Zadatak 001 (Denis, ekonomska škola)

U kojoj točki pravac s jednadžbom y = 2x – 8 siječe y–os?

Rješenje 001

Svaka točka koja pripada y–osi ima koordinate T(0, y). Budući da točka pripada i pravcu y = 2x – 8, uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca:

$$y = 2 \cdot 0 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = 0 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = -8.$$

Pravac siječe y–os u točki T(0, – 8).

Vježba 001

U kojoj točki pravac s jednadžbom y = –3x +6 siječe y–os?

Rezultat: T(0, 6).

Zadatak 002 (Denis, ekonomska škola)

U kojoj točki pravac s jednadžbom y = –5x – 20 siječe x–os?

Rješenje 002

Svaka točka koja pripada x–osi ima koordinate T(x, 0). Budući da točka pripada i pravcu y = –5x – 20, uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu pravca:

$$0 = -5x - 20 \quad \Rightarrow \quad 5x = -20 \;/ : 5 \quad \Rightarrow \quad x = -4.$$

Pravac siječe x–os u točki T(– 4, 0).

Vježba 002

U kojoj točki pravac s jednadžbom y = 3x –21 siječe x–os?

Rezultat: T(7, 0).

Zadatak 003 (Boris, tehnička škola)

Pretvori u segmentni oblik:

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

Rješenje 003

Segmentni oblik pravca ima oblik: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$,

gdje je m odsječak na x–osi, a n odsječak na y–osi. Broj –6 "prebacimo" na desnu stranu jednadžbe:

$$3x + 2y = 6.$$

Budući da na desnoj strani jednadžbe mora biti broj 1, cijelu jednadžbu podijelimo s 6:

$$3x + 2y = 6 \;/ : 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{6} + \frac{2y}{6} = 1.$$

Nakon skraćivanja razlomaka dobijemo rezultat:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Vježba 003

Pretvori u segmentni oblik: 2x – 5y + 10 = 0.

Rezultat: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1.$

Zadatak 004 (Gabi, Petra, gimnazija)

Odredi jednadžbu pravca okomitog na zadani pravac i koji prolazi točkom T, ako je 3x – 2y + 6 = 0, T(1, 2).

Rješenje 004

Zadani pravac 3x – 2y + 6 = 0 napišimo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijent smjera:

$$3x-2y+6=0 \;\Rightarrow\; -2y=-3x-6 \;/:(-2) \;\Rightarrow\; y=\frac{3}{2}\cdot x+3.$$

Koeficijent smjera je $\frac{3}{2}$.

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni. Na primjer,

k_1	1	2	–3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
k_2	– 1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{6}{7}$	8	– 9

Znači da je koeficijent okomitog pravca $-\frac{2}{3}$. Dakle, traženi pravac ima koeficijent smjera $-\frac{2}{3}$. i prolazi točkom T(1, 2).

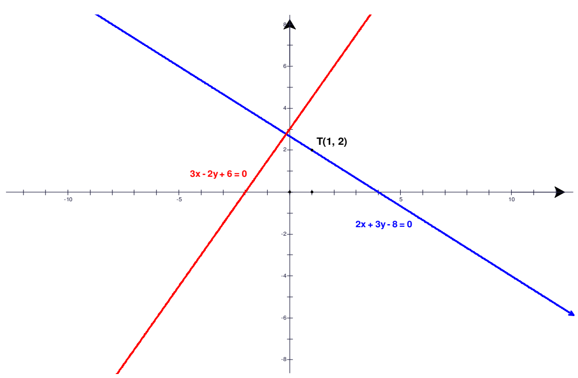
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Sada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} k=-\dfrac{2}{3} \\ \qquad\qquad \text{i} \qquad y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ T\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow\; y-2=-\frac{2}{3}\cdot(x-1) \;\Rightarrow\; y-2=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+2 \;\Rightarrow\; y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \;/\cdot 3 \;\Rightarrow\; 3y=-2x+8 \;\Rightarrow\; 2x+3y-8=0.$$



Vježba 004

Odredi jednadžbu pravca okomitog na zadani pravac i koji prolazi točkom T, ako je 3x + 8y – 24 = 0, T(2, –1).

Rezultat: 8x – 3y – 19 = 0.

Zadatak 005 (Gabi, Petra, gimnazija)

Odredi jednadžbu pravca usporednog (paralelnog) danom pravcu, koji prolazi točkom T, ako je 3x – y – 4 = 0, T(2, 8).

Rješenje 005

Zadani pravac 3x – y – 4 = 0 napišimo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijent smjera:

$$3x-y-4=0 \;\Rightarrow\; -y=-3x+4 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; y=3\cdot x-4.$$

Koeficijent smjera je 3.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su usporedni (paralelni) ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Koeficijent paralelnog pravca, također, je 3. Dakle, traženi pravac ima koeficijent smjera k = 3 i prolazi točkom T(2, 8).

