Zadatak 081 (Ivana, gimnazija)

Zadane su točke A(3, – 1) i B(4, 2). Odredite koordinate točke A' koja je centralno simetrična točki A u odnosu na točku B.

Rješenje 081

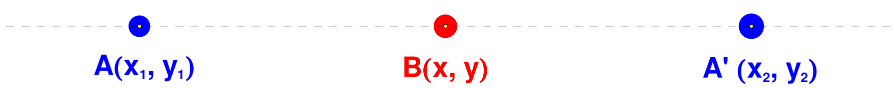
Ponovimo!

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) su

$$P\left(x,\ y\right)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Preslikavanje koje svaku točku T neke ravnine π prevodi u točku T ' koja je simetrična sa točkom T u odnosu na točku S te ravnine π naziva se centralna simetrija ravnine π sa središtem (centrom) S.

$$\left|TS\right|=\left|T'S\right|.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|AB\right|=\left|A'B\right|.$$

Uočimo da je točka B polovište dužine $\overline{AA'}$. Budući da su poznate koordinate točaka A i B, lako izračunamo da je:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(3,\ -1\right) \\ B\left(x,\ y\right)=B\left(4,\ 2\right) \\ A'\left(x_2,\ y_2\right)=A'\left(x_2,\ y_2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\ /\cdot 2 \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=x_1+x_2 \\ 2\cdot y=y_1+y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2\cdot x \\ y_1+y_2=2\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=2\cdot x-x_1 \\ y_2=2\cdot y-y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=2\cdot 4-3 \\ y_2=2\cdot 2-(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=8-3 \\ y_2=4+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=5 \\ y_2=5 \end{array}\right\}.$$

Koordinate točke A' iznose:

$$A'\left(x_2,\ y_2\right)=A'\left(5,\ 5\right).$$

Vježba 081

Zadane su točke A(2, 6) i B(5, 5). Odredite koordinate točke A' koja je centralno simetrična točki A u odnosu na točku B.

Rezultat: A'(8, 4).

Zadatak 082 (Maturantica, srednja škola)

Ako je $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, tada je y jednako:

$A.\ y=-\frac{2}{3}\cdot x+2$ $\quad B.\ y=\frac{2}{3}\cdot x-2$ $\quad C.\ y=-\frac{3}{2}\cdot x+2$ $\quad D.\ y=\frac{3}{2}\cdot x-2$

Rješenje 082

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

1.inačica

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \,/\cdot 6 \Rightarrow 2\cdot x-3\cdot y=6 \Rightarrow -3\cdot y=-2\cdot x+6 \Rightarrow -3\cdot y=-2\cdot x+6 \,/:(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \,/\cdot(-6) \Rightarrow -2\cdot x+3\cdot y=-6 \Rightarrow 3\cdot y=2\cdot x-6 \Rightarrow 3\cdot y=2\cdot x-6 \,/:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-2.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \,/\cdot(-2) \Rightarrow -\frac{2}{3}\cdot x+y=-2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-2.$$

Odgovor je pod B.

4.inačica

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow \frac{y}{-2}=-\frac{x}{3}+1 \,/\cdot(-2) \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x-2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 082

Ako je $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$, tada je y jednako:

$A.\ y=\frac{2}{3}\cdot x+2$ $\quad B.\ y=-\frac{2}{3}\cdot x-2$ $\quad C.\ y=\frac{3}{2}\cdot x+2$ $\quad D.\ y=\frac{3}{2}\cdot x-2$

Rezultat: A.

Zadatak 083 (Ninoslav, srednja škola)

Odredite b i c tako da se pravci 3 · x + b · y + c = 0 i c · x – 2 · y + 12 = 0 podudaraju.

Rješenje 083

Ponovimo!

Dva pravca

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0,$$
$$A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0$$

podudaraju se ako vrijedi:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=k \ , \ k\neq 0.$$

Budući da se pravci moraju podudarati, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x+b\cdot y+c=0 \\ c\cdot x-2\cdot y+12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{c}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{12}.$$

Računamo koeficijent c.

$$\frac{3}{c}=\frac{c}{12} \Rightarrow c^2=36 \Rightarrow c^2=36 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow c_{1,2}=\pm\sqrt{36} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1=-6 \\ c_2=6 \end{array}\right\}.$$

Računamo koeficijent b.

$$\frac{b}{-2}=\frac{c}{12} \Rightarrow \frac{b}{-2}=\frac{c}{12} \; / \cdot (-2) \Rightarrow b=-\frac{1}{6}\cdot c \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1=-6 \\ c_2=6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1=-\frac{1}{6}\cdot(-6) \\ b_2=-\frac{1}{6}\cdot 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1=1 \\ b_2=-1 \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja su:

$$\left.\begin{matrix} c_1=-6 \\ b_1=1 \end{matrix}\right\} \quad , \quad \left.\begin{matrix} c_2=6 \\ b_2=-1 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 083

Odredite b i c tako da se pravci $3 \cdot x + b \cdot y + c = 0$ i $c \cdot x + 2 \cdot y + 12 = 0$ podudaraju.

Rezultat: $\left.\begin{matrix} c_1=-6 \\ b_1=-1 \end{matrix}\right\} \quad , \quad \left.\begin{matrix} c_2=6 \\ b_2=1 \end{matrix}\right\}.$

Zadatak 084 (Ivana, strukovna škola)

Provjeri da li točka A(4, 7) pripada pravcu $3 \cdot x + 2 \cdot y - 26 = 0$.

Rješenje 084

Ponovimo!

Ako točka $T(x_0, y_0)$ pripada pravcu $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, onda koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj. vrijedi

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0.$$

Uvrstimo koordinate točke u zadani pravac.

$$\left.\begin{matrix} A(x, y)=A(4, 7) \\ 3\cdot x+2\cdot y-26=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 4+2\cdot 7-26=0 \Rightarrow 12+14-26=0 \Rightarrow 26-26=0 \Rightarrow 0=0.$$

Točka pripada pravcu.

Vježba 084

Provjeri da li točka A(1, 2) pripada pravcu $3 \cdot x + 2 \cdot y - 7 = 0$.

Rezultat: Da.

Zadatak 085 (Ivana, strukovna škola)

Odredi nepoznatu koordinatu točke A(x, 3) ako ona pripada pravcu $5 \cdot x - 2 \cdot y - 4 = 0$.

