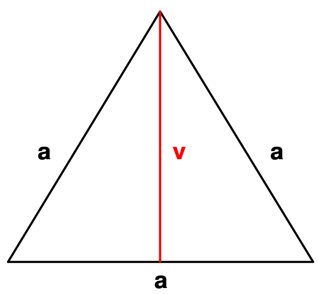
Zadatak 021 (Los-Habalos, gimnazija)

U pravilnu trostranu (uspravnu) prizmu upisana je kugla koja dodiruje sve plohe prizme. Nađite omjer oplošja kugle i oplošja prizme.

Rješenje 021

Ponovimo!



Duljina visine v jednakostraničnog trokuta duljine stranice a iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot v \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

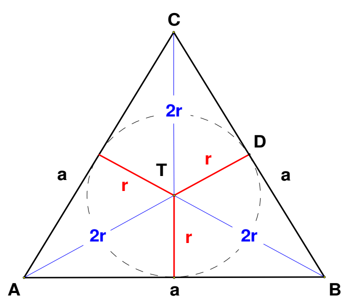
Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a je:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Oplošje kugle iznosi:

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Oplošje pravilne uspravne trostrane prizme računa se po formuli:



$$O = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot a \cdot h.$$

Budući da kugla dodiruje sve plohe prizme, visina prizme je:

$$h = 2 \cdot r.$$

Kod jednakostraničnog trokuta visine i težišnice podudaraju se pa je točka T težište koje dijeli svaku težišnici (i visinu) u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta. Sa slike vidi se:

$$v = |AD| = 3 \cdot r \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 3 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 2 \cdot r \cdot \sqrt{3}.$$

Računamo omjer oplošja kugle i prizme:

$$\frac{O_k}{O_p} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{\frac{\left(2 \cdot r \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 2 \cdot r \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot r} \Rightarrow \frac{O_k}{O_p} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{\frac{12 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 12 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_k}{O_p} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{6 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{O_k}{O_p} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi}{18 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{O_k}{O_p} = \frac{2 \cdot \pi}{9 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow O_k : O_p = 2\pi : 9\sqrt{3}.$$

Vježba 021

U pravilnu trostranu (uspravnu) prizmu upisana je kugla koja dodiruje sve plohe prizme. Nađite omjer oplošja prizme i oplošja kugle.

Rezultat: $O_p : O_k = 9\sqrt{3} : 2\pi.$

Zadatak 022 (Los-Habalos, gimnazija)

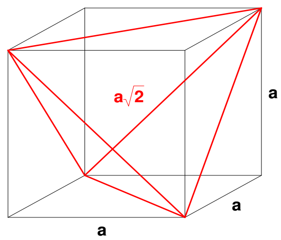
U kocku je upisan tetraedar tako da su mu bridovi plošne dijagonale kocke. Nađite omjer obujma kocke i obujma tetraedra.

Rješenje 022

Ponovimo!

Obujam kocke: $V = a^3.$

Obujam tetraedra: $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$



Budući da je a duljina brida kocke, a duljina brida tetraedra $a \cdot \sqrt{2}$, slijedi:

$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{a^3}{\frac{\left(a \cdot \sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12}} \Rightarrow \frac{V_k}{V_t} = \frac{a^3}{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2}}{12}} \Rightarrow \frac{V_k}{V_t} = \frac{12}{\sqrt{2^4}} \Rightarrow \frac{V_k}{V_t} = \frac{12}{2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_k}{V_t} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{V_k}{V_t} = \frac{3}{1} \Rightarrow V_k : V_t = 3 : 1.$$

Vježba 022

U kocku je upisan tetraedar tako da su mu bridovi plošne dijagonale kocke. Nađite omjer obujma tetraedra i obujma kocke.

Rezultat: $V_t : V_k = 1 : 3.$

Zadatak 023 (Ana, srednja škola)

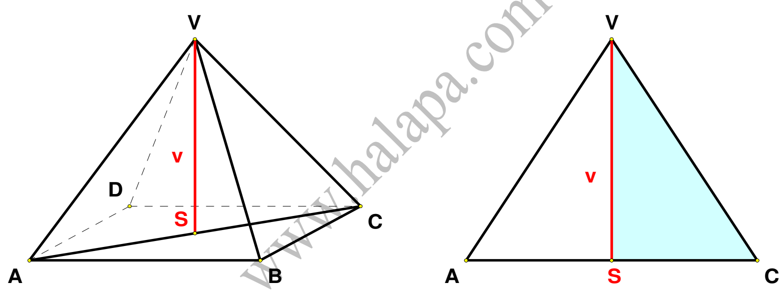
U pravilnu četverostranu piramidu kojoj su svi bridovi dugi 20 cm upisana je kocka, tako da su joj četiri vrha u osnovki piramide, a četiri na bočnim bridovima. Koliki je obujam kocke?

Rješenje 023

Ponovimo!

Ako je zadan kvadrat duljine stranice a, duljina njegove dijagonale iznosi $d = a \cdot \sqrt{2}.$

Najprije izračunamo visinu piramide ABCDV koristeći njezin dijagonalni presjek (jednakokračni trokut ACV):



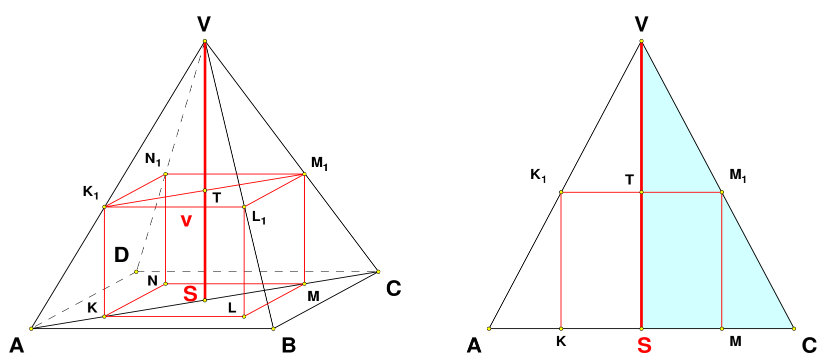
Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AV| = |BV| = |CV| = |DV| = 20 \;,\; |AC| = 20 \cdot \sqrt{2} \;,\; |SC| = 10 \cdot \sqrt{2}.$$

Uočimo pravokutan trokut SCV i pomoću Pitagorina poučka nađemo visinu v:

$$v = |VS| = \sqrt{|CV|^2 - |SC|^2} \Rightarrow v = \sqrt{20^2 - \left(10 \cdot \sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow v = \sqrt{400 - 200} \Rightarrow v = \sqrt{200} \Rightarrow v = 10 \cdot \sqrt{2}.$$

U piramidu je upisana kocka tako da su joj četiri vrha u osnovki piramide, a četiri na bočnim bridovima.



Sa slike vidi se:

$$|KL| = |LM| = |LL_1| = a \ , \ |TS| = a \ , \ |KM| = a \cdot \sqrt{2} \ , \ |SM| = |TM_1| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2},$$

$$|TV| = |VS| - |TS| = 10 \cdot \sqrt{2} - a.$$

Promatramo dijagonalne presjeke piramide i kocke (pravokutnik KMM_1K_1 upisan u jednakokračan trokut ACV).