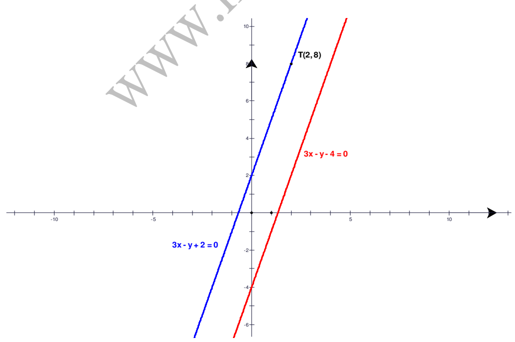
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Sada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} k=3 \\ \qquad\qquad \text{i} \qquad y-y_1=k\cdot(x-x_1) \\ T\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2, & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow y-8=3\cdot(x-2) \;\Rightarrow\; y-8=3x-6 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=3x+2 \;\Rightarrow\; 3x-y+2=0.$$



Vježba 005

Odredi jednadžbu pravca usporednog (paralelnog) danom pravcu, koji prolazi točkom T, ako je x – 2y – 2 = 0, T(1, 1).

Rezultat: x – 2y + 1 = 0.

Zadatak 006 (Katarina, ugostiteljska škola)

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi presjekom pravaca x + y – 7 = 0, 2x – y + 4 = 0 i točkom T(4, 3)?

Rješenje 006

Budući da se traži presjek pravaca x + y – 7 = 0 i 2x – y + 4 = 0, moramo riješiti sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Uporabit ćemo metodu suprotnih koeficijenata.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-7=0 \\ 2x-y+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 2x-y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3 \;/:3 \;\Rightarrow\; x=1.$$

Nepoznanicu y izračunamo tako da x = 1 uvrstimo u jednu od zadanih jednadžbi:

$$x + y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6.$$

Sjecište zadanih pravaca je točka S(1, 6). Kroz točke S i T trebamo odrediti pravac. Uporabit ćemo formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right).$$

Slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \quad x_1 \; y_1 \\ S(\,1\,,\,6\,) \\ \quad x_2 \; y_2 \\ T(\,4\,,\,3\,) \end{array}\right\} \Rightarrow \; y - 6 = \frac{3-6}{4-1} \cdot \left(x-1\right) \;\Rightarrow\; y - 6 = \frac{-3}{3} \cdot \left(x-1\right) \;\Rightarrow\; y - 6 = -1 \cdot \left(x-1\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y - 6 = -x + 1 \;\Rightarrow\; y = -x + 1 + 6 \;\Rightarrow\; y = -x + 7 \;\Rightarrow\; x + y - 7 = 0.$$

Vježba 006

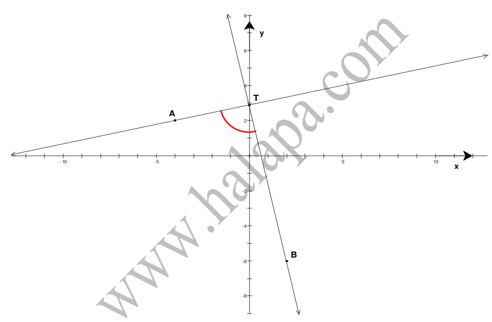
Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi presjekom pravaca x + y – 1 = 0, x – 2y + 1 = 0 i točkom T(0, 0)?

Rezultat: 2x – y = 0.

Zadatak 007 (Tea, gimnazija)

Zadane su točke A(– 4, 2), B(2, – 6). Na pozitivnom dijelu y – osi odredite točku T tako da su pravci AT i BT međusobno okomiti.

Rješenje 007



Budući da točka T leži na pozitivnom dijelu y – osi, ima koordinate T(0, y > 0).

Koeficijent smjera pravca AT je:

$$\left.\begin{array}{l} A(-4,2) \\ T(0,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \; k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y-2}{0+4} = \frac{y-2}{4}.$$

Koeficijent smjera pravca BT je:

$$\left.\begin{array}{l} B(2,-6) \\ T(0,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \; k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y+6}{0-2} = \frac{y+6}{-2}.$$

Zbog uvjeta okomitosti pravaca AT i BT vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; \frac{y-2}{4} \cdot \frac{y+6}{-2} = -1 \;\Rightarrow\; \frac{\left(y-2\right) \cdot \left(y+6\right)}{-8} = -1 \; / \cdot \left(-8\right) \;\Rightarrow\; \left(y-2\right) \cdot \left(y+6\right) = 8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y^2 + 6y - 2y - 12 - 8 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 + 4y - 20 = 0 \;\Rightarrow\; y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+80}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{6}}{2}.$$

$$y_1 = \frac{-4+4\sqrt{6}}{2} = -2+2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}-2, \quad y_2 = \frac{-4-4\sqrt{6}}{2} = -2-2\sqrt{6} = -2\sqrt{6}-2.$$

Po pretpostavci je y > 0 pa točka ima koordinate $T(0, 2\sqrt{6}-2)$.

Vježba 007

Zadane su točke A(– 4, 5), B(6, 0). Na pozitivnom dijelu y – osi odredite točku T tako da su pravci AT i BT međusobno okomiti.

Rezultat: T(0, 8).