Rješenje 085

Ponovimo!

Ako točka $T(x_0, y_0)$ pripada pravcu $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, onda koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj. vrijedi

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0.$$

Uvrstimo koordinate točke u zadani pravac.

$$\left.\begin{matrix} A(x, y)=A(x, 3) \\ 5\cdot x-2\cdot y-4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\cdot x-2\cdot 3-4=0 \Rightarrow 5\cdot x-6-4=0 \Rightarrow 5\cdot x=6+4 \Rightarrow$$

$$5\cdot x=10 \Rightarrow 5\cdot x=10 \; /:5 \Rightarrow x=2.$$

Točka ima koordinate

$$A(x, y)=A(2, 3).$$

Vježba 085

Odredi nepoznatu koordinatu točke A(2, y) ako ona pripada pravcu $5 \cdot x - 2 \cdot y - 4 = 0$.

Rezultat: A(2, 3).

Zadatak 086 (Ivana, strukovna škola)

Odredi točku pravca $3 \cdot x + 5 \cdot y - 23 = 0$.

Rješenje 086

Ponovimo!

Ako točka $T(x_0, y_0)$ pripada pravcu $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, onda koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj. vrijedi

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0.$$

Odaberemo li po volji jednu koordinatu točke (x ili y) drugu možemo izračunati iz jednadžbe pravca. Na primjer, odaberemo li $y = 4$, dobije se

$$\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ 3 \cdot x + 5 \cdot y - 23 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot x + 5 \cdot 4 - 23 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x + 20 - 23 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = -20 + 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 3 \Rightarrow 3 \cdot x = 3 \;/ : 3 \Rightarrow x = 1.$$

Točka T ima koordinate:

$$T(x, y) = T(1, 4).$$

Vježba 086

Odredi točku pravca $7 \cdot x + 3 \cdot y - 10 = 0$.

Rezultat: Na primjer, T(1, 1).

Zadatak 087 (Leonard, gimnazija)

Točkom T(– 2, 6) položi pravac koji s pravcima $5 \cdot x - y + 4 = 0$ i $x + 5 \cdot y - 6 = 0$ zatvara jednake kutove.

Rješenje 087

Ponovimo!

Apsolutna vrijednost ili modul realnog broja

$$|x| = \begin{cases} x \text{ za } x \ge 0 \\ -x \text{ za } x < 0 \end{cases} \quad , \quad |-x| = |x| \quad , \quad |x| = a \Rightarrow x = \pm a \; , \; a > 0.$$

Kut φ između dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$:

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad , \quad x^2 = y^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right\}.$$

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \ne 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Zadane pravce napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l}5\cdot x-y+4=0\\ x+5\cdot y-6=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=-5\cdot x-4\\ 5\cdot y=-x+6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=-5\cdot x-4\ /\cdot(-1)\\ 5\cdot y=-x+6\ /:5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=5\cdot x+4\\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k_1=5\\ k_2=-\frac{1}{5}\end{array}\right\}-\text{ koeficijenti smjerova.}$$

Uočimo da su pravci međusobno okomiti jer je

$$k_1\cdot k_2=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}k_1=5\\ k_2=-\frac{1}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow k_1\cdot k_2=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{1}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{1}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1.$$

Traženi pravac napisan u eksplicitnom obliku glasi

$$y=k\cdot x+l.$$

Neka je α_1 kut između pravaca

$$\left.\begin{array}{l}y=5\cdot x+5\ ,\ k_1=5\\ y=k\cdot x+l\ ,\ k=k\end{array}\right\},$$

tada je

$$tg\,\alpha_1=\left|\frac{k_1-k}{1+k_1\cdot k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_1=\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right|.$$

Neka je α_2 kut između pravaca

$$\left.\begin{array}{l}y=-\frac{1}{5}\cdot x+\frac{6}{5}\ ,\ k_2=-\frac{1}{5}\\ y=k\cdot x+l\ ,\ k=k\end{array}\right\},$$

tada je

$$tg\,\alpha_2=\left|\frac{k_2-k}{1+k_2\cdot k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{-\frac{1}{5}-k}{1-\frac{1}{5}\cdot k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{-\frac{1}{5}-\frac{k}{1}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\cdot k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{\frac{-1-5\cdot k}{5}}{\frac{5-k}{5}}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{\frac{-1-5\cdot k}{5}}{\frac{5-k}{5}}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{-1-5\cdot k}{5-k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{-(1+5\cdot k)}{5-k}\right|\Rightarrow tg\,\alpha_2=\left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right|.$$

Budući da kutovi moraju biti jednaki, slijedi:

$$\alpha_1=\alpha_2\Rightarrow tg\,\alpha_1=tg\,\alpha_2\Rightarrow\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right|=\left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right|.$$

Postoje četiri slučaja.

1.slučaj

$$\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right|=\left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right|\Rightarrow\frac{5-k}{1+5\cdot k}=\frac{1+5\cdot k}{5-k}\Rightarrow(5-k)^2=(1+5\cdot k)^2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5-k=1+5\cdot k\\ 5-k=-(1+5\cdot k)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5-k=1+5\cdot k\\ 5-k=-1-5\cdot k\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-k-5\cdot k=1-5\\ -k+5\cdot k=-1-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-6\cdot k=-4\\ 4\cdot k=-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-6\cdot k=-4\ /:(-6)\\ 4\cdot k=-6\ /:4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = \frac{4}{6} \\ k_2 = -\frac{6}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = \frac{2}{3} \\ k_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva pravca sa zadanim svojstvom. Primijetimo da su međusobno okomiti ($k_1 \cdot k_2 = -1$)-
Budući da prolaze točkom T(– 2, 6), lako se odrede njihovi odsječci na y osi tako da koordinate točke uvrstimo u jednadžbu pravca.