Trokuti ΔVSC i ΔVTM_1 su slični (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|SC|}{|VS|} = \frac{|TM_1|}{|TV|} \Rightarrow \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{10 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}}{10 \cdot \sqrt{2} - a} \Rightarrow 1 = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \left(10 \cdot \sqrt{2} - a\right)} \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \left(10 \cdot \sqrt{2} - a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot a \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot a = 20 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot \left(\sqrt{2} + 2\right) = 20 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}{4 - 2} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow a = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 20 \cdot \sqrt{2} - 20 \Rightarrow a = 20 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow a = 20 \cdot (1.41 - 1) \Rightarrow a = 20 \cdot 0.41 \Rightarrow a = 8.2 \ cm.$$

Obujam kocke iznosi:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (8.2 \ cm)^3 \Rightarrow V = 551.4 \ cm^3.$$

Vježba 023

U pravilnu četverostranu piramidu kojoj je osnovni brid dug 20 cm, a bočni brid iznosi 15 cm upisana je kocka, tako da su joj četiri vrha u osnovki piramide, a četiri na bočnim bridovima. Koliki je obujam kocke?

Rezultat: 64 cm^3.

Zadatak 024 (Hrvoje, srednja škola)

Kocki je upisana i opisana kugla. Izračunaj omjer volumena upisane i opisane kugle.

Rješenje 024

Ponovimo!

Ako je a brid kocke, njezina prostorna dijagonala iznosi:

$$D = a \cdot \sqrt{3}.$$

Obujam kugle polumjera r je:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Neka je a brid zadane kocke. Tada je:

- polumjer upisane kugle $r_u = \frac{1}{2} \cdot a$
- polumjer opisane kugle $r_o = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}.$

Računamo omjer volumena upisane i opisane kugle:

$$\frac{V_u}{V_o}=\frac{\frac{4}{3}\cdot r_u^3\cdot\pi}{\frac{4}{3}\cdot r_o^3\cdot\pi}\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{r_u^3}{r_o^3}\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\left(\frac{r_u}{r_o}\right)^3\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot a}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}}\right)^3\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{1}{\sqrt{3^3}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\\text{korjenovanje}\end{array}\right]\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{1}{\sqrt{3^2\cdot 3}}\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{array}\right]\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{V_u}{V_o}=\frac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V_u:V_o=\sqrt{3}:9.$$

Vježba 024

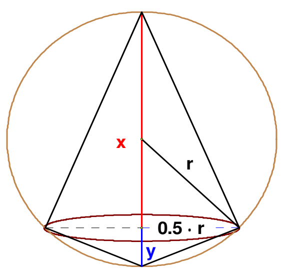
Kocki je upisana i opisana kugla. Izračunaj omjer volumena opisane i upisane kugle.

Rezultat: $V_o:V_u=9:\sqrt{3}.$

Zadatak 025 (Marijana, maturantica)

U kuglu polumjera r upisana su dva uspravna stožca s istim polumjerima baze jednakim $0.5\cdot r$, ali s različitim visinama. Koliki je zbroj njihovih volumena?

Rješenje 025



Neka su x i y visine upisanih stožaca u kuglu polumjera r. Zbroj volumena stožaca iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}V_1=\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot x\\V_2=\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot y\\x+y=2\cdot r\end{array}\right\}\Rightarrow V_1+V_2=\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot x+\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot y=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot(0.5\cdot r)^2\cdot\pi\cdot 2\cdot r=\frac{1}{3}\cdot 0.25\cdot r^2\cdot\pi\cdot 2\cdot r=\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot r^3\cdot\pi=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot r^3\cdot\pi=\frac{r^3\cdot\pi}{6}.$$

Vježba 025

U kuglu polumjera 6 upisana su dva uspravna stožca s istim polumjerima baze jednakim 3, ali s različitim visinama. Koliki je zbroj njihovih volumena?

Rezultat: $36\cdot\pi.$

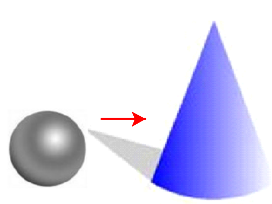
Zadatak 026 (Marijana, maturantica)

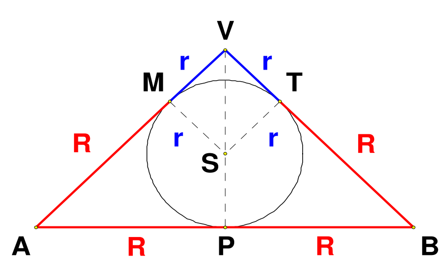
Vršni kut uspravnog stožca je pravi. Ako mu je polumjer upisane kugle jednak $\sqrt{2}$, nađi polumjer baze stožca.

Rješenje 026

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0\quad,\quad\left(a\cdot\sqrt{b}\right)^2=a^2\cdot b.$$





Sa slike vidi se:

$$|AB| = 2 \cdot R \quad , \quad |BV| = |BT| + |TV| = R + r = R + \sqrt{2} \quad , \quad |AV| = |AM| + |MV| = R + r = R + \sqrt{2}$$

$$|BV| = |AV|.$$

Trokut ABV je pravokutan trokut pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$|AB|^2 = |BV|^2 + |AV|^2 \Rightarrow (2 \cdot R)^2 = \left(R + \sqrt{2}\right)^2 + \left(R + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (2 \cdot R)^2 = 2 \cdot \left(R + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot R^2 = 2 \cdot \left(R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{2} + 2\right) \Rightarrow 4 \cdot R^2 = 2 \cdot R^2 + 4 \cdot R \cdot \sqrt{2} + 4 \Rightarrow 4 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot \sqrt{2} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot \sqrt{2} - 4 = 0 \; /:2 \Rightarrow R^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot R - 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot R - 2 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = -2 \cdot \sqrt{2} \; , \; c = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \; , \; b = -2 \cdot \sqrt{2} \; , \; c = -2 \\ R_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \pm \sqrt{\left(-2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{1,2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 8}}{2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \pm 4}{2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2} \pm 2\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{1,2} = \sqrt{2} \pm 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 = \sqrt{2} - 2 \text{ nema smisla} \\ R_2 = \sqrt{2} + 2 \text{ rješenje} \end{array}\right\}.$$

Vježba 026

Vršni kut uspravnog stožca je pravi. Ako mu je polumjer upisane kugle jednak $\sqrt{2}$, nađi opseg baze stožca.

Rezultat: $2 \cdot \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot \pi.$

Zadatak 027 (Valentina, maturantica)

Pravokutni jednakokračni trokut i njemu upisana kružnica rotiraju oko najkraće visine trokuta. Nađi omjer volumena rotacijom nastalih tijela.

Rješenje 027

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \Rightarrow \alpha = \beta \\ a = c \Rightarrow \alpha = \gamma \\ b = c \Rightarrow \beta = \gamma \end{array}\right\}.$$

Nasuprot jednakim kutovima nalaze se jednake stranice:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta \Rightarrow a = b \\ \alpha = \gamma \Rightarrow a = c \\ \beta = \gamma \Rightarrow b = c \end{array}\right\}.$$

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (pravi kut iznosi 90º).
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

$$\sin 45^{0}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

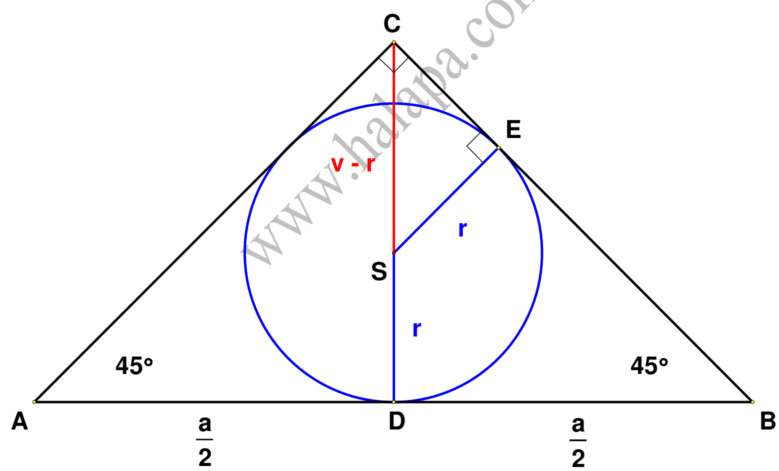
Obujam (volumen) uspravnog ili kosog stošca s polumjerom baze r i visinom v iznosi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot \mathrm{v}.$$