Zadatak 008 (Viki, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \begin{cases} 2x+7, & x \in \langle -\infty, -2] \\ 3, & x \in [-2, 1] \\ -x+4, & x \in [1, +\infty\rangle. \end{cases}$

Rješenje 008

Funkcija se sastoji od tri dijela. Svaki dio rješavamo za sebe na pripadnom intervalu:

- f(x) = 2x + 7, za $x \in \langle -\infty, -2]$
- f(x) = 3, za $x \in [-2, 1]$
- f(x) = – x + 4, za $x \in [1, +\infty\rangle$.

Graf afine funkcije f(x) = 2x + 7 je pravac čija jednadžba glasi y = 2x + 7. Za crtanje pravca potrebno je zadati dvije točke. Za x uzet ćemo uvijek rubnu točku pripadnog intervala x = – 2 i jednu točku iz tog intervala, na primjer, x = – 3. Prikažimo to tablicom:

x	– 2	– 3
y	3	1
	y = 2 · (– 2) + 7 = = – 4 + 7 = 3	y = 2 · (– 3) + 7 = = – 6 + 7 = 1

Graf konstante f(x) = 3 je pravac paralelan s x – osi. Za crtanje pravca dovoljne su dvije točke. Za x uzet ćemo uvijek rubne točke pripadnog segmenta x = – 2 i x = 1. Tablični prikaz:

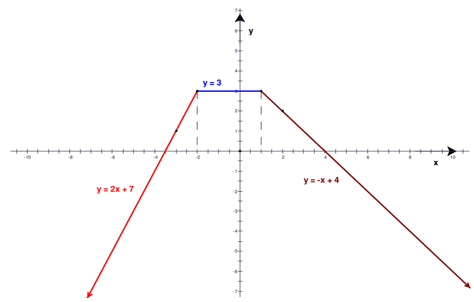
x	– 2	1
y	3	3
	y = 3	y = 3

Graf afine funkcije f(x) = – x + 4 je pravac čija je jednadžba y = – x + 4. Ponovno ćemo odrediti dvije točke. Za x uzet ćemo uvijek rubnu točku pripadnog intervala x = 1 i jednu točku točku iz tog intervala, na primjer, x = 2. Prikaz tablicom:

x	1	2
y	3	2
	y = – 1 + 4 = 3	y = – 2 + 4 = 2

Crtamo graf funkcije:

y = 2x + 7	y = 3	**y = – x + 4**
$x \in \langle -\infty, -2]$	$x \in [-2, 1]$	$x \in [1, +\infty\rangle$

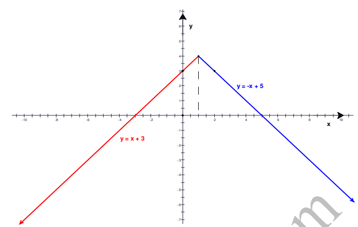


Vježba 008

Nacrtaj graf funkcije $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\in\langle-\infty, 1] \\ -x+5, & x\in[1,+\infty\rangle. \end{cases}$

Rezultat:

$y = x + 3$	$y = -x + 5$
$x\in\langle-\infty, 1]$	$x\in[1,+\infty\rangle$



Zadatak 009 (Ivana, Zoran, Anamarija, Sandra, Nina, gimnazija)

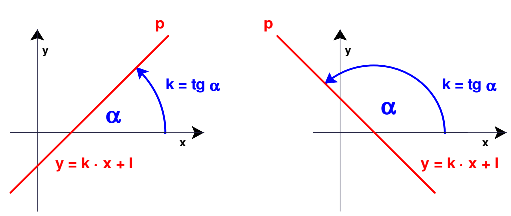
Izvedi formulu za kut dva pravca.

Rješenje 009

Ponovimo prikloni kut pravca.

Prikloni kut pravca je kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko presjeka pravca i osi do pravca p. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

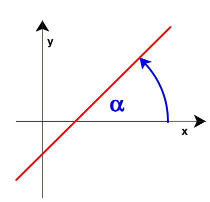
$$\operatorname{tg}\alpha = k.$$



Veza između nagiba pravca i veličine priklonog kuta:

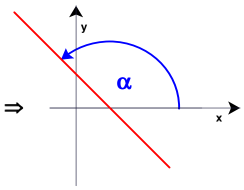
① Prikloni kut je šiljasti kut => tangens šiljastog kuta je pozitivan broj => koeficijent smjera je pozitivan broj.

$\alpha < 90° \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow$

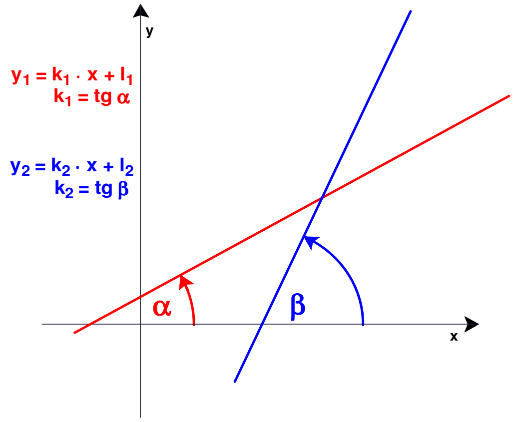


② Prikloni kut je tupi kut => tangens tupog kuta je negativan broj => koeficijent smjera je negativan broj.