•

$$\left.\begin{matrix} T(x,\ y) = T(-2,\ 6) \\ k = \frac{2}{3} \\ y = k \cdot x + l \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6 = \frac{2}{3}\cdot(-2) + l \Rightarrow 6 = \frac{2}{3}\cdot\frac{-2}{1} + l \Rightarrow 6 = -\frac{4}{3} + l \Rightarrow -l = -\frac{4}{3} - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -l = -\frac{4}{3} - \frac{6}{1} \Rightarrow -l = \frac{-4-18}{3} \Rightarrow -l = -\frac{22}{3} \Rightarrow -l = -\frac{22}{3} \ /\cdot(-1) \Rightarrow l = \frac{22}{3}.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{matrix} k = \frac{2}{3}\ ,\ l = \frac{22}{3} \\ y = k \cdot x + l \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \frac{2}{3}\cdot x + \frac{22}{3}.$$

•

$$\left.\begin{matrix} T(x,\ y) = T(-2,\ 6) \\ k = -\frac{3}{2} \\ y = k \cdot x + l \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6 = -\frac{3}{2}\cdot(-2) + l \Rightarrow 6 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{-2}{1} + l \Rightarrow 6 = 3 + l \Rightarrow -l = 3 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -l = -3 \Rightarrow -l = -3 \ /\cdot(-1) \Rightarrow l = 3.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{matrix} k = -\frac{3}{2}\ ,\ l = 3 \\ y = k \cdot x + l \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}\cdot x + 3.$$

2.slučaj

$$\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right| = \left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right| \Rightarrow \frac{5-k}{1+5\cdot k} = -\frac{1+5\cdot k}{5-k} \Rightarrow (5-k)^2 = -(1+5\cdot k)^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\text{nema smisla jer kvadrat} \\ \text{ne može biti negativan}\end{matrix}\right\}.$$

3.slučaj

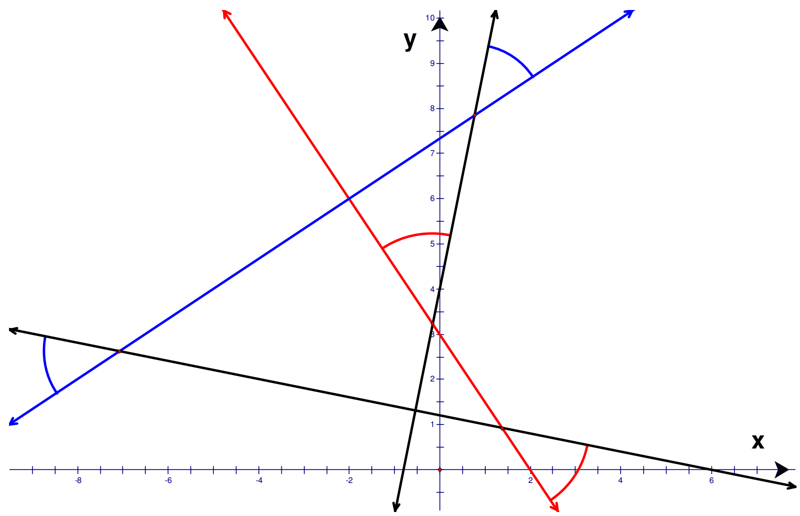
$$\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right| = \left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right| \Rightarrow -\frac{5-k}{1+5\cdot k} = \frac{1+5\cdot k}{5-k} \Rightarrow -\frac{5-k}{1+5\cdot k} = \frac{1+5\cdot k}{5-k} \ /\cdot(-1) \Rightarrow \frac{5-k}{1+5\cdot k} = -\frac{1+5\cdot k}{5-k}.$$

Treći slučaj svodi se na drugi slučaj.

4.slučaj

$$\left|\frac{5-k}{1+5\cdot k}\right| = \left|\frac{1+5\cdot k}{5-k}\right| \Rightarrow -\frac{5-k}{1+5\cdot k} = -\frac{1+5\cdot k}{5-k} \Rightarrow -\frac{5-k}{1+5\cdot k} = -\frac{1+5\cdot k}{5-k} \ /\cdot(-1) \Rightarrow \frac{5-k}{1+5\cdot k} = \frac{1+5\cdot k}{5-k}.$$

Četvrti slučaj svodi se na prvi slučaj.



Vježba 087

Točkom T(– 2, 6) položi pravac koji s pravcima $-\frac{5\cdot x}{4}+\frac{y}{4}=1$, $\frac{x}{6}+\frac{5\cdot y}{6}=1$ zatvara jednake kutove.

Rezultat: $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{22}{3}$, $y=-\frac{3}{2}\cdot x+3.$

Zadatak 088 (Leonard, gimnazija)

Točkom T(1, 4) položi pravac tako da točka T odsječak toga pravca što ga određuju njegova sjecišta s koordinatnim osima dijeli u omjeru 2 : 1.

Rješenje 088

Ponovimo!

Udaljenost točaka $A\left(x_A, y_A\right)$ i $B\left(x_B, y_B\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad (a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Traženi pravac napisan u eksplicitnom obliku glasi

$$y=k\cdot x+l.$$

Budući da točka T pripada pravcu, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(1,\ 4) \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow\; 4=k\cdot 1+l \;\Rightarrow\; 4=k+l \;\Rightarrow\; k+l=4.$$

Tražimo sjecište pravca s koordinatnim osima.

Sjecište pravca i y osi

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow y=k\cdot 0+l \Rightarrow y=l \Rightarrow A(x,\ y)=A(0,\ l).$$

Sjecište pravca i x osi

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow 0=k\cdot x+l \Rightarrow k\cdot x+l=0 \Rightarrow k\cdot x=-l \Rightarrow k\cdot x=-l \ /:k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{l}{k} \Rightarrow B(x,\ y)=B\left(-\frac{l}{k},\ 0\right).$$

Budući da točka T odsječak pravca što ga određuju njegova sjecišta s koordinatnim osima dijeli u omjeru 2 : 1, slijedi:

$$|BT|:|AT|=2:1 \Rightarrow |BT|=2\cdot|AT|.$$

Računamo $|\mathrm{BT}|$.