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

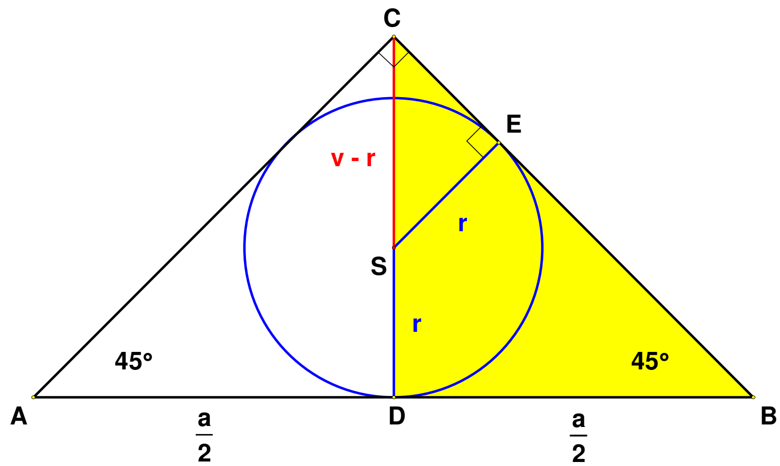
$$V=\frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi.$$

Slovom a označimo osnovicu, a slovom v visinu jednakokračnog pravokutnog trokuta. Polumjer upisane kružnice neka je r.
Sa slike vidi se:



$$|AD|=|DB|=\frac{a}{2} \quad , \quad |DC|=\mathrm{v} \quad , \quad |SE|=|SD|=r \quad , \quad |SC|=|DC|-|DS|=\mathrm{v}-r.$$

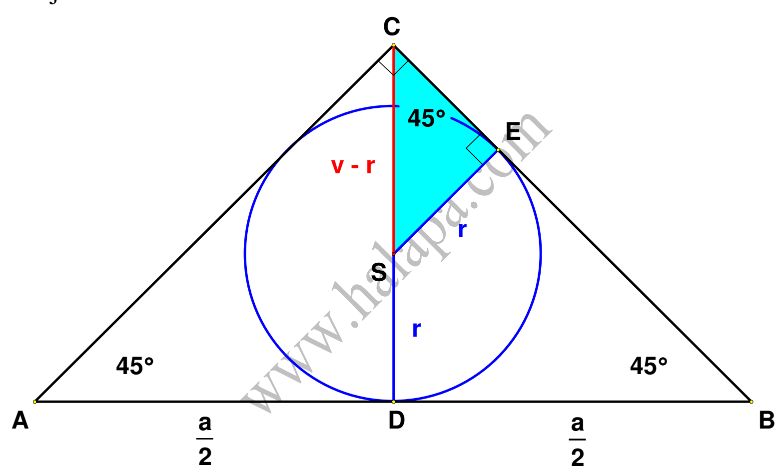
Rotacijom trokuta i njemu upisane kružnice oko visine v (ona je najkraća u trokutu) dobije se stožac visine v i polumjera baze $\frac{a}{2}$, te kugla polumjera r. Uočimo pravokutan jednakostraničan trokut CDB.



Tada je:

$$|DC| = |DB| \Rightarrow \text{v} = \frac{a}{2}.$$

Uočimo pravokutan jednakokračan trokut CSE.



Tada je:

$$\sin 45^0 = \frac{|SE|}{|SC|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\text{v} - r} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot (\text{v} - r) = 2 \cdot r \Rightarrow \text{v} \cdot \sqrt{2} - r \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{v} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot r + r \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \text{v} \cdot \sqrt{2} = r \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \Rightarrow \text{v} \cdot \sqrt{2} = r \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \,/\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{v} = \frac{r \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{v} = \frac{r \cdot \left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{v} = \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{v} = \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{v} = r \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Iz sustava jednadžbi dobije se polumjer kugle r.

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{a}{2} \\ v = r \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow r \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{a}{2} \Rightarrow r \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{a}{2} \; / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)}.$$

- Obujam stošca iznosi:

$$V_s = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow V_s = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi \Rightarrow V_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot \pi \Rightarrow V_s = \frac{1}{24} \cdot a^3 \cdot \pi.$$

- Obujam kugle iznosi:

$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a}{2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)}\right)^3 \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3}{2^3 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3}{8 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3}{8 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi.$$

Računamo omjer volumena stošca V_s i kugle V_k.

$$\frac{V_s}{V_k} = \frac{\frac{1}{24} \cdot a^3 \cdot \pi}{\frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi} \Rightarrow \frac{V_s}{V_k} = \frac{\frac{1}{24} \cdot a^3 \cdot \pi}{\frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3} \cdot \pi} \Rightarrow \frac{V_s}{V_k} = \frac{6 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3}{24} \Rightarrow \frac{V_s}{V_k} = \frac{6 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^3}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_s}{V_k} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}{4}.$$

Vježba 027

Jednakostranični trokut rotira oko jedne svoje visine. Nađi obujam rotacijom nastalog tijela.

Rezultat: $V = \frac{1}{24} \cdot a^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}.$

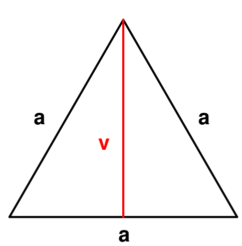
Zadatak 028 (Bole, maturant)

U polusferu polumjera R smještene su tri jednake kugle, tako da se diraju međusobno, diraju polusferu i njezinu bazu. Koliki je polumjer kugala?

Rješenje 028

Ponovimo!

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od središta S manja ili jednaka polumjeru r. Omeđena je sferom polumjera r, tj. skupom točaka prostora čija je udaljenost od središta jednaka r. Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine.



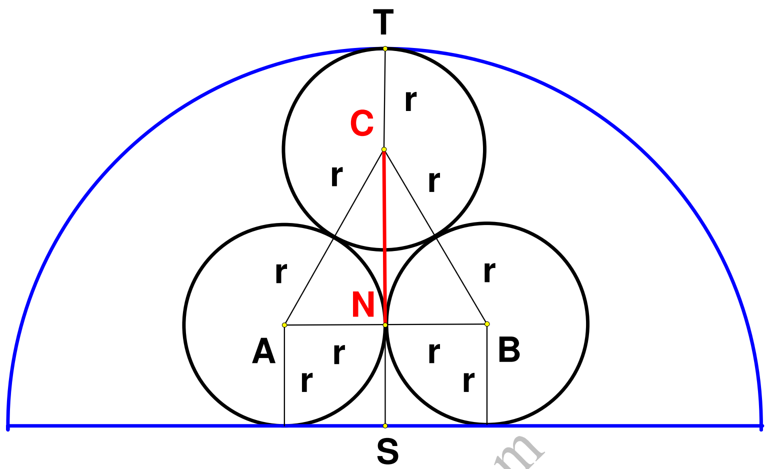
Visina jednakostraničnog trokuta:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