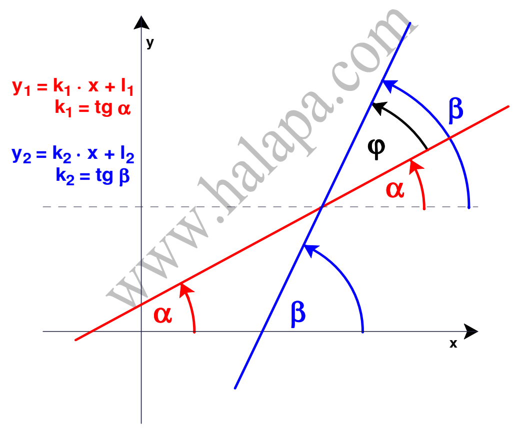
$\alpha > 90^\circ \;\Rightarrow\; tg\,\alpha < 0 \;\Rightarrow\; k < 0 \;\Rightarrow$



Neka su sada u ravnini zadana dva pravca čiji su prikloni kutovi α i β.



Kroz sjecište pravaca konstruiramo paralelu s apscisom (x – osi).



Iz slike se vidi da je kut dva pravca:

$$\varphi = \beta - \alpha.$$

Tada je tangens kuta jednak:

$$tg\,\varphi = tg\left(\beta - \alpha\right) = \frac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Budući da je φ šiljasti kut, znači da je tg φ ≥ 0. Zato pišemo:

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Vježba 009

Nađi kut među pravcima: y = x + 1 i y = – x + 1.

Rezultat: 90º.

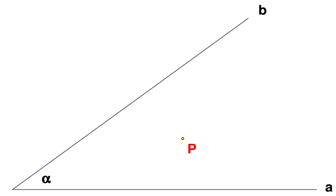
Zadatak 010 (Ivana, gimnazija)

Dani su kut α i unutar njega točka P. Konstruirajte točkom P pravac tako da točka P raspolavlja odsječak toga pravca unutar danog kuta α.

Rješenje 010

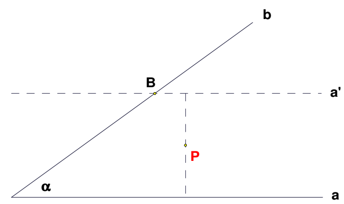
Opis konstrukcije:

1. korak



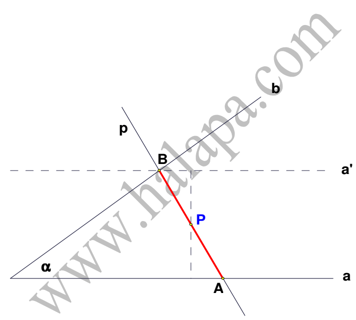
Zadan je kut α i unutar njega točka P.

2. korak



Kraku a kuta α konstruiramo centralno simetričnu sliku a' u odnosu prema točki P kao središtu simetrije. Pravac a' (a' | | a) siječe krak b u točki B.

3. korak

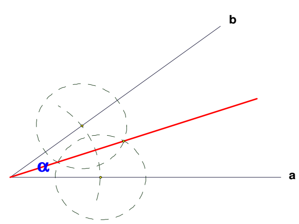


Spojimo točke B i P i tako dobijemo traženi pravac p koji će krak a sjeći u originalu točke B, točki A, te će P biti polovište dužine $\overline{AB}$. Rješenje zadatka je jednoznačno.

Vježba 010

Konstruiraj simetralu zadanog kuta α.

Rezultat:



Zadatak 011 (Ines, gimnazija)

Neka je f(x) = x – 2. U kojoj točki graf funkcije f^{-1} siječe os y?

Rješenje 011

1.inačica

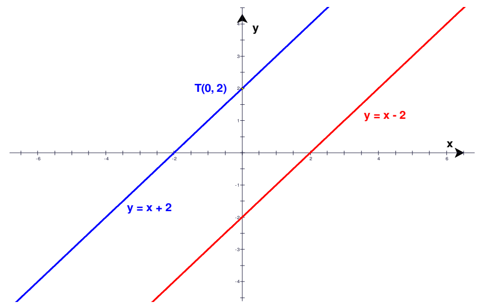
Za funkciju f(x) = x – 2 nađemo njezinu inverznu:

$$f(x) = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = f(x) + 2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x + 2.$$

Ako graf funkcije f^{-1} siječe os y vrijedi:

$$x = 0 \quad => \quad f^{-1}(0) = 0 + 2 = 2.$$

Sjecište je točka T(0, 2).

