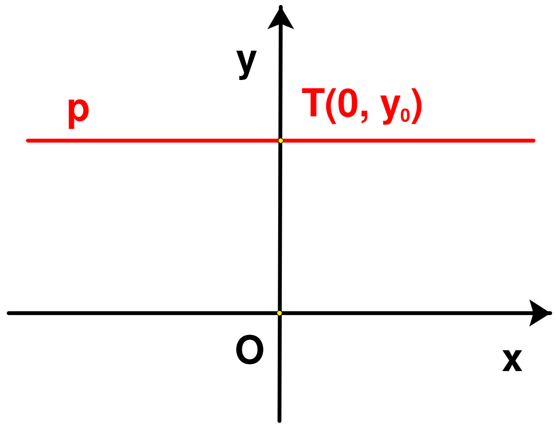
$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0.$$

www.halapa.com

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca p paralelnog s x – osi glasi $y = y_0$.



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Budući da traženi pravac ima svojstvo da čitav leži u gornjoj poluravnini, njegova jednadžba glasi:

$$y = y_0 \quad , \quad y_0 > 0.$$

Presjek pravaca $y = y_0$ i $y - x = 0$ naći ćemo tako da riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 \\ y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow y_0 - x = 0 \Rightarrow -x = -y_0 \Rightarrow -x = -y_0 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow x = y_0.$$

Točka presjeka ima koordinate:

$$P_1(x, y) = P_1(y_0, y_0).$$

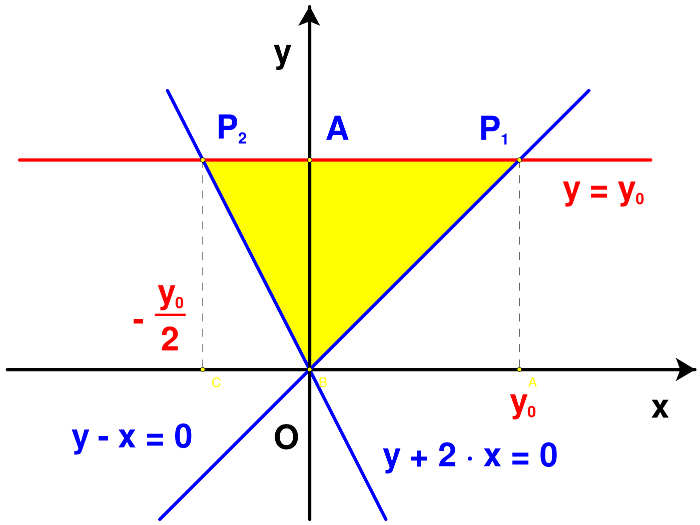
Presjek pravaca $y = y_0$ i $y + 2 \cdot x = 0$ naći ćemo tako da riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 \\ y + 2 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow y_0 + 2 \cdot x = 0 \Rightarrow 2 \cdot x = -y_0 \Rightarrow 2 \cdot x = -y_0 \quad /: 2 \Rightarrow x = -\frac{y_0}{2}.$$

Točka presjeka ima koordinate:

$$P_2(x, y) = P_2\left(-\frac{y_0}{2}, y_0\right).$$

www.halapa.com



Sa slike vidi se:

$$\left|P_1P_2\right|=\left|P_1A\right|+\left|AP_2\right|=y_0+\frac{y_0}{2}=\frac{3\cdot y_0}{2}\quad,\quad\left|OA\right|=y_0$$

U trokutu OP_1P_2 je duljina baze (osnovice) $\left|P_1P_2\right|$, a duljina visine $\left|OA\right|$ pa za njegovu ploštinu vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}P=\frac{1}{2}\cdot\left|P_1P_2\right|\cdot\left|OA\right|\\P=27\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\left|P_1P_2\right|\cdot\left|OA\right|=27\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot y_0}{2}\cdot y_0=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3\cdot y_0^2}{4}=27\Rightarrow\frac{3\cdot y_0^2}{4}=27\;/\cdot\frac{4}{3}\Rightarrow y_0^2=36\Rightarrow y_0^2=36\;/\sqrt{\;}\Rightarrow y_0=\sqrt{36}\Rightarrow y_0=6.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$y=6\Rightarrow y-6=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 131

Zadani su pravci $p_1 \equiv y - x = 0$ i $p_2 \equiv y + 2 \cdot x = 0$. Jednadžba pravca p_3 koji ima svojstvo da čitav leži u gornjoj poluravnini, $y \geq 0$, i da površina trokuta određenog pravcima p_1, p_2, p_3 bude 108, glasi:

$A.\; y-18=0 \qquad B.\; y-12=0 \qquad C.\; y+14=0 \qquad D.\; y+6=0$

Rezultat: B.