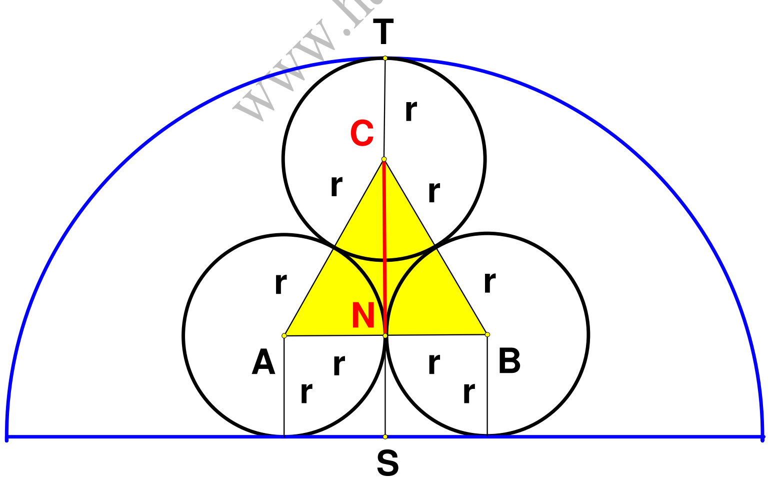
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$



Sa slike vidi se:

$$|ST| = R \quad , \quad |AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r \quad , \quad |SN| = |CT| = r$$

$$|NC| = |ST| - |SN| - |CT| = R - r - r = R - 2 \cdot r$$



Uočimo jednakostraničan trokut ABC za čiju visinu vrijedi:

$$|NC| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow R - 2 \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow R - 2 \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow R - 2 \cdot r = r \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = r \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot r \Rightarrow R = r \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right) \Rightarrow R = r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = R \;/\cdot \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{R}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{R \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)} \Rightarrow r = \frac{R \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow r = \frac{R \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{1} \Rightarrow r = R \cdot \left(2-\sqrt{3}\right).$$

Vježba 028

U polusferu polumjera R smještene su tri jednake kugle, tako da se diraju međusobno, diraju polusferu i njezinu bazu. Koliki je polumjer polusfere?

Rezultat: $R = r \cdot \left(2+\sqrt{3}\right).$

Zadatak 029 (Filip, srednja škola)

Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rješenje 029

Ponovimo!

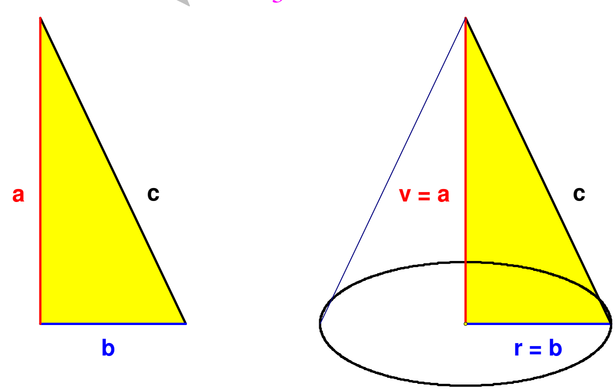
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Rotacijsko tijelo nastaje vrtnjom ravninskog lika oko pravca koji leži u istoj ravnini. Stožac je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Stožac je tijelo omeđeno krugom i stožastom plohom. Vrh stošca je točka najudaljenija od baze. Baza stošca je krug, a plašt mu je zakrivljena ploha. Pravac koji prolazi središtem baze i vrhom stošca je os stošca. Izvodnica stošca je dužina koja povezuje vrh stošca s točkom na obodu baze. Stožac je uspravan ako mu je os okomita na ravninu baze. Obujam uspravnog ili kosog stošca s polumjerom baze r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Pravokutan trokut zadan je duljinom hipotenuze c i duljinom katete a pa pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu druge katete b.

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{9^2 - 4^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{81-16} \Rightarrow b = \sqrt{65}.$$

Budući da pravokutan trokut rotira oko katete a, nastaje stožac čija je visina a i polumjer baze b.

$$v = a \quad , \quad r = b.$$

Obujam stošca iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{65}\right)^2 \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 65 \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow V = \frac{260}{3} \cdot \pi \ cm^3.$$

Vježba 029

Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 10 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 6 cm.

Rezultat: $128 \cdot \pi \ cm^3.$

Zadatak 030 (Dalibor, gimnazija)

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 24 cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam valjka?

$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$ $\quad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$ $\quad C.\ 772 \cdot \pi \ cm^3$ $\quad D.\ 1536 \cdot \pi \ cm^3$

Rješenje 030

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kocka je pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednake duljine. Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki. Formula za duljinu prostorne dijagonale glasi

$$D = a \cdot \sqrt{3}.$$

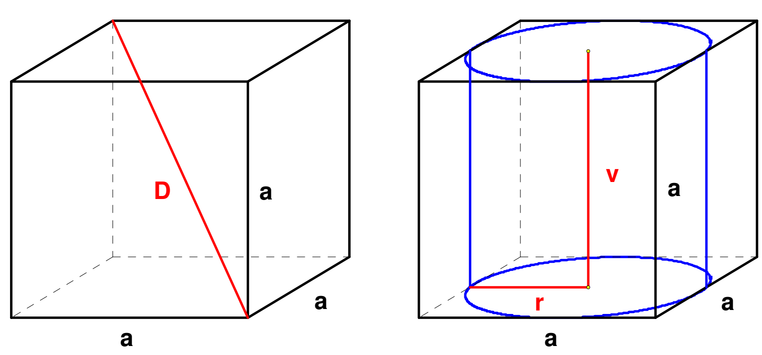
Uspravni je valjak tijelo nastalo rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Obujam uspravnog valjka jednak je umnošku površine osnovke (kruga polumjera r) i duljine visine v, tj.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Iz formule za duljinu prostorne dijagonale izračunamo duljinu brida kocke.

$$\left.\begin{array}{l} D = a \cdot \sqrt{3} \\ D = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = 24 \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = 24 \ / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3}.$$



Sa slike vidi se da je polumjer baze (kruga) valjka upisanog u kocku jednak

$$r = \frac{1}{2} \cdot a \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = 4 \cdot \sqrt{3},$$

a visina valjka

$$v = a \Rightarrow v = 8 \cdot \sqrt{3}.$$

Obujam valjka iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = 4^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 16 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 030

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je $6 \cdot \sqrt{3}$ cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam valjka?

$A.\ 54 \cdot \pi \ cm^3 \qquad B.\ 54 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3 \qquad C.\ 216 \cdot \pi \ cm^3 \qquad D.\ 36 \cdot \pi \ cm^3$

Rezultat: A.

Zadatak 031 (4A, TUPŠ)

Šalica u obliku valjka napunjena je vodom do pola visine. Koliko je decilitara vode u šalici ako joj je visina 10 cm, a polumjer 5 cm? (Napomena: 1 l = 1 dm^3)

$A.\ 0.16\ l \qquad B.\ 0.39\ l \qquad C.\ 1.57\ l \qquad D.\ 3.93\ l$

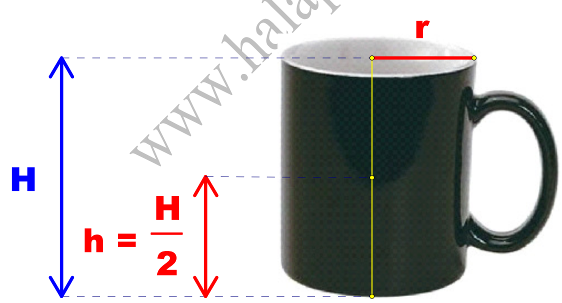
Rješenje 031

Ponovimo!

$$1\ dm = 10\ cm \quad , \quad 1\ cm = 0.1\ dm \quad , \quad 1\ dm^3 = 1\ l.$$

Uspravni je valjak tijelo nastalo rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Obujam uspravnog valjka jednak je umnošku površine osnovke (kruga polumjera r) i duljine visine v, tj.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Budući da je šalica u obliku valjka napunjena vodom do pola visine, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 5\ cm = 0.5\ dm \\ H = 10\ cm = 1\ dm \\ h = \dfrac{H}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r = 0.5\ dm \\ h = \dfrac{1\ dm}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r = 0.5\ dm \\ h = 0.5\ dm \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{volumen polovice valjka} \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot h \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(0.5\ dm\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.5\ dm \Rightarrow V = 0.39\ dm^3 \Rightarrow \left[1\ dm^3 = 1\ l\right] \Rightarrow V = 0.39\ l.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 031

Šalica u obliku valjka napunjena je vodom do pola visine. Koliko je decilitara vode u šalici ako joj je visina 10 cm, a polumjer 5 cm? (Napomena: 1 l = 1 dm^3)

$A.\ 0.16\ l \qquad B.\ 0.39\ l \qquad C.\ 1.57\ l \qquad D.\ 3.93\ l$

Rezultat: A.