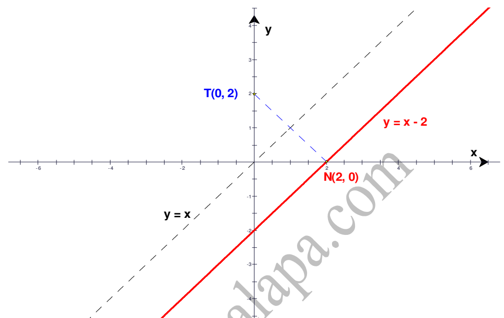


2.inačica

Odredimo nul-točku funkcije f(x) = x – 2:

$$x - 2 = 0 \quad => \quad x = 2 \quad \text{(to je nul-točka na osi x)} \quad => \quad N(2, 0).$$

Budući da je inverzna funkcija f^{-1} simetrična obzirom na pravac y = x (simatrala prvog i trećeg kvadranta), slijedi da graf funkcije f^{-1} siječe os y u točki T(0, 2).



Vježba 011

Neka je f(x) = x – 3. U kojoj točki graf funkcije f^{-1} siječe os y?

Rezultat: T(0, 3).

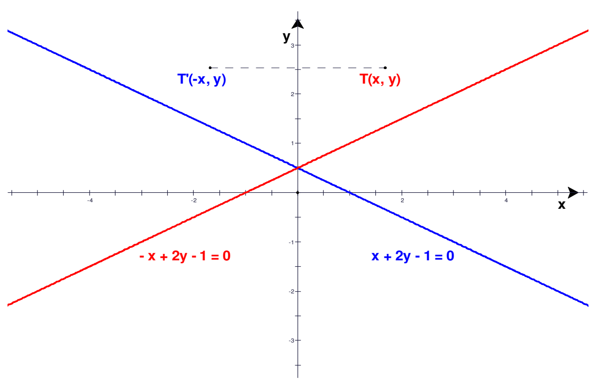
Zadatak 012 (Anastazija, gimnazija)

Kako glasi jednadžba zrcalne slike pravca – x + 2y – 1 = 0 s obzirom na y os?

Rješenje 012

Zrcalna slika točke T(x, y) s obzirom na y os je točka T'(– x, y). Dakle, točke koje su simetrične s obzirom na y os imaju za apscise suprotne brojeve. Tada jednadžba pravca glasi:

$$-x + 2y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; [x \;\rightarrow\; -x] \;\Rightarrow\; -(-x) + 2y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x + 2y - 1 = 0.$$



Vježba 012

Kako glasi jednadžba zrcalne slike pravca – x + 2y – 1 = 0 s obzirom na x os?

Rezultat: x + 2y + 1 = 0.

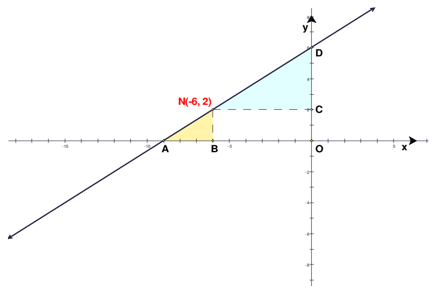
Zadatak 013 (Anastazija, gimnazija)

Točka N(– 6, 2) dijeli dio pravca koji se nalazi između koordinatnih osi u omjeru 1 : 2 računajući od x osi. Kako glasi jednadžba tog pravca?

Rješenje 013

Segmentni oblik jednadžbe pravca glasi: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$

gdje je m odsječak na x osi, a n odsječak na y osi. Zadatak ćemo riješiti pomoću sličnosti pa gledamo samo apsolutne vrijednosti!



Iz slike se vidi:

$$|AO| = m,\ |BO| = 6,\ |AB| = |AO| - |BO| = m - 6,$$

$$|OD| = n,\ |OC| = 2,\ |CD| = |OD| - |OC| = n - 2.$$

Zbog sličnosti pravokutnih trokuta ΔABN i ΔNCD slijedi razmjer:

$$|AN| : |ND| = |BN| : |CD| \Rightarrow 1 : 2 = 2 : (n - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (n - 2) = 2 \cdot 2 \Rightarrow n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6.$$

Također, iz sličnosti trokuta ΔABN i ΔNCD proizlazi sljedeći razmjer:

$$|AN| : |ND| = |AB| : |NC| \Rightarrow 1 : 2 = (m - 6) : 6 \Rightarrow 1 \cdot 6 = 2 \cdot (m - 6)\ \ / : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - 6 = 3 \Rightarrow m = 9.$$

Budući da pravac siječe negativan dio x osi i pozitivan dio y osi, njegova jednadžba je:

$$\frac{x}{-9}+\frac{y}{6}=1\ /\cdot(-18) \Rightarrow 2x-3y+18=0.$$

Vježba 013

Točka N(6, 2) dijeli dio pravca koji se nalazi između koordinatnih osi u omjeru 1 : 2 računajući od x osi. Kako glasi jednadžba tog pravca?

Rezultat: 2x + 3y – 18 = 0.

Zadatak 014 (Petra, gimnazija)

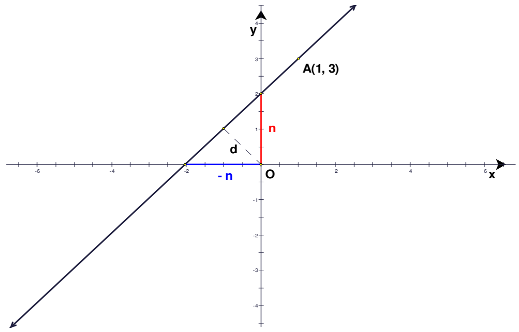
Pravac p prolazi točkom A(1, 3), a na koordinatnim osima odsijeca odsječke jednakih duljina, ali različitih predznaka. Kolika je udaljenost pravca p od ishodišta?