Zadatak 132 (Maturant, ekonomska škola)

Koja od navedenih jednadžbi predstavlja pravac s koeficijentom smjera $k = -2$?

$A.\; x+y+1=0 \qquad B.\; x+2\cdot y+2=0 \qquad C.\; 2\cdot x-y-1=0 \qquad D.\; 2\cdot x+y+1=0$

Rješenje 132

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se

www.halapa.com

koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Zadane jednadžbe pravaca preoblikujemo u eksplicitne oblike kako bismo odredili koeficijente smjerova k.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x+2\cdot y+2=0 \\ 2\cdot x-y-1=0 \\ 2\cdot x+y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x-1 \\ 2\cdot y=-x-2 \\ -y=-2\cdot x+1 \\ y=-2\cdot x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x-1 \\ 2\cdot y=-x-2 \;/\cdot\frac{1}{2} \\ -y=-2\cdot x+1 \;/\cdot(-1) \\ y=-2\cdot x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=-\frac{1}{2}\cdot x-1 \\ y=2\cdot x-1 \\ y=-2\cdot x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-1 \\ k_2=-\frac{1}{2} \\ k_3=2 \\ k_4=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ k=-2 \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x+y+1=0.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 132

Koja od navedenih jednadžbi predstavlja pravac s koeficijentom smjera k = – 1?

$A.\ x+y+1=0 \qquad B.\ x+2\cdot y+2=0 \qquad C.\ 2\cdot x-y-1=0 \qquad D.\ 2\cdot x+y+1=0$

Rezultat: A.

Zadatak 133 (Vlatka, srednja škola)

Svi pravci iz skupa zadanog jednadžbom $y-k\cdot x=k+3,\ k\in R$ prolaze jednom točkom u ravnini. Zbroj koordinata te točke jednak je:

$A.\ 0 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 2$

www.halapa.com

Rješenje 133

Ponovimo!

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom T(x_1, y_1) glasi

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ y-k\cdot x=k+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ y-3=k\cdot x+k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ y-3=k\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ y-3=k\cdot(x-(-1)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ y-3=k\cdot(x-(-1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+y_1=-1+3 \Rightarrow x_1+y_1=2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 133

Svi pravci iz skupa zadanog jednadžbom $y-k\cdot x=k+2,\ k\in R$ prolaze jednom točkom u ravnini. Zbroj koordinata te točke jednak je:

$A.\ 0 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$

Rezultat: C.

Zadatak 134 (Rex, tehnička škola)

Nagib pravca PQ, P(a, 1), Q(4, a), jednak je $-\frac{1}{2}$. Odredi a.

Rješenje 134

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} k=-\frac{1}{2} \\ P(x_1, y_1)=P(a, 1) \\ Q(x_2, y_2)=Q(4, a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right] \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{a-1}{4-a} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{a-1}{4-a} \;/\cdot(-2\cdot(4-a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-a=-2\cdot(a-1) \Rightarrow 4-a=-2\cdot a+2 \Rightarrow -a+2\cdot a=2-4 \Rightarrow a=-2.$$

Vježba 134

Nagib pravca PQ, P(4, a), Q(a, 1), jednak je $-\frac{1}{2}$. Odredi a.

Rezultat: a = – 2.

Zadatak 135 (Rex, tehnička škola)

Jednadžbom 2 · a · x – 2 · y – a – 2 = 0 određen je skup pravaca ravnine. Dokaži da svi pravci tog skupa prolaze jednom točkom u ravnini i odredi tu točku.

www.halapa.com

Rješenje 135

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Opći oblik linearne jednadžbe glasi:

$$a\cdot x=b, \; a, b\in R.$$

Moguća su tri slučaja.

① $\left.\begin{array}{l} a\cdot x=b \\ a\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{b}{a}$ rješenje jednadžbe

② $\left.\begin{array}{l} a\cdot x=b \\ a=0 \;,\; b\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\cdot x=b$ jednadžba nema rješenja

Ne postoji broj koji bi pomnožen s nulom dao broj različit od nule.