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1)=B\left(-\frac{l}{k},\ 0\right) \\ T(x_2,\ y_2)=T(1,\ 4) \\ |BT|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BT|=\sqrt{\left(1+\frac{l}{k}\right)^2+(4-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT|=\sqrt{\left(\frac{1}{1}+\frac{l}{k}\right)^2+4^2} \Rightarrow |BT|=\sqrt{\left(\frac{k+l}{k}\right)^2+16} \Rightarrow [k+l=4] \Rightarrow |BT|=\sqrt{\left(\frac{4}{k}\right)^2+16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT|=\sqrt{\frac{16}{k^2}+16}.$$

Računamo $|\mathrm{AT}|$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(0,\ l) \\ T(x_2,\ y_2)=T(1,\ 4) \\ |AT|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AT|=\sqrt{(1-0)^2+(4-l)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{1+(4-l)^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k+l=4 \\ k=4-l \end{array}\right] \Rightarrow |AT|=\sqrt{1+k^2}.$$

Sada se dobije:

$$|BT|=2\cdot|AT| \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{k^2}+16}=2\cdot\sqrt{1+k^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{k^2}+16}=2\cdot\sqrt{1+k^2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{16}{k^2}+16}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{1+k^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{k^2}+16=4\cdot(1+k^2) \Rightarrow \frac{16}{k^2}+16=4\cdot(1+k^2) \ /:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{k^2}+4=1+k^2 \Rightarrow \frac{4}{k^2}+4=1+k^2 \ /\cdot k^2 \Rightarrow 4+4\cdot k^2=k^2+k^4 \Rightarrow 4+4\cdot k^2-k^2-k^4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k^4+3\cdot k^2+4=0 \Rightarrow -k^4+3\cdot k^2+4=0 \ /\cdot(-1) \Rightarrow k^4-3\cdot k^2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{bikvadratna jednadžba} \\ \text{supstitucija} \\ t = k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow t^2 - 3 \cdot t - 4 = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} t^2 - 3 \cdot t - 4 = 0 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \left. \begin{matrix} t_1 = \dfrac{3+5}{2} \\ t_2 = \dfrac{3-5}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} t_1 = \dfrac{8}{2} \\ t_2 = -\dfrac{2}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{matrix} \right\}.$$

Vraćamo se supstituciji.

- $$\left. \begin{matrix} t = 4 \\ t = k^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = 4 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \left. \begin{matrix} k_1 = \sqrt{4} \\ k_2 = -\sqrt{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = -2 \end{matrix} \right\}.$$

Postoje dva rješenja (dva pravca).

Odredimo prvom pravcu odsječak na y osi.

$$\left. \begin{matrix} k_1 = 2 \\ k + l = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 + l_1 = 4 \Rightarrow l_1 = 4 - 2 \Rightarrow l_1 = 2.$$

Jednadžba pravog pravca glasi:

$$\left. \begin{matrix} k_1 = 2 \ , \ l_1 = 2 \\ y = k_1 \cdot x + l_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = 2 \cdot x + 2.$$

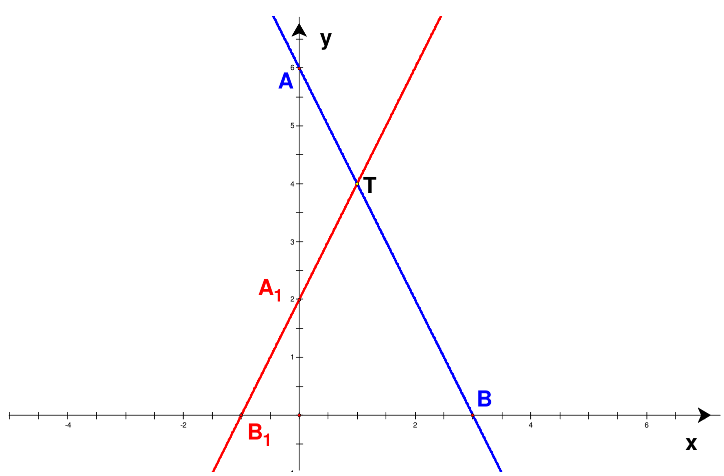
Odredimo drugom pravcu odsječak na y osi.

$$\left. \begin{matrix} k_2 = -2 \\ k + l = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -2 + l_2 = 4 \Rightarrow l_2 = 4 + 2 \Rightarrow l_2 = 6.$$

Jednadžba drugog pravca glasi:

$$\left. \begin{matrix} k_2 = -2 \ , \ l_2 = 6 \\ y = k_2 \cdot x + l_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 6.$$

- $$\left. \begin{matrix} t = -1 \\ t = k^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow \text{nema smisla jer k nije realan broj}.$$



Vježba 088

Točkom T(1, 4) položi pravac tako da točka T odsječak toga pravca što ga određuju njegova sjecišta s koordinatnim osima dijeli u omjeru 4 : 2.

Rezultat: $y = 2 \cdot x + 2 \;\; , \;\; y = -2 \cdot x + 6.$

Zadatak 089 (Viki, srednja škola)

Zadana je dužina $\overline{AB}$ i točka O na pravcu AB. Točke M i N polovišta su odgovarajućih dužina $\overline{OA}$ i $\overline{OB}.$ Odredite duljinu dužine $\overline{MN},$ ako je | OA | = 3 cm, a | OB | = 7 cm.

Rješenje 089

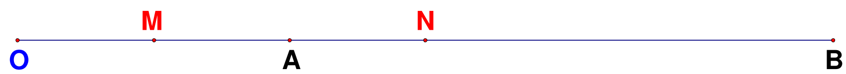
Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Točka O je na pravcu AB, ali nije element dužine $\overline{AB}.$



Sa slike vidi se:

$$|OA| = 3 \; cm \;\; , \;\; |OB| = 7 \; cm \;\; , \;\; |OM| = \frac{1}{2} \cdot |OA| \;\; , \;\; |ON| = \frac{1}{2} \cdot |OB|$$

Računamo duljinu dužine $\overline{MN}.$

$$|MN| = |ON| - |OM| \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot |OB| - \frac{1}{2} \cdot |OA| \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot \left(|OB| - |OA| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot (7 \; cm - 3 \; cm) \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot 4 \; cm \Rightarrow |MN| = 2 \; cm.$$

2.inačica

Točka O je element dužine $\overline{AB}.$

Sa slike vidi se:

$$|OA| = 3 \; cm \;\; , \;\; |OB| = 7 \; cm \;\; , \;\; |MO| = \frac{1}{2} \cdot |OA| \;\; , \;\; |ON| = \frac{1}{2} \cdot |OB|$$

Računamo duljinu dužine $\overline{MN}.$

$$|MN| = |MO| + |ON| \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot |OA| + \frac{1}{2} \cdot |OB| \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot \left(|OA| + |OB| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot (3 \; cm + 7 \; cm) \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2} \cdot 10 \; cm \Rightarrow |MN| = 5 \; cm.$$

Vježba 089

Zadana je dužina $\overline{AB}$ i točka O na pravcu AB. Točke M i N polovišta su odgovarajućih dužina $\overline{OA}$ i $\overline{OB}.$ Odredite duljinu dužine $\overline{MN},$ ako je | OA | = 4 cm, a | OB | = 8 cm.