Rješenje 014

Jednadžba pravca u segmentnom obliku glasi: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$

gdje je m odsječak na x osi, a n odsječak na y osi. Pravac prolazi točkom A(1, 3) koja leži u prvom kvadrantu. Budući da na koordinatnim osima odsijeca odsječke jednakih duljina, ali različitih predznaka, mora biti:

$$\frac{x}{-n}+\frac{y}{n}=1\ /\cdot n \Rightarrow -x+y=n.$$



Točka A(1, 3) pripada pravcu pa ćemo njezine koordinate uvrstiti u jednadžbu pravca:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,\ 3) \\ -x+y=n \end{array}\right\} \Rightarrow\ -1+3=n\ \Rightarrow\ n=2.$$

Dakle, jednadžba pravca glasi:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1\ /\cdot(-2)\ \Rightarrow\ x-y+2=0.$$

Ako su zadani točka T(x_0, y_0) i pravac Ax + By + C = 0, udaljenost točke T od pravca računa se po formuli:

$$d=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Traži se udaljenost pravca x – y + 2 = 0 od ishodišta O(0, 0):

$$d=\frac{\left|1\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Vježba 014

Pravac p prolazi točkom A(2, 2), a na koordinatnim osima odsijeca odsječke jednakih duljina i predznaka. Kolika je udaljenost pravca p od ishodišta?

Rezultat: $2\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 015 (Petra, gimnazija)

Zadani su vrhovi A(1, 2) i B(3, 1) jednakokračnog trokuta ABC. Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži vrh C?

Rješenje 015

Budući da je točka C(x, y) jednako udaljena od točaka A i B, vrijedi:

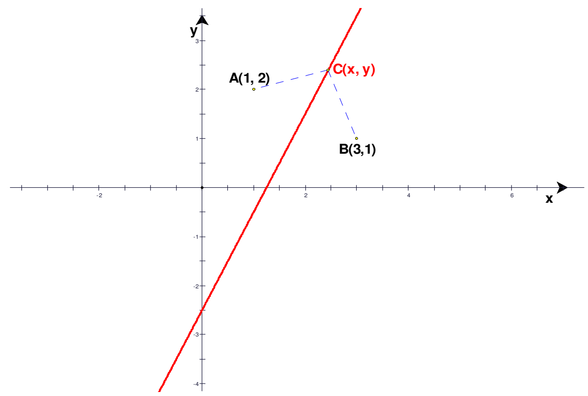
$$\left|AC\right|=\left|BC\right|\ \Rightarrow\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2},$$

gdje su x i y koordinate točke C. Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}\ /^{\sqrt{\ }}\ \Rightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-1)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-6x+9+y^2-2y+1\ \Rightarrow\ -2x+1-4y+4+6x-9+2y-1=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4x-2y-5=0.$$



Vježba 015

Zadani su vrhovi A(3, 1) i B(1, 2) jednakokračnog trokuta ABC. Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži vrh C?

Rezultat: 4x – 2y – 5 = 0.

Zadatak 016 (Marko, gimnazija)

Kolika je vrijednost parametra m ako pravac m · x – y – 2 = 0 prolazi težištem trokuta čiji su vrhovi A(0, 0), B(2, 1), C(4, 8)?

Rješenje 016

Koordinate težišta trokuta A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) jesu:

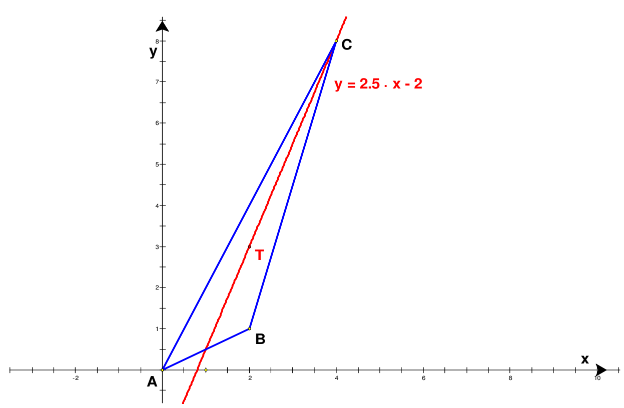
$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad , \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Za dani trokut koordinate iznose:

$$x_T = \frac{0+2+4}{3} = 2 \quad , \quad y_T = \frac{0+1+8}{3} = 3.$$

Ako koordinate težišta T(2, 3) uvrstimo u jednadžbu pravca dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot x - y - 2 = 0 \\ T(2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot 2 - 3 - 2 = 0 \Rightarrow 2m - 5 = 0 \Rightarrow 2m = 5 \Rightarrow m = 2.5.$$