③ $\left.\begin{array}{l} a\cdot x=b \\ a=0 \;,\; b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\cdot x=0$ jednadžba je neodređena

Ima beskonačno mnogo rješenja, tj. jednakost je ispunjena za svako $x\in R$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Budući da pravci zadani jednadžbom

$$2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0$$

moraju prolaziti istom točkom za svaki realan broj a (parametar), slijedi:

$$2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0 \Rightarrow 2\cdot a\cdot x-a=2\cdot y+2 \Rightarrow a\cdot(2\cdot x-1)=2\cdot y+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot x-1=0\\2\cdot y+2=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot x=1\\2\cdot y=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot x=1 \ /:2\\2\cdot y=-2 \ /:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\y=-1\end{array}\right\} \Rightarrow T(x,\ y)=T\left(\frac{1}{2},\ -1\right).$$

Provjerimo je li točka T zajednička točka za sve pravce

$$2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0.$$

Koordinate točke T uvrstimo u zadanu jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l}T(x,\ y)=T\left(\frac{1}{2},\ -1\right)\\2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot a\cdot\frac{1}{2}-2\cdot(-1)-a-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a\cdot\frac{1}{2}+2-a-2=0 \Rightarrow a+2-a-2=0 \Rightarrow a+2-a-2=0 \Rightarrow 0=0.$$

Svi pravci prolaze točkom $T\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$.

2.inačica

Budući da pravci zadani jednadžbom

$$2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0$$

moraju prolaziti istom točkom za svaki realan broj a (parametar), slijedi da će tom točkom prolaziti i kada je, na primjer, a = 0 i a = 1. Tada se dobije sustav jednadžbi čija rješenja jesu koordinate tražene točke.

$$\left.\begin{array}{l}a=0\\a=1\end{array}\right\} \Rightarrow [2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot 0\cdot x-2\cdot y-0-2=0\\2\cdot 1\cdot x-2\cdot y-1-2=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot y-2=0\\2\cdot x-2\cdot y-3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot y=2\\2\cdot x-2\cdot y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot y=2 \ /:(-2)\\2\cdot x-2\cdot y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-1\\2\cdot x-2\cdot y=3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x-2\cdot(-1)=3 \Rightarrow 2\cdot x+2=3 \Rightarrow 2\cdot x=3-2 \Rightarrow 2\cdot x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=1 \ /:2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow T(x,\ y)=T\left(\frac{1}{2},\ -1\right).$$

Provjerimo je li točka T zajednička točka za sve pravce

$$2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0.$$

Koordinate točke T uvrstimo u zadanu jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l}T(x,\ y)=T\left(\frac{1}{2},\ -1\right)\\2\cdot a\cdot x-2\cdot y-a-2=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot a\cdot\frac{1}{2}-2\cdot(-1)-a-2=0 \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + 2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a + 2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a + 2 - a - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Vježba 135

Jednadžbom x + a · y – 3 – 4 · a = 0 određen je skup pravaca ravnine. Dokaži da svi pravci tog skupa prolaze jednom točkom u ravnini i odredi tu točku.

Rezultat: T(3, 4).

Zadatak 136 (Rex, tehnička škola)

Koliko je puta točka A(3, 2) udaljenija od točke B(– 1, – 2) nego točka B od točke C(– 4, 1)?

$$A.\ \frac{4}{3} \qquad B.\ \frac{4}{5} \qquad C.\ \frac{3}{4} \qquad D.\ 4$$

Rješenje 136

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

www.halapa.com

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Najprije izračunamo udaljenosti | AB | i | BC |.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(-1, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-2)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{16+16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{16 \cdot 2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |AB| = 4 \cdot \sqrt{2}$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(-1, -2) \\ C(x_2, y_2) = C(-4, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (1-(-2))^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{(-4+1)^2 + (1+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{9+9} \Rightarrow |BC| = \sqrt{9 \cdot 2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Sada računamo kvocijent.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{3}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 136

Koliko je puta točka C(– 4, 1) udaljenija od točke B(– 1, – 2) nego točka B od točke A(3, 2)?

$$A.\ \frac{4}{3} \qquad B.\ \frac{4}{5} \qquad C.\ \frac{3}{4} \qquad D.\ 4$$

Rezultat: C.

Zadatak 137 (4A, 4B, TUPŠ)

Dva modela automobila voze po pisti. Koordinate njihova položaja dane su u metrima. Model A polazi iz točke A(2, 0), vozi jednolikom brzinom pravocrtno i nakon jedne sekunde nalazi se u točki T(4.4, 0.7). Model B u isto vrijeme polazi iz točke B(0, 4.4) i kreće se jednolikom brzinom po pravcu $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 4.4.$ Modeli A i B su se sudarili. Kolikom je brzinom vozio model B? (Napomena: Formula za brzinu v kod jednolikoga pravocrtnoga gibanja je $v = \frac{s}{t},$ gdje je s put, a t vrijeme.)