Rezultat: 2 cm, 6 cm.

Zadatak 090 (Ella, gimnazija)

Ako je ploština trokuta, koji je određen koordinatnim osima i pravcem $4 \cdot x + 5 \cdot y - c = 0$, $(c > 0)$, jednaka 10, onda je c jednako

$A.\ 10 \qquad B.\ 15 \qquad C.\ 20 \qquad D.\ 25$

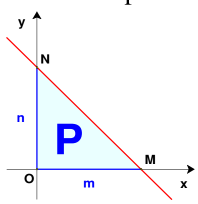
Rješenje 090

Ponovimo!

Apsolutna vrijednost ili modul realnog broja

$$|x| = \begin{cases} x \text{ za } x \geq 0 \\ -x \text{ za } x < 0 \end{cases}.$$

Jednadžbu pravca oblika



$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

nazivamo segmentnim oblikom jednadžbe pravca. Točke M(m, 0) i N(0, n) su presjeci tog pravca s koordinatnim osima. Brojevi m i n se nazivaju odsječci ili segmenti na osima. Površina pravokutnog trokuta OMN kojeg zatvaraju pravac

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

i koordinatne osi glasi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |m \cdot n|.$$

Jednadžbu pravca napišemo u segmentnom obliku kako bismo odredili odsječke m i n na koordinatnim osima.

$$4 \cdot x + 5 \cdot y - c = 0 \Rightarrow 4 \cdot x + 5 \cdot y = c \ / \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{4 \cdot x}{c} + \frac{5 \cdot y}{c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{c}{4}} + \frac{y}{\frac{c}{5}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = \frac{c}{4} \\ n = \frac{c}{5} \end{array}\right\}.$$

Iz formule za ploštinu trokuta izračuna se c.

$$\left.\begin{array}{l} P = 10 \ , \ m = \frac{c}{4} \ , \ n = \frac{c}{5} \\ P = \frac{1}{2} \cdot |m \cdot n| \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{c}{4} \cdot \frac{c}{5} \right| \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{c^2}{20} \right| \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{c^2}{20} \right| \ / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 = \left| \frac{c^2}{20} \right| \Rightarrow 20 = \frac{c^2}{20} \Rightarrow 20 = \frac{c^2}{20} \ / \cdot 20 \Rightarrow c^2 = 400 \Rightarrow c^2 = 400 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{400} \Rightarrow c = 20.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 090

Ako je ploština trokuta, koji je određen koordinatnim osima i pravcem $4 \cdot x + 5 \cdot y - c = 0$, $(c < 0)$, jednaka 10, onda je c jednako

$A.\ -10 \qquad B.\ -15 \qquad C.\ -20 \qquad D.\ -25$

Rezultat: C.

Zadatak 091 (Petra, gimnazija)

Ako pravac y = – 2 · x + (3 · m + 3) u koordinatnom sustavu siječe os y u točki (0, 2), onda je:

$$A.\ m=-\frac{2}{3} \qquad B.\ m=-\frac{1}{3} \qquad C.\ m=\frac{1}{3} \qquad D.\ m=\frac{5}{3}$$

Rješenje 091

Budući da točka (0, 2) pripada pravcu y = – 2 · x + (3 · m + 3), njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca i izračunati m.

$$\left.\begin{array}{l}(x,\ y)=(0,\ 2)\\ y=-2\cdot x+(3\cdot m+3)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2=-2\cdot 0+(3\cdot m+3)\ \Rightarrow\ 2=0+3\cdot m+3\ \Rightarrow\ 2=3\cdot m+3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot m=3-2\ \Rightarrow\ -3\cdot m=1\ \Rightarrow\ -3\cdot m=1\ /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\ \Rightarrow\ m=-\frac{1}{3}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 091

Ako pravac y = – 2 · x + (3 · m + 3) u koordinatnom sustavu siječe os x u točki (2, 0), onda je:

$$A.\ m=-\frac{2}{3} \qquad B.\ m=-\frac{1}{3} \qquad C.\ m=\frac{1}{3} \qquad D.\ m=\frac{5}{3}$$

Rezultat: C.

Zadatak 092 (Fani, ekonomska škola)

Napišite u eksplicitnom obliku jednadžbu pravca kojemu je zadan prikloni kut α i odsječak l na y – osi:

$$\alpha=45^0,\ l=-\frac{2}{3}.$$

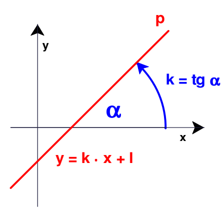
Rješenje 092

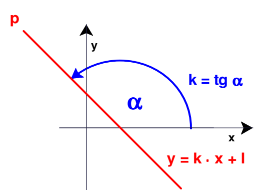
Ponovimo!

$$tg\ 45^0=1.$$

Prikloni kut pravca je kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko presjeka pravca i osi do pravca p. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

tg α = k.

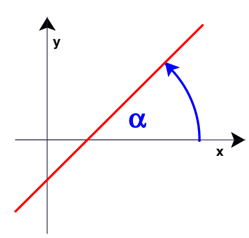




Veza između nagiba pravca i veličine priklonog kuta:

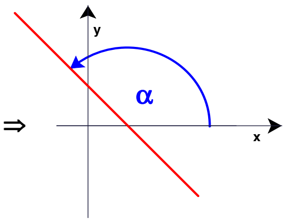
① Prikloni kut je šiljasti kut => tangens šiljastog kuta je pozitivan broj => koeficijent smjera je pozitivan broj.

$$\alpha<90^\circ\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\,\alpha>0\ \Rightarrow\ k>0\ \Rightarrow$$



② Prikloni kut je tupi kut => tangens tupog kuta je negativan broj => koeficijent smjera je negativan broj.