Vježba 016

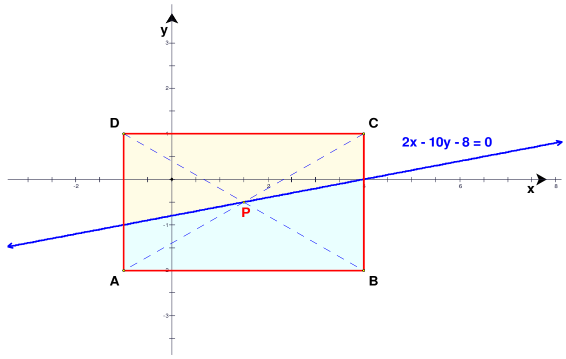
Kolika je vrijednost parametra m ako pravac m · x – y – 2 = 0 prolazi težištem trokuta čiji su vrhovi A(0, 0), B(1, 2), C(5, 7)?

Rezultat: m = 2.5.

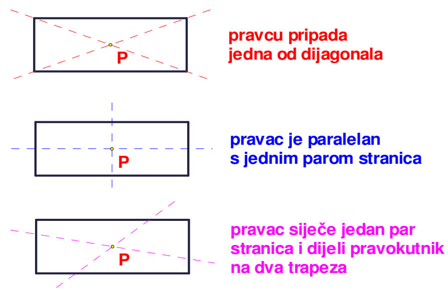
Zadatak 017 (Ines, gimnazija)

Površina pravokutnika ABCD s vrhovima A(– 1, – 2), B(4, – 2), C(4, 1), D(– 1, 1) prepolovljena je pravcem 2x + my – 8 = 0. Kolika je vrijednost parametra m?

Rješenje 017



Pravokutnik može na više načina biti prepolovljen pravcem:



Može se pokazati da u svim slučajevima točka u kojoj se sijeku dijagonale pravokutnika pripada traženom pravcu. Koordinate sjecišta dijagonala odrede se kao polovište dužine $\overline{AC}$ (ili $\overline{BD}$):

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Uvrštavanjem točke $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ u jednadžbu pravca 2x + my – 8 = 0 dobijemo:

$$2 \cdot \frac{3}{2} + m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = 0 \; / \cdot 2 \;\Rightarrow\; 6 - m - 16 = 0 \;\Rightarrow\; m = -10.$$

Vježba 017

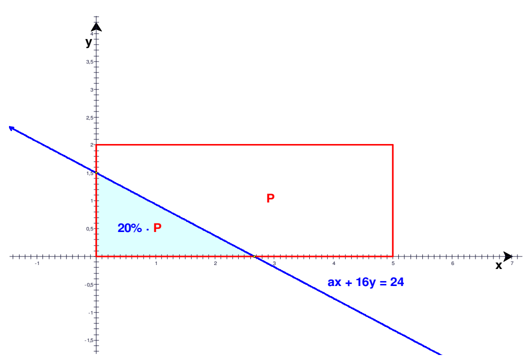
Površina pravokutnika ABCD s vrhovima A(– 1, – 2), B(4, – 2), C(4, 1), D(– 1, 1) prepolovljena je pravcem x + my – 8 = 0. Kolika je vrijednost parametra m?

Rezultat: m = – 13.

Zadatak 018 (Ines, gimnazija)

Zadan je pravokutnik **P** = {0 ≤ x ≤ 5, 0 ≤ y ≤ 2} i pravac ax + 16y = 24. Odredi a tako da površina dijela pravokutnika ispod pravca bude 20% ukupne površine pravokutnika.

Rješenje 018



Površina pravokutnika je P = 5 · 2 = 10. Površina ispod pravca iznosi 20% ukupne površine:

$$P_p = 20\% \cdot P = \frac{20}{100} \cdot 10 = 2.$$

Napišimo segmentni oblik jednadžbe pravca:

$$ax + 16y = 24 \; /:24 \;\Rightarrow\; \frac{ax}{24} + \frac{16y}{24} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\frac{24}{a}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \;\Rightarrow\; m = \frac{24}{a}, \;\; n = \frac{3}{2}.$$

Površina trokuta koji pravac zatvara s koordinatnim osima je:

$$P = \frac{|m \cdot n|}{2} \;\Rightarrow\; 2 = \frac{\left|\frac{24}{a} \cdot \frac{3}{2}\right|}{2} \;\Rightarrow\; 4 = \left|\frac{36}{a}\right| \;\Rightarrow\; 4 = \frac{36}{|a|} \;\Rightarrow\; |a| = 9 \;\Rightarrow\; a = +9.$$

Drugo rješenje a = – 9 nema smisla. Za a = – 9 pravokutnik bi trebao biti u II. kvadrantu.

Vježba 018

Zadan je pravokutnik **P** = {0 ≤ x ≤ 5, 0 ≤ y ≤ 2} i pravac ax + 16y = 24. Odredi a tako da površina dijela pravokutnika iznad pravca bude 80% ukupne površine pravokutnika.