Rješenje 137

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Dekadske jedinice su brojevi koji se dobiju množenjem broja 10 samim sobom. Dekadske jedinice su brojevi: 10, 100, 1000, 10000, 100000 itd. Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadski broj ima nula.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

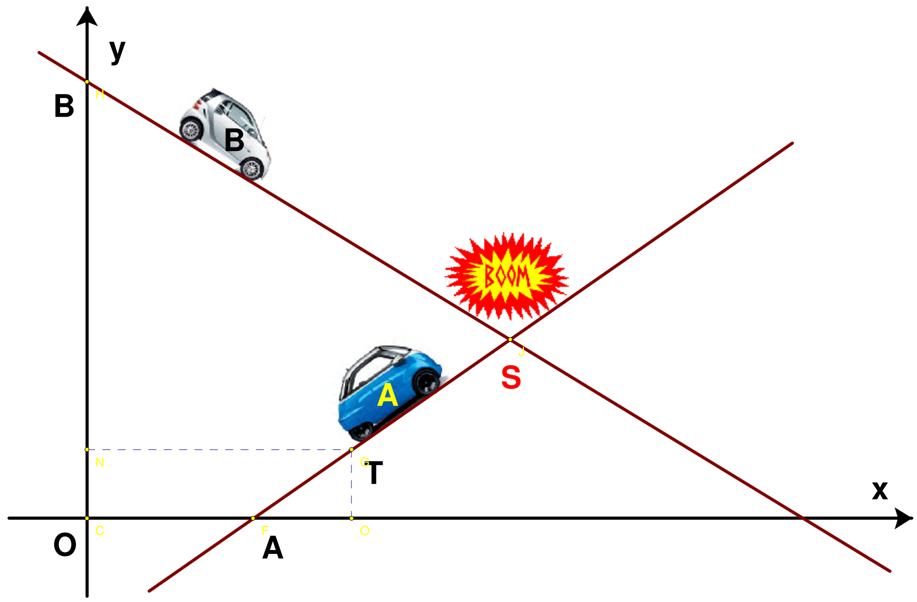
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

Udaljenost točaka $A\left(x_1, y_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2\right)$:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

www.halapa.com



Najprije odredimo jednadžbu pravca po kojem se giba model A. On polazi iz točke A(2, 0) i nakon jedne sekunde nalazi se, gibajući se pravocrtno, u točki T(4.4, 0.7). Jednadžba pravca točkama A i T glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(2,\ 0) \\ T(x_2,\ y_2) = T(4.4,\ 0.7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y - 0 = \frac{0.7 - 0}{4.4 - 2} \cdot (x - 2) \ \Rightarrow\ y = \frac{0.7}{2.4} \cdot (x - 2) \ \Rightarrow\ y = \frac{0.7 \cdot 10}{2.4 \cdot 10} \cdot (x - 2) \ \Rightarrow\ y = \frac{7}{24} \cdot (x - 2) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{7}{24} \cdot x - \frac{7}{12}.$$

Model A giba se jednolikom brzinom po pravcu

$$y = \frac{7}{24} \cdot x - \frac{7}{12}.$$

Model B giba se jednolikom brzinom po pravcu

$$y = -\frac{1}{4} \cdot x + 4.4 \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{44}{10} \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{44}{10} \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{22}{5}.$$

Modeli A i B su se sudarili, a mjesto sudara (točka S) je sjecište pravaca po kojima se gibaju. Presjek pravaca (točka S) dobije se rješavanjem sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{7}{24} \cdot x - \frac{7}{12} \\ y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{22}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{7}{24} \cdot x - \frac{7}{12} = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{22}{5} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{7}{24} \cdot x - \frac{7}{12} = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{22}{5} \ /\cdot 120 \ \Rightarrow\ 35 \cdot x - 70 = -30 \cdot x + 528 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 35 \cdot x + 30 \cdot x = 528 + 70 \ \Rightarrow\ 65 \cdot x = 598 \ \Rightarrow\ 65 \cdot x = 598 \ /:65 \ \Rightarrow\ x = \frac{598}{65} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{598}{65} \ \Rightarrow\ x = \frac{46}{5} \ \Rightarrow\ x = 9.2.$$

www.halapa.com

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{7}{24}\cdot x-\frac{7}{12} \\ y=\frac{46}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{7}{24}\cdot\frac{46}{5}-\frac{7}{12} \Rightarrow y=\frac{7}{24}\cdot\frac{46}{5}-\frac{7}{12} \Rightarrow y=\frac{7}{12}\cdot\frac{23}{5}-\frac{7}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{161}{60}-\frac{7}{12} \Rightarrow y=\frac{161-35}{60} \Rightarrow y=\frac{126}{60} \Rightarrow y=\frac{126}{60} \Rightarrow y=\frac{21}{10} \Rightarrow y=2.1.$$