$\alpha > 90° \;\Rightarrow\; tg\,\alpha < 0 \;\Rightarrow\; k < 0 \;\Rightarrow$



Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Eksplicitni oblik jednadžbe pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k = tg\,\alpha \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow y = tg\,\alpha \cdot x + l \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha = 45^0 \\ l = -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow y = tg\,45^0 \cdot x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1 \cdot x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = x - \frac{2}{3}.$$

Vježba 092

Napišite u eksplicitnom obliku jednadžbu pravca kojemu je zadan prikloni kut α i odsječak l na y – osi:

$$\alpha = 45^0\,,\;\; l = -7.$$

Rezultat: $y = x - 7.$

Zadatak 093 (Fani, ekonomska škola)

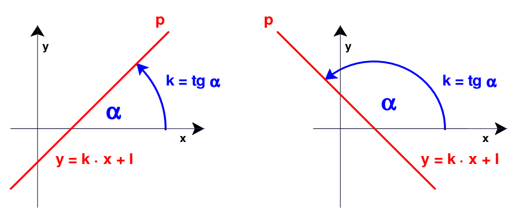
Koliki kut s pozitivnim dijelom x – osi čini pravac zadan točkama $O(0,\,0)$, $A\left(\frac{3}{2},\,\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$.

Rješenje 093

Ponovimo!

Prikloni kut pravca je kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko presjeka pravca i osi do pravca p. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

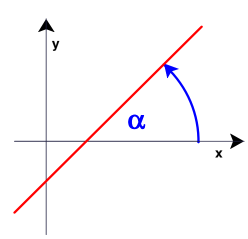
$$tg\,\alpha = k.$$



Veza između nagiba pravca i veličine priklonog kuta:

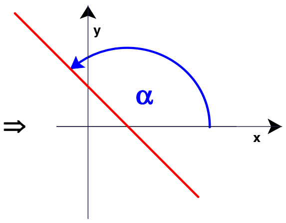
① Prikloni kut je šiljasti kut => tangens šiljastog kuta je pozitivan broj => koeficijent smjera je pozitivan broj.

$\alpha < 90° \;\Rightarrow\; tg\,\alpha > 0 \;\Rightarrow\; k > 0 \;\Rightarrow$



② Prikloni kut je tupi kut => tangens tupog kuta je negativan broj => koeficijent smjera je negativan broj.

$\alpha > 90^\circ \Rightarrow tg\,\alpha < 0 \Rightarrow k < 0 \Rightarrow$



Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Budući da je pravac zadan dvjema točkama O i A, njegov prikloni kut iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} O\left(x_1,\ y_1\right) = O(0,\ 0) \\ A\left(x_2,\ y_2\right) = A\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \\ k = tg\,\alpha \\ k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O\left(x_1,\ y_1\right) = O(0,\ 0) \\ A\left(x_2,\ y_2\right) = A\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \\ tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O\left(x_1,\ y_1\right) = O(0,\ 0) \\ A\left(x_2,\ y_2\right) = A\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \\ \alpha = tg^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 0}\right) \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

Vježba 093

Koliki kut s pozitivnim dijelom x – osi čini pravac zadan točkama $O(0,\ 0)$, $A\left(\frac{5}{3},\ \frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$.

Rezultat: 60°.

Zadatak 094 (Stela, gimnazija)

Sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\cdot\vec{i} + \vec{j}$ i onda rotacijom za kut 60°. U sustavu S' nađite jednadžbu pravca $x + 2\cdot y + 3 = 0$.

Rješenje 094

Ponovimo!

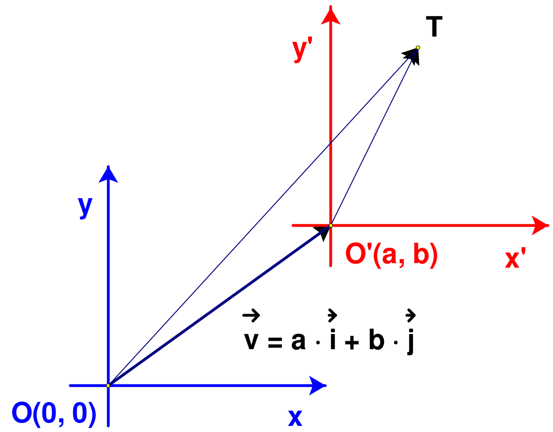
$$\cos 60^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

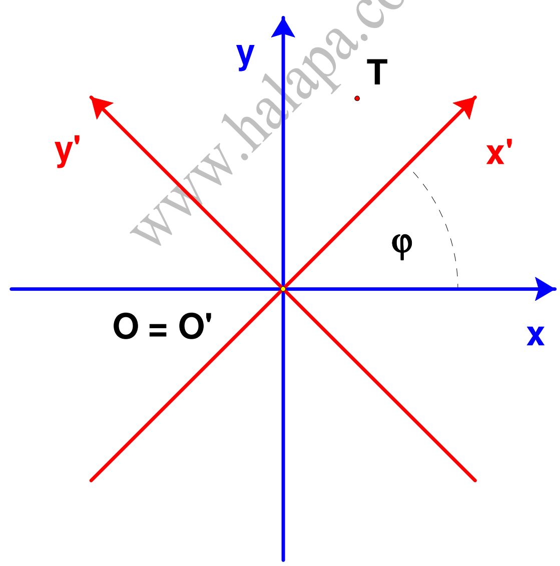
Ako u ravnini translatiramo koordinatni sustav XOY za vektor $\vec{v} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$ dobit ćemo koordinatni sustav X'O'Y'. Formule za transformacije koordinata pri translaciji koordinatnog sustava glase:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases}$$



Ako u ravnini leže koordinatni sustavi XOY i X'O'Y' koji imaju zajedničko ishodište i kut između njihovih koordinatnih osi x i x' (odnosno između koordinatnih osi y i y') je φ, tada formule za transformacije koordinata pri rotaciji koordinatnih sustava glase:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi \\ y = x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$



Najprije promatramo sustav X'O'Y' koji nastaje iz sustava XOY translacijom ishodišta za vektor

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j}.$$

Tada formule za transformacije koordinata pri translaciji koordinatnog sustava glase:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \\ a = 2 \;\;,\;\; b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = a + x' \\ y = b + y' \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 + x' \\ y = 1 + y' \end{array}\right\}.$$