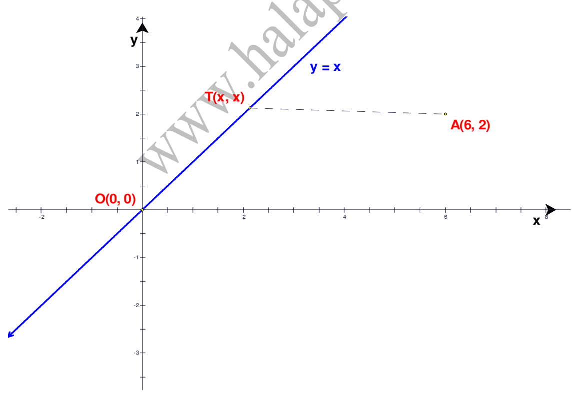
Rezultat: a = 9.

Zadatak 019 (Ines, gimnazija)

Odredi točku na simetrali 1. i 3. kvadranta koja je jednako udaljena od točaka O(0, 0) i A(6, 2).

Rješenje 019

1.inačica



Budući da točka T leži na simetrali 1. i 3. kvadranta, y = x, njezine su koordinate jednake: T(x, x). Točka T je jednako udaljena od točaka O(0, 0) i A(6, 2) pa vrijedi:

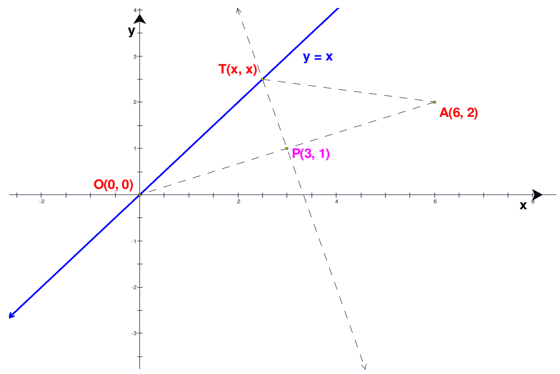
$$|OT| = |AT| \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (x-2)^2} \;\; /\sqrt{\;} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 + x^2 = (x-6)^2 + (x-2)^2 \;\Rightarrow\; 2x^2 = x^2 - 12x + 36 + x^2 - 4x + 4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 16x = 40 \;\; /:16 \;\Rightarrow\; x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}.$$

Koordinate točke su $T\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

2. inačica



Odredimo koeficijent smjera pravca OA:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{6-0} = \frac{1}{3}.$$

Simetrala dužine $\overline{OA}$ je pravac koji je okomit na pravac OA pa je njegov koeficijent smjera jednak k = – 3. Nađemo polovište dužine $\overline{OA}$:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = P\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = P(3, 1).$$

Jednadžba simetrale je:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \;\Rightarrow\; y - 1 = -3 \cdot (x - 3) \;\Rightarrow\; y = -3x + 10.$$

Točku T odredimo tako da nađemo presjek pravaca (riješimo sustav jednadžbi):

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -3x + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3x + 10 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Točka T ima koordinate $T\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$

Vježba 019

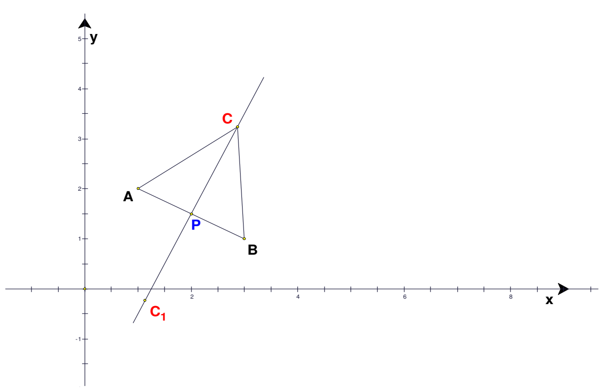
Odredi točku na simetrali 1. i 3. kvadranta koja je jednako udaljena od točaka O(0, 0) i A(2, 2).

Rezultat: T(1, 1).

Zadatak 020 (Mario, tehnička škola)

Zadani su vrhovi A(1, 2), B(3, 1) jednakostraničnog trokuta ABC. Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži visina iz vrha C?

Rješenje 020



Koeficijent smjera pravca koji prolazi točkama A i B glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(3, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}.$$

Budući da je trokut ABC jednakostraničan, pravac na kojem leži visina iz vrha C (C_1) raspolavlja dužinu $\overline{AB}$ u točki P:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(3, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = P\left(2, \frac{3}{2}\right).$$

Pravac na kojem leži visina iz vrha C je okomit na pravac AB pa za njegov koeficijent smjera vrijedi:

$$k_{CP} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Budući da je zadana točka P i koeficijent smjera k_{CP}, jednadžba traženog pravca glasi:

$$\left.\begin{matrix} P\left(2, \frac{3}{2}\right) \\ k_{CP} = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - y_1 = k_{CP} \cdot \left(x - x_1\right) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 4 + \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2x - \frac{5}{2}.$$

Vježba 020

Zadani su vrhovi A(1, 2), B(3, 1) jednakostraničnog trokuta ABC. Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži težišnica iz vrha C?

Rezultat: $y = 2x - \frac{5}{2}.$