Točka S ima koordinate:

$$S(x,\ y)=S\left(\frac{46}{5},\ \frac{21}{10}\right) \quad \text{ili} \quad S(x,\ y)=S(9.2,\ 2.1).$$

Sada računamo putove koje modeli A i B prevale od svojih polaznih (ishodišnih) točaka do točke S (trenutka sudara).

- Put modela A je udaljenost točaka A i S.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 0) \\ S(x_2,\ y_2)=S(9.2,\ 2.1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ s_A=|AS|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_A=\sqrt{(9.2-2)^2+(2.1-0)^2} \Rightarrow s_A=\sqrt{7.2^2+2.1^2} \Rightarrow s_A=7.5\ m.$$

- Put modela B je udaljenost točaka B i S.

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1)=B(0,\ 4.4) \\ S(x_2,\ y_2)=S(9.2,\ 2.1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ s_B=|AS|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_B=\sqrt{(9.2-0)^2+(2.1-4.4)^2} \Rightarrow s_B=\sqrt{9.2^2+(-2.3)^2} \Rightarrow s_B=9.48\ m.$$

Da bismo odredili brzinu modela A moramo izračunati put duljine | AT |.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 0) \\ T(x_2,\ y_2)=T(4.4,\ 0.7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ s=|AT|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=\sqrt{(4.4-2)^2+(0.7-0)^2} \Rightarrow s=\sqrt{2.4^2+0.7^2} \Rightarrow s=2.5\ m.$$

Taj put model A prevali za t = 1 s pa je njegova brzina jednaka:

$$v_A=\frac{s}{t} \Rightarrow v_A=\frac{2.5\ m}{1\ s} \Rightarrow v_A=2.5\ \frac{m}{s}.$$

U trenutku sudara (točka S) modeli automobila prešli su različite putove s_A i s_B u jednakom vremenskom intervalu

$$t_A=t_B.$$

Zato je:

$$t_A=t_B \Rightarrow \frac{s_A}{v_A}=\frac{s_B}{v_B} \Rightarrow \frac{s_A}{v_A}=\frac{s_B}{v_B}\ /\cdot\frac{v_B\cdot v_A}{s_A} \Rightarrow v_B=\frac{s_B\cdot v_A}{s_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{9.48\ m\cdot 2.5\ \frac{m}{s}}{7.5\ m} \Rightarrow v_B=3.16\ \frac{m}{s}.$$

www.halapa.com

Vježba 137

Dva modela automobila voze po pisti. Koordinate njihova položaja dane su u metrima. Model A polazi iz točke A(2, 0), vozi jednolikom brzinom pravocrtno i nakon jedne sekunde nalazi se u točki T(4.4, 0.7). Model B u isto vrijeme polazi iz točke B(0, 4.4) i kreće se jednolikom brzinom po pravcu $y = -0.25 \cdot x + 4.4$. Modeli A i B su se sudarili. Kolikom je brzinom vozio model B? (Napomena: Formula za brzinu v kod jednolikoga pravocrtnoga gibanja je $v = \frac{s}{t}$, gdje je s put, a t vrijeme.)

Rezultat: 3.16 m / s.

Zadatak 138 (Ivan, tehnička škola)

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od 45°. Tada vrijedi jednakost:

$$A.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=2 \qquad B.\ (1+k_1)\cdot(1-k_2)=1$$
$$C.\ (1-k_1)\cdot(1+k_2)=2 \qquad D.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=-2$$

Rješenje 138

Ponovimo!

$$tg\,45^\circ = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kut između pravaca

$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

računa se iz formule

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = 45^\circ \\ k_2 > k_1 \Rightarrow k_2 - k_1 > 0 \end{array} \right] \Rightarrow tg\,45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \Rightarrow 1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 - k_1 = 1 + k_1 \cdot k_2 \Rightarrow k_2 - k_1 - 1 - k_1 \cdot k_2 = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 - 1 - k_1 \cdot k_2 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 + 1 - k_1 - 1 - k_1 \cdot k_2 - 1 = 0 \Rightarrow (k_2 + 1) + (-k_1 - k_1 \cdot k_2) - 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + k_2) - k_1 \cdot (1 + k_2) - 2 = 0 \Rightarrow (1 + k_2) - k_1 \cdot (1 + k_2) = 2 \Rightarrow (1 + k_2) - k_1 \cdot (1 + k_2) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + k_2) \cdot (1 - k_1) = 2 \Rightarrow (1 - k_1) \cdot (1 + k_2) = 2.$$