Zadatak 032 (Antonio, tehnička škola)

Pravokutni trapez osnovica a = 10 cm, c = 2 cm, površine 90 cm^2 rotira oko veće osnovice. Nađi oplošje i volumen nastalog tijela.

Rješenje 032

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Vrste trapeza su: pravokutni (s dva prava kuta) i jednakokračni (s dva jednaka kraka).
Podsjetimo se formule za površinu trapeza:

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$

gdje su a i c osnovice trapeza, v visina trapeza.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Uspravni i kosi valjak jednakog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujme. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Ploština plašta uspravnog valjka polumjera r i visine v izračunava se formulom:

$$P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v.$$

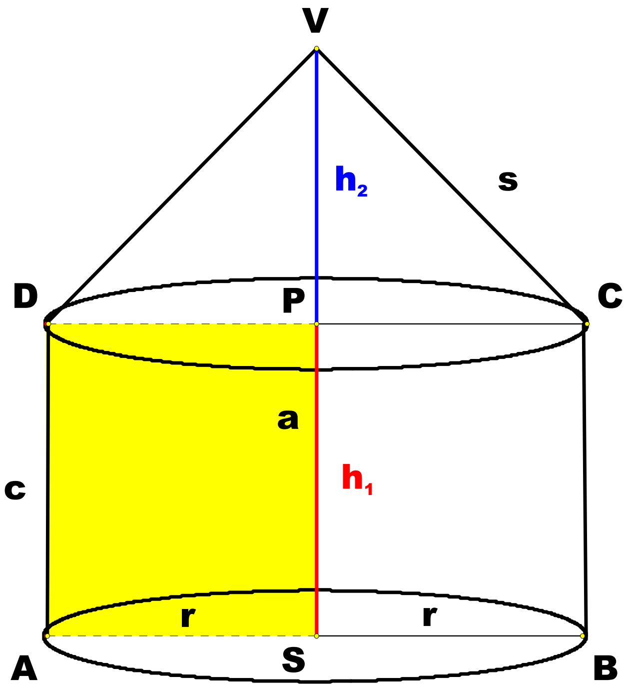
Obujam uspravnog ili kosog stošca s polumjerom baze r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Ploština plašta uspravnog stošca s bazom polumjera r i izvodnicom s iznosi:

$$P = r \cdot \pi \cdot s.$$

Geometrijska tijela koja nastaju vrtnjom nekog ravninskog lika oko istaknute osi nazivamo rotacijska tijela. Rotacijska tijela nastaju vrtnjom ravninskog lika oko pravca koji leži u istoj ravnini.
Valjak je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnika oko jedne njegove stranice.
Stožac je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete.



Sa slike vidi se:

$$|AS| = |SB| = |DP| = |PC| = r \ , \ |AD| = |SP| = |BC| = h_1 = c = 2$$

$$|PV| = h_2 \ , \ |SV| = a = 10 \ , \ |CV| = s$$

Budući da je zadana površina trapeza, možemo izračunati njegovu visinu v.

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ c = 2 \\ P = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{a+c}{2} \cdot v \right] \Rightarrow 90 = \frac{10+2}{2} \cdot v \Rightarrow 90 = \frac{12}{2} \cdot v \Rightarrow 90 = \frac{12}{2} \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90 = 6 \cdot v \Rightarrow 6 \cdot v = 90 \Rightarrow 6 \cdot v = 90 \ /:6 \Rightarrow v = 15.$$

Visina v trapeza istodobno je polumjer r osnovke valjka.

$$\left.\begin{array}{l} r = v \\ v = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 15.$$

Uočimo pravokutan trokut VPC čije su katete

$$\left.\begin{array}{l} h_2 = |PV| \\ r = |PC| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_2 = |SV| - |SP| \\ r = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_2 = a - c \\ r = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_2 = 10 - 2 \\ r = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_2 = 8 \\ r = 15 \end{array}\right\},$$

a hipotenuza

$$s = |CV|.$$

Nađemo duljinu izvodnice s uporabom Pitagorina poučka.

$$|CV|^2 = |PC|^2 + |PV|^2 \Rightarrow s^2 = r^2 + h_2^2 \Rightarrow s^2 = r^2 + h_2^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow s = \sqrt{r^2 + h_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{15^2 + 8^2} \Rightarrow s = 17.$$

Oplošje O rotacijskog tijela sastoji se od površine plašta P_s stošca, površine plašta P_v valjka i površine jedne osnovke (donje baze) B valjka.

$$O = P_s + P_v + B \Rightarrow O = r \cdot \pi \cdot s + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h_1 + r^2 \cdot \pi \Rightarrow \begin{bmatrix} r = 15 \\ s = 17 \\ h_1 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 15 \cdot \pi \cdot 17 + 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 2 + 15^2 \cdot \pi \Rightarrow O = 255 \cdot \pi + 60 \cdot \pi + 225 \cdot \pi \Rightarrow O = 540 \cdot \pi \ cm^2.$$

Obujam V rotacijskog tijela jednak je zbroju obujmova V_v valjka i V_s stošca.

$$V = V_v + V_s \Rightarrow V = r^2 \cdot \pi \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} r = 15 \\ h_1 = 2 \\ h_2 = 8 \end{bmatrix} \Rightarrow V = 15^2 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot \pi \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 450 \cdot \pi + 600 \cdot \pi \Rightarrow V = 1050 \cdot \pi \ cm^3.$$

Vježba 032

Pravokutni trapez osnovica a = 1 dm, c = 0.2 dm, površine 90 cm^2 rotira oko veće osnovice. Nađi oplošje i volumen nastalog tijela.

Rezultat: $O = 540 \cdot \pi \ cm^2$, $V = 1050 \cdot \pi \ cm^3$.

Zadatak 033 (Vedran, gimnazija)

Pravokutni trokut čije su katete a i b rotira najprije oko katete b, a zatim oko katete a. Nađimo omjer između volumena nastalih stožaca.

Rješenje 033

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

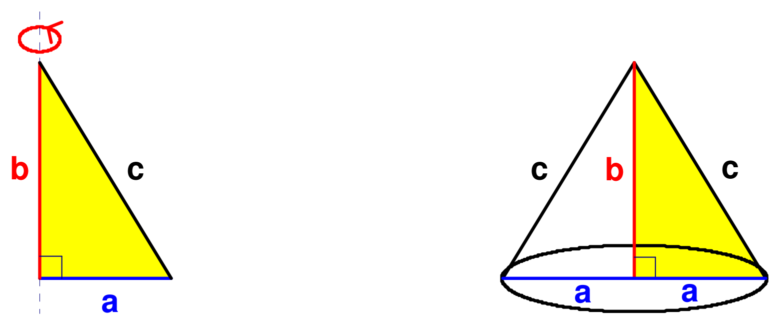
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Obujam uspravnog ili kosog stošca s polumjerom baze r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Uspravan valjak, stožac i kugla mogu nastati rotacijom nekog geometrijskog lika oko istaknutog pravca (osi rotacije, vrtnje).