U sustavu X'O'Y' jednadžba zadanog pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x+2\cdot y+3=0 \\ x=2+x' \\ y=1+y' \end{array}\right\} \Rightarrow 2+x'+2\cdot\left(1+y'\right)+3=0 \Rightarrow 2+x'+2+2\cdot y'+3=0 \Rightarrow x'+2\cdot y'+7=0.$$

Ako sustav X'O'Y' zarotiramo za kut φ = 60° dobije se sustav X"O"Y" u kojemu formule za transformacije koordinata pri rotaciji koordinatnih sustava glase:

$$\left.\begin{array}{l} x'=x''\cdot\cos\varphi-y''\cdot\sin\varphi \\ y'=x''\cdot\sin\varphi+y''\cdot\cos\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'=x''\cdot\cos 60^{0}-y''\cdot\sin 60^{0} \\ y'=x''\cdot\sin 60^{0}+y''\cdot\cos 60^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'=x''\cdot\frac{1}{2}-y''\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'=x''\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+y''\cdot\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'=\frac{1}{2}\cdot x''-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y'' \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x''+\frac{1}{2}\cdot y'' \end{array}\right\}.$$

Sada u sustavu X"O"Y" jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x'+2\cdot y'+7=0 \\ x'=\frac{1}{2}\cdot x''-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y'' \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x''+\frac{1}{2}\cdot y'' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x''-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y''+2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x''+\frac{1}{2}\cdot y''\right)+7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x''-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y''+\sqrt{3}\cdot x''+y''+7=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x''-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y''+\sqrt{3}\cdot x''+y''+7=0 \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''-\sqrt{3}\cdot y''+2\cdot\sqrt{3}\cdot x''+2\cdot y''+14=0 \Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot x''+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot y''+14=0.$$

Vježba 094

Sustav S' nastaje iz sustava S translacijom ishodišta za vektor $2\cdot\vec{i}+\vec{j}$ i onda rotacijom za kut 60°. U sustavu S' nađite jednadžbu pravca $x+2\cdot y=0$.

Rezultat: $\left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot x''+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot y''+8=0.$

Zadatak 095 (Nikolina, srednja škola)

Kolika je mjera kuta između pravaca y = 3 · x + 2 i 2 · x – 3 · y + 4 = 0?

Rješenje 095

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Apsolutna vrijednost ili modul realnog broja

$$|x| = \begin{cases} x \text{ za } x \geq 0 \\ -x \text{ za } x < 0 \end{cases} \quad , \quad |-x| = |x| \quad , \quad |x| = a \Rightarrow x = \pm a \ , \ a > 0.$$

Kut φ između dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$:

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Napišemo jednadžbe pravaca u eksplicitnom obliku da bismo mogli odrediti njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x + 2 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x + 2 \\ -3 \cdot y = -2 \cdot x - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x + 2 \\ -3 \cdot y = -2 \cdot x - 4 \ /: (-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x + 2 \\ y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = \frac{2}{3} \end{array}\right\}.$$

Računamo mjeru kuta između pravaca.

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = 3 \ , \ k_2 = \frac{2}{3} \\ tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{\frac{2}{3} - 3}{1 + 3 \cdot \frac{2}{3}} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{1}}{1 + 3 \cdot \frac{2}{3}} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{1}}{1 + 2} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{1}}{3} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{\frac{2 - 9}{3}}{\frac{3}{1}} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \left| \frac{-\frac{7}{3}}{\frac{3}{1}} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \left| -\frac{7}{9} \right| \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{7}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \Rightarrow \varphi = 37^0 52'30''.$$

Vježba 095

Kolika je mjera kuta između pravaca $y = 3 \cdot x + 2$ i $x + 3 \cdot y + 4 = 0$?

Rezultat: 90°.

Zadatak 096 (Vesna, gimnazija)

Odredite a tako da pravci $(a^2 - 2 \cdot a) \cdot x + y - 1 = 0$ i $x - 8 \cdot y - 8 = 0$ budu međusobno okomiti.

Rješenje 096

Ponovimo!
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Zadane pravce napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l}\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot x+y-1=0\\ x-8\cdot y-8=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot x+1\\ -8\cdot y=-x+8\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot x+1\\ -8\cdot y=-x+8 \;/\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot x+1\\ y=\frac{1}{8}\cdot x-1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}k_1=-\left(a^2-2\cdot a\right)\\ k_2=\frac{1}{8}\end{array}\right\}.$$

Budući da pravci moraju biti međusobno okomiti slijedi:

$$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow -\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot\frac{1}{8}=-1 \Rightarrow -\left(a^2-2\cdot a\right)\cdot\frac{1}{8}=-1 \;/\cdot(-8) \Rightarrow a^2-2\cdot a=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-2\cdot a-8=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a^2-2\cdot a-8=0\\ a=1\;,\;b=-2\;,\;c=-8\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=1\;,\;b=-2\;,\;c=-8\\ a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm6}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=\frac{2+6}{2}\\ a_2=\frac{2-6}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=\frac{8}{2}\\ a_2=-\frac{4}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=4\\ a_2=-2\end{array}\right\}.$$

Vježba 096

Odredite a tako da pravci $(a^2 - 2 \cdot a) \cdot x + y + 5 = 0$ i $x - 8 \cdot y + 8 = 0$ budu međusobno okomiti.

Rezultat: $a_1 = 4$, $a_2 = -2$.

Zadatak 097 (Iva, srednja škola)

Nađi koeficijent smjera pravca $a \cdot x + 3 \cdot y - 14 = 0$, ako prolazi točkom $T(2, 4)$.

Rješenje 097

Ponovimo!
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Budući da točka T pripada pravcu, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca kako bismo izračunali parametar a.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(2,\ 4) \\ a\cdot x+3\cdot y-14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 2+3\cdot 4-14=0 \Rightarrow 2\cdot a+12-14=0 \Rightarrow 2\cdot a=-12+14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a=2 \Rightarrow 2\cdot a=2\ /:2 \Rightarrow a=1.$$

Koeficijent pravca iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x+3\cdot y-14=0 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\cdot x+3\cdot y-14=0 \Rightarrow x+3\cdot y-14=0 \Rightarrow 3\cdot y=-x+14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot y=-x+14\ /:3 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{14}{3} \Rightarrow k=-\frac{1}{3}.$$

Vježba 097

Nađi koeficijent smjera pravca a · x – y + 5 = 0, ako prolazi točkom T(1, 9).