Odgovor je pod C.

www.halapa.com

Vježba 138

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od 45°. Tada vrijedi jednakost:

$$A.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)-2=0 \qquad B.\ (1+k_1)\cdot(1-k_2)-1=0$$
$$C.\ (1-k_1)\cdot(1+k_2)-2=0 \qquad D.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)+2=0$$

Rezultat: C.

Zadatak 139 (Željka, ekonomska škola)

Nagib pravca $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$ jednak je::

$$A.\ -\frac{5}{3} \qquad B.\ -\frac{3}{5} \qquad C.\ \frac{3}{5} \qquad D.\ \frac{5}{3}$$

Rješenje 139

Ponovimo!

$$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca (nagib pravca). Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.

1.inačica

Segmentni oblik jednadžbe pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik jednadžbe pravca kako bismo odredili njegov nagib (koeficijent smjera).

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1 \ /\cdot 15 \Rightarrow -5\cdot x+3\cdot y=15 \Rightarrow 3\cdot y=5\cdot x+15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\cdot y=5\cdot x+15 \ /:3 \Rightarrow y=\frac{5}{3}\cdot x+5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Segmentni oblik jednadžbe pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik jednadžbe pravca kako bismo odredili njegov nagib (koeficijent smjera).

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow \frac{y}{5}=\frac{x}{3}+1 \Rightarrow \frac{y}{5}=\frac{1}{3}\cdot x+1 \Rightarrow \frac{y}{5}=\frac{1}{3}\cdot x+1 \ /\cdot 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{5}{3}\cdot x+5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}.$$

Odgovor je pod D.

www.halapa.com

Vježba 139

Nagib pravca $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ jednak je::

$$A.\ -\frac{5}{3} \qquad B.\ -\frac{3}{5} \qquad C.\ \frac{3}{5} \qquad D.\ \frac{5}{3}$$

Rezultat: A.

Zadatak 140 (Matija, srednja škola)

Točke A(m + n, 1) i B(m – n, – 1) pripadaju pravcu $2\cdot x-3\cdot y+11=0.$ Tada je

$$A.\ m\cdot n=7.5 \qquad B.\ m\cdot n=-2 \qquad C.\ m\cdot n=-8.25 \qquad D.\ m\cdot n=-1$$

Rješenje 140

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Budući da točke A i B pripadaju pravcu $2\cdot x-3\cdot y+11=0$, njihove koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ y)=A(m+n,\ 1) \\ B(x,\ y)=B(m-n,\ -1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\,2\cdot x-3\cdot y+11=0\,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot(m+n)-3\cdot 1+11=0 \\ 2\cdot(m-n)-3\cdot(-1)+11=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot m+2\cdot n-3+11=0 \\ 2\cdot m-2\cdot n+3+11=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot m+2\cdot n=3-11 \\ 2\cdot m-2\cdot n=-3-11\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot m+2\cdot n=-8 \\ 2\cdot m-2\cdot n=-14\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{matrix}\right] \Rightarrow 4\cdot m=-22 \Rightarrow 4\cdot m=-22\ /:4 \Rightarrow m=-\frac{22}{4} \Rightarrow m=-5.5.$$

Računamo n.

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot m+2\cdot n=-8 \\ m=-5.5\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot(-5.5)+2\cdot n=-8 \Rightarrow -11+2\cdot n=-8 \Rightarrow 2\cdot n=-8+11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n=3 \Rightarrow 2\cdot n=3\ /:2 \Rightarrow n=1.5.$$

Tada je

$$m\cdot n=-5.5\cdot 1.5 \Rightarrow m\cdot n=-8.25.$$

Odgovor je pod C

Vježba 140

Točke A(m + n, 1) i B(m – n, 1) pripadaju pravcu $2\cdot x-3\cdot y+11=0.$ Tada je

$$A.\ m\cdot n=-1 \qquad B.\ m\cdot n=0 \qquad C.\ m\cdot n=1 \qquad D.\ m\cdot n=-2$$

Rezultat: B.

www.halapa.com