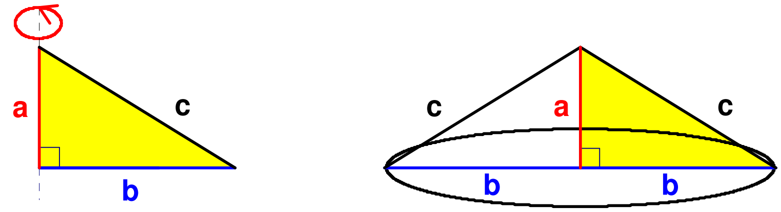
Rotacijom pravokutnog trokuta oko katete b dobije se stožac polumjera baze a i visine b.



Volumen iznosi:

$$\left. \begin{matrix} r = a \\ v = b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \right] \Rightarrow V_b = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot b.$$

Rotacijom pravokutnog trokuta oko katete a dobije se stožac polumjera baze b i visine a.



Volumen iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r=b \\ v=a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[V=\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot v\right] \Rightarrow V_{a}=\frac{1}{3}\cdot b^{2}\cdot\pi\cdot a.$$

Omjer između volumena nastalih stožaca iznosi:

$$\frac{V_b}{V_a}=\frac{\frac{1}{3}\cdot a^{2}\cdot\pi\cdot b}{\frac{1}{3}\cdot b^{2}\cdot\pi\cdot a} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a}=\frac{\frac{1}{3}\cdot a^{2}\cdot\pi\cdot b}{\frac{1}{3}\cdot b^{2}\cdot\pi\cdot a} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a}=\frac{a^{2}\cdot b}{b^{2}\cdot a} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a}=\frac{a^{2}\cdot b}{b^{2}\cdot a} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a}=\frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_b : V_a = a : b.$$

Vježba 033

Pravokutni trokut čije su katete a = 4 i b = 3 rotira najprije oko katete b, a zatim oko katete a. Nađimo omjer između volumena nastalih stožaca.

Rezultat: $V_b : V_a = 4 : 3.$

Zadatak 034 (Petar, srednja škola)

Ako se polumjer baze i visina stošca smanje dva puta volumen stošca smanji se:

$A.\ 4\ puta \qquad B.\ 6\ puta \qquad C.\ 8\ puta \qquad D.\ 16\ puta$

Rješenje 034

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Obujam uspravnog ili kosog stošca s polumjerom baze r i visinom v iznosi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot v.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot v \\ V_1=\frac{1}{3}\cdot r_1^{2}\cdot\pi\cdot v_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\cdot r_1^{2}\cdot\pi\cdot v_1}{\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\cdot r_1^{2}\cdot\pi\cdot v_1}{\frac{1}{3}\cdot r^{2}\cdot\pi\cdot v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{r_1^{2}\cdot v_1}{r^{2}\cdot v} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet} \\ r_1=\frac{1}{2}\cdot r \ , \ v_1=\frac{1}{2}\cdot v\end{array}\right] \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot r\right)^{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot v}{r^{2}\cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{4}\cdot r^{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot v}{r^{2}\cdot v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v}{r^2 \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \; / \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V.$$

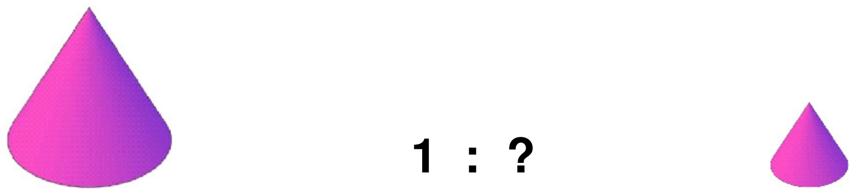
Odgovor je pod C.

2.inačica

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ r_1 = \frac{1}{2} \cdot r \;\; , \;\; v_1 = \frac{1}{2} \cdot v \end{array} \right] \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r \right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot v \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \right) \Rightarrow \left[V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \right] \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V.$$

Odgovor je pod C.



Vježba 034

Ako se polumjer baze smanji dva puta i visina stošca četiri puta volumen stošca smanji se:

$A.\ 4\ puta$ $\qquad B.\ 6\ puta$ $\qquad C.\ 8\ puta$ $\qquad D.\ 16\ puta$

Rezultat: D.

Zadatak 035 (Asterix, gimnazija)

Duljine osnovica pravokutnog trapeza iznose 5 cm i 7 cm, a duljina kraćeg kraka iznosi 4 cm. Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom toga trapeza oko dulje osnovice.

Rješenje 035

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

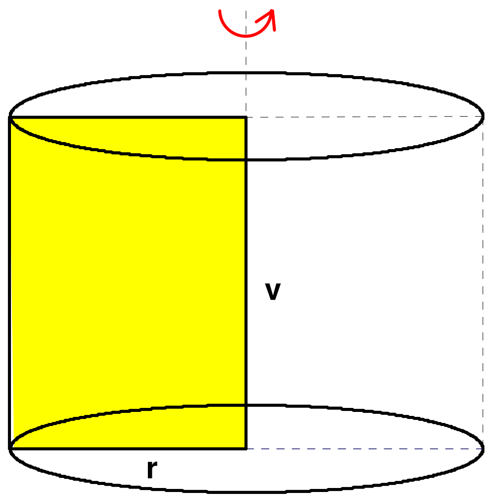
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Vrste trapeza su: raznostraničan (ima sve stranice različite duljine), jednakokračan (ima 2 nasuprotne stranice jednake duljine) i pravokutan (ima jedan pravi kut).
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Opseg kruga polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Rotacijsko tijelo nastaje vrtnjom (rotacijom) ravninskog lika oko pravca koji leži u istoj ravnini. Valjak je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Osnovka ili baza valjka je krug.



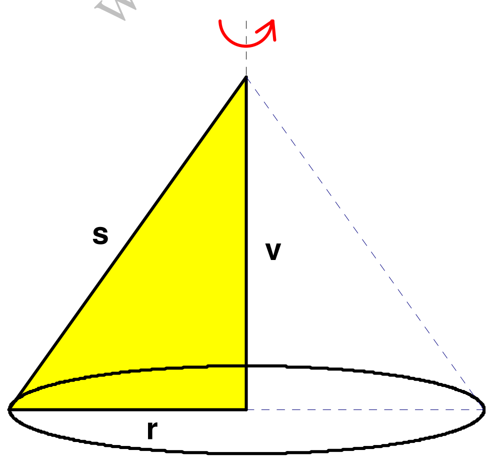
Oplošje uspravnog valjka

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine v računa se formulom:

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo vrtnjom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Osnovka ili baza stošca je krug. Izvodnice stošca spajaju vrh s točkama na kružnici. Stožac je uspravan ako su mu sve izvodnice jednakih duljina:

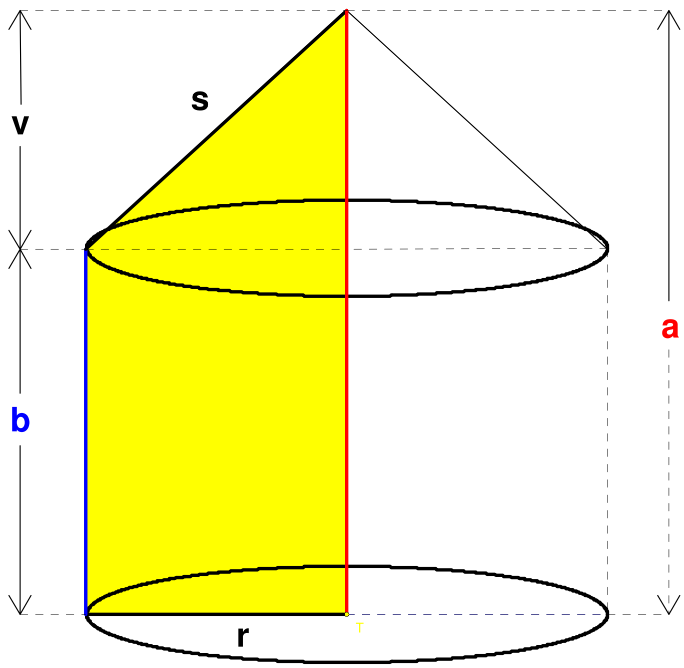
$$s = \sqrt{r^2 + v^2}.$$



Oplošje uspravnog stošca

Oplošje uspravnog stošca s bazom polumjera r i izvodnicom s iznosi:

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s.$$



Sa slike vidi se:

$$b = 5\ cm\ ,\ a = 7\ cm\ ,\ r = 4\ cm\ ,\ v = a - b = 7\ cm - 5\ cm = 2\ cm$$

Rotacijom pravokutnog trapeza oko dulje osnovice nastaje geometrijsko tijelo sastavljeno od valjka i stošca pri čemu je duljina izvodnice jednaka

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} r = 4 \\ v = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \sqrt{4^2 + 2^2} \Rightarrow s = \sqrt{16 + 4} \Rightarrow s = \sqrt{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{4 \cdot 5} \Rightarrow s = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \Rightarrow s = 2 \cdot \sqrt{5}\ cm.$$

Oplošje nastalog tijela jednako je zbroju:

- ploštine donje baze (kruga) valjka

$$r^2 \cdot \pi$$

- ploštine plašta valjka

$$2 \cdot r \cdot \pi \cdot b$$

- ploštine plašta stošca

$$r \cdot \pi \cdot s$$

pa vrijedi

$$O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot b + r \cdot \pi \cdot s \Rightarrow O = r \cdot \pi \cdot (r + 2 \cdot b + s) \Rightarrow \begin{bmatrix} r = 4 \\ b = 5 \\ s = 2 \cdot \sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 4 \cdot \pi \cdot \left(4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot \sqrt{5}\right) \Rightarrow O = 4 \cdot \pi \cdot \left(4 + 10 + 2 \cdot \sqrt{5}\right) \Rightarrow O = 4 \cdot \pi \cdot \left(14 + 2 \cdot \sqrt{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = \left(56 \cdot \pi + 8 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}\right)\ cm^2.$$

Vježba 035

Duljine osnovica pravokutnog trapeza iznose 50 mm i 0.7 dm, a duljina kraćeg kraka iznosi 4 cm. Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom toga trapeza oko dulje osnovice.

Rezultat: $O = \left(56 \cdot \pi + 8 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}\right)\ cm^2.$

Zadatak 036 (Felix, gimnazija)

Zadan je šuplji uspravni stožac s izvodnicama duljine 15 cm te visinom duljine 9 cm. U njega je stavljena kugla polumjera 10 cm koja dira samo izvodnice stošca. Kolika je duljina kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca?

Rješenje 036

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad a^2=0\;\Rightarrow\;a=0\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

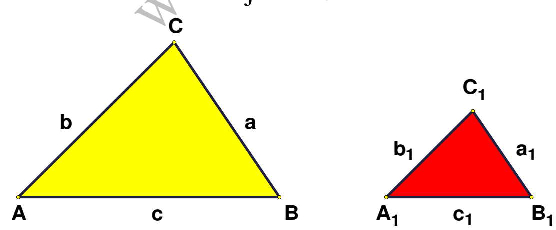
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^0.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1\;,\;\beta=\beta_1\;,\;\gamma=\gamma_1\quad,\quad\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;n\neq0\;,\;n\neq1.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Opseg kružnice polumjera r iznosi:

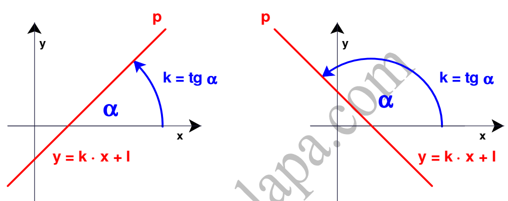
$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

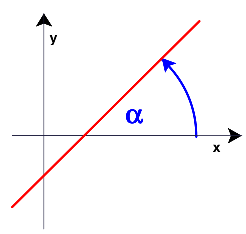
naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Prikloni kut pravca je kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko presjeka pravca i osi do pravca p. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$\text{tg}\ \alpha = k.$$



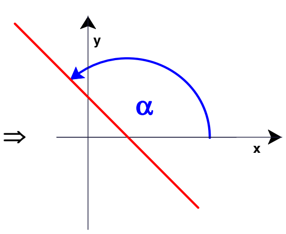
Veza između nagiba pravca i veličine priklonog kuta:
① Prikloni kut je šiljasti kut => tangens šiljastog kuta je pozitivan broj => koeficijent smjera je pozitivan broj.

$\alpha < 90° \;\Rightarrow\; \text{tg}\ \alpha > 0 \;\Rightarrow\; k > 0 \;\Rightarrow$



② Prikloni kut je tupi kut => tangens tupog kuta je negativan broj => koeficijent smjera je negativan broj.

$\alpha > 90° \;\Rightarrow\; \text{tg}\ \alpha < 0 \;\Rightarrow\; k < 0 \;\Rightarrow$

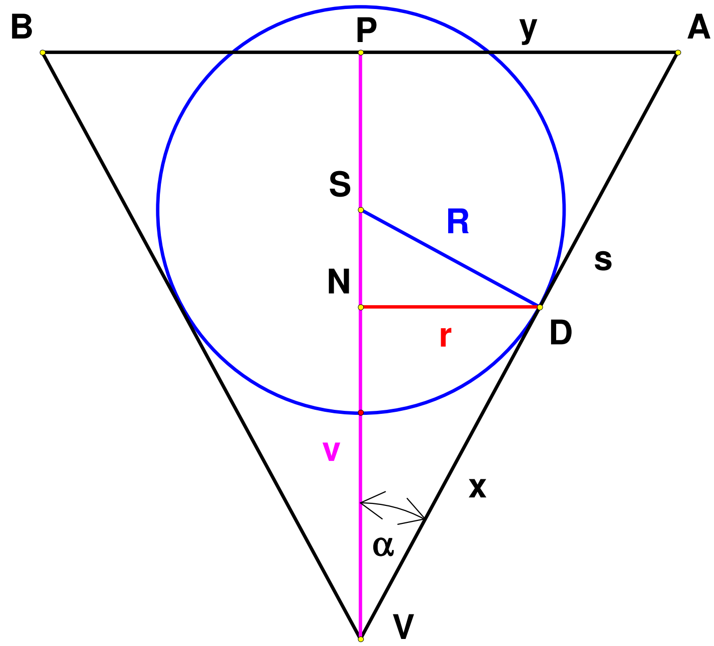


Ako je S(0, 0) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Tangenta kružnice je pravac koji s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku. Pravac s jednadžbom $y = k \cdot x + l$ dira kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ onda i samo onda ako vrijedi