Rezultat: k = 4.

Zadatak 098 (Mimi ☺, Ivonchy ☺, HTT)

Ako su pravci k · x + 2 · y + 7 = 0, x + 2 · k · y + 5 = 0 međusobno paralelni tada za realni parametar k vrijedi:

$$A.\ k=1 \qquad B.\ k=0 \qquad C.\ k=-1 \qquad D.\ k=\pm 1$$

Rješenje 098

Ponovimo!
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Najprije odredimo koeficijente smjerova zadanih pravaca.

$$\left.\begin{array}{l} k\cdot x+2\cdot y+7=0 \\ x+2\cdot k\cdot y+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot y=-k\cdot x-7 \\ 2\cdot k\cdot y=-x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot y=-k\cdot x-7\ /\cdot\frac{1}{2} \\ 2\cdot k\cdot y=-x-5\ /\cdot\frac{1}{2\cdot k} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{rcases} y = -\frac{k}{2} \cdot x - \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2 \cdot k} \cdot x - \frac{5}{2 \cdot k} \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} k_1 = -\frac{k}{2} \\ k_2 = -\frac{1}{2 \cdot k} \end{rcases}.$$

Budući da su pravci usporedni (paralelni), imaju jednake koeficijente smjerova pa vrijedi:

$$\begin{rcases} k_1 = -\frac{k}{2} \ , \ k_2 = -\frac{1}{2 \cdot k} \\ k_1 = k_2 \end{rcases} \Rightarrow -\frac{k}{2} = -\frac{1}{2 \cdot k} \Rightarrow -\frac{k}{2} = -\frac{1}{2 \cdot k} \ / \cdot (-2 \cdot k) \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = 1 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow k = \pm\sqrt{1} \Rightarrow k = \pm 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 098

Ako su pravci k · x + 2 · y + 5 = 0, x + 2 · k · y + 2 = 0 međusobno paralelni tada za realni parametar k vrijedi:

$A.\ k = 1 \qquad B.\ k = 0 \qquad C.\ k = -1 \qquad D.\ k = \pm 1$

Rezultat: D.

Zadatak 099 (Mimi ☺, Ivonchy ☺, HTT)

Odredite sve parametre $m \in R$ tako da pravci 3 · x + y = m i x + m · y = 2 budu usporedni.

$A.\ m = \frac{1}{3} \qquad B.\ m \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \qquad C.\ m \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \qquad D.\ m = 3$

Rješenje 099

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Najprije odredimo koeficijente smjerova zadanih pravaca.

$$\begin{rcases} 3 \cdot x + y = m \\ x + m \cdot y = 2 \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} y = -3 \cdot x + m \\ m \cdot y = -x + 2 \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} y = -3 \cdot x + m \\ m \cdot y = -x + 2 \ / \cdot \frac{1}{m} \end{rcases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-3\cdot x+m \\ y=-\frac{1}{m}\cdot x+\frac{2}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-3 \\ k_2=-\frac{1}{m} \end{array}\right\}.$$

Budući da su pravci usporedni (paralelni), imaju jednake koeficijente smjerova pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} k_1=-3 \ , \ k_2=-\frac{1}{m} \\ k_1=k_2 \end{array}\right\} \Rightarrow -3=-\frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{m}=3 \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{3}{1} \Rightarrow \frac{m}{1}=\frac{1}{3} \Rightarrow m=\frac{1}{3}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 099

Odredite sve parametre $m \in R$ tako da pravci $3 \cdot x + y = m$ i $x + m \cdot y = 7$ budu usporedni.

$A.\ m=\frac{1}{3}$ $\qquad B.\ m\in\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ $\qquad C.\ m\in\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ $\qquad D.\ m=3$

Rezultat: A.

Zadatak 100 (Mirko, srednja škola)

Jednadžba pravca koji je dvostruko strmiji od pravca $x - 2 \cdot y + 2 = 0$ i prolazi točkom $T(-2, -4)$ glasi:

$A.\ y=x$ $\qquad B.\ y=x-2$ $\qquad C.\ y=x+4$ $\qquad D.\ y=4\cdot x-4$

Rješenje 100

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

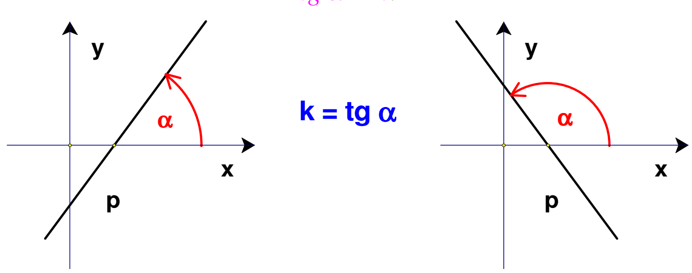
$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Prikloni kut i koeficijent smjera pravca

Kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko sjecišta pravca p i osi x do pravca p naziva se prikloni kut pravca. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\ \alpha=k.$$



Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$

Odredimo koeficijent smjera k zadanog pravca.

$$x-2\cdot y+2=0 \Rightarrow -2\cdot y=-x-2 \Rightarrow -2\cdot y=-x-2\ /:(-2) \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Budući da je traženi pravac dvostruko strmiji, njegov koeficijent smjera k_1 je dva puta veći od koeficijenta smjera k i iznosi:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \\ k_1 &= 2 \cdot k \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = 1.$$

Jednadžba traženog pravca glasi:

$$\left.\begin{aligned} &T\left(x_1, y_1\right) = T(-2, -4) \\ &k_1 = 1 \\ &y - y_1 = k_1 \cdot \left(x - x_1\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y - (-4) = 1 \cdot (x - (-2)) \Rightarrow y + 4 = 1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y + 4 = x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x + 2 - 4 \Rightarrow y = x - 2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 100

Jednadžba pravca koji je dvostruko strmiji od pravca x – 2 · y + 8 = 0 i prolazi točkom T(– 2, – 4) glasi:

$A.\ y = x$ $\quad B.\ y = x - 2$ $\quad C.\ y = x + 4$ $\quad D.\ y = 4 \cdot x - 4$

Rezultat: B.