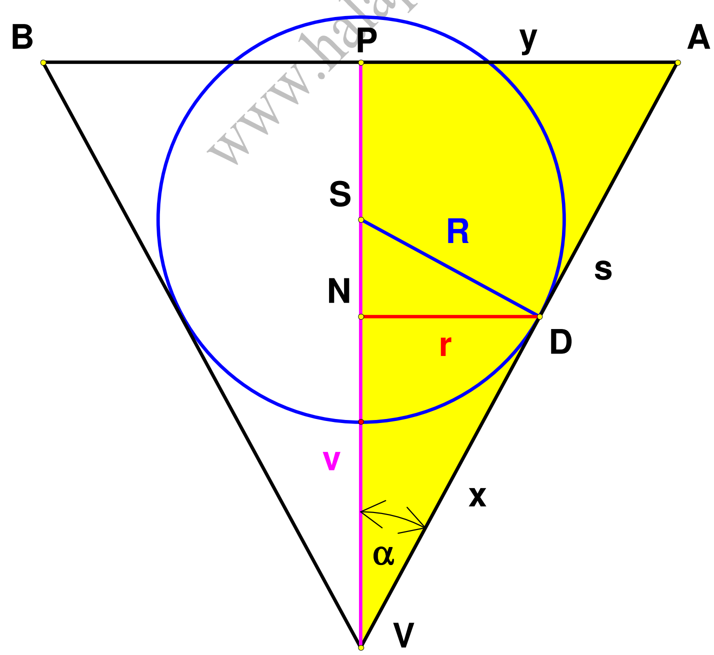
$$r^2 \cdot \left(1+k^2\right) = l^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|VA| = s = 15 \;,\; |VP| = v = 9 \;,\; |SD| = R = 10 \;,\; |PA| = y \;,\; |VD| = x \;,\; \angle PVA = \alpha$$

$|ND| = r -$ polumjer kružnice u kojoj se dodiruju kugla i stožac

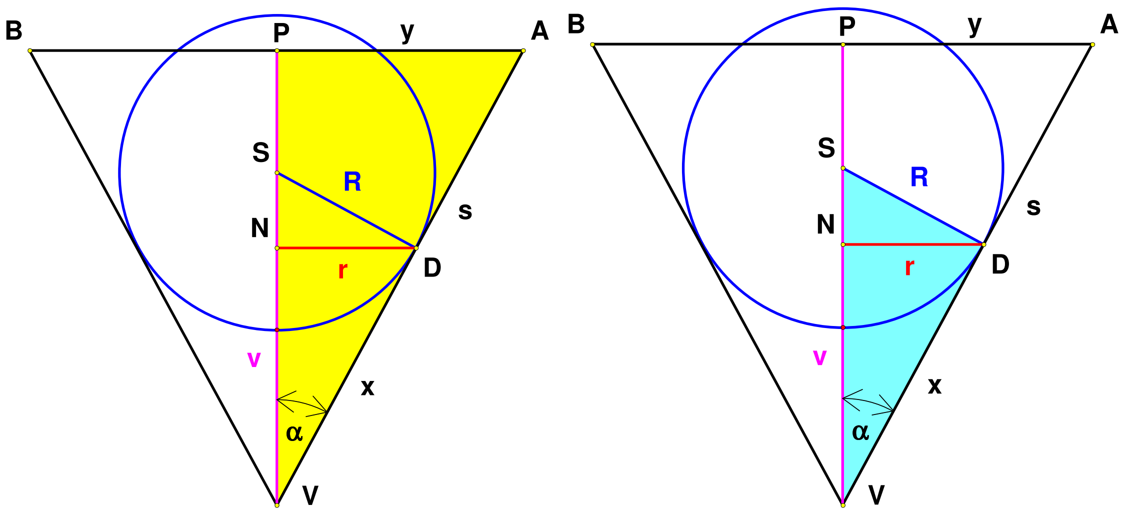


Primijetimo pravokutan trokut VAP i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete y.

$$|PA|^2 = |VA|^2 - |VP|^2 \;\Rightarrow\; y^2 = s^2 - v^2 \;\Rightarrow\; y^2 = s^2 - v^2 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{s^2 - v^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \sqrt{15^2 - 9^2} \;\Rightarrow\; y = 12.$$

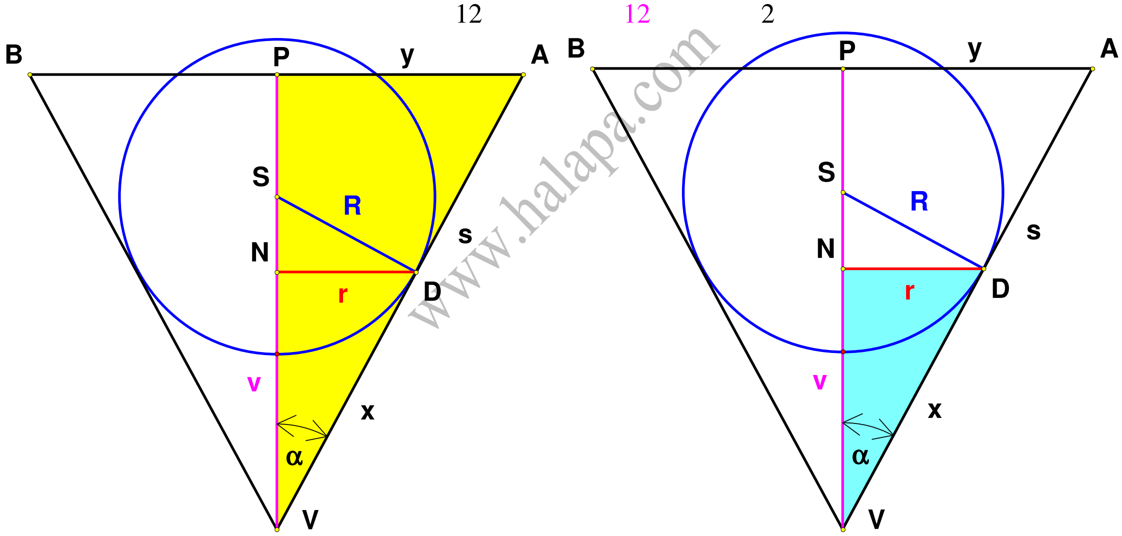
1.inačica



Pravokutni trokuti ΔVAP i ΔVDS slični su (prvi poučak sličnosti, K – K) pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|VP|}{|PA|}=\frac{|VD|}{|SD|}\Rightarrow\frac{v}{y}=\frac{x}{R}\Rightarrow\frac{x}{R}=\frac{v}{y}\Rightarrow\frac{x}{R}=\frac{v}{y}\;/\cdot R\Rightarrow x=R\cdot\frac{v}{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=10\cdot\frac{9}{12}\Rightarrow x=10\cdot\frac{9}{12}\Rightarrow x=\frac{15}{2}.$$



Pravokutni trokuti ΔVAP i ΔVDN slični su (prvi poučak sličnosti, K – K) pa vrijedi razmjer:

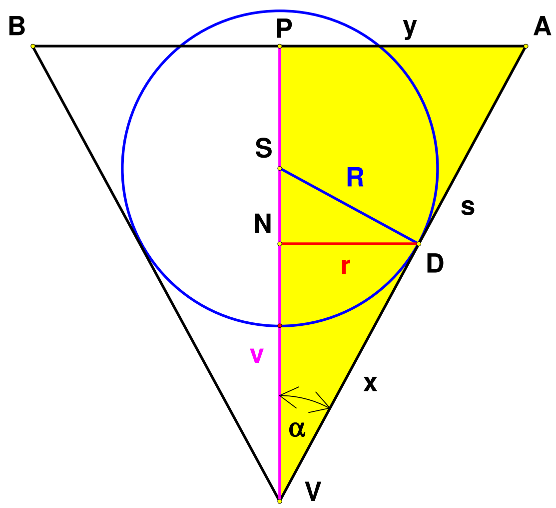
$$\frac{|PA|}{|VA|}=\frac{|ND|}{|VD|}\Rightarrow\frac{y}{s}=\frac{r}{x}\Rightarrow\frac{r}{x}=\frac{y}{s}\Rightarrow\frac{r}{x}=\frac{y}{s}\;/\cdot x\Rightarrow r=x\cdot\frac{y}{s}\Rightarrow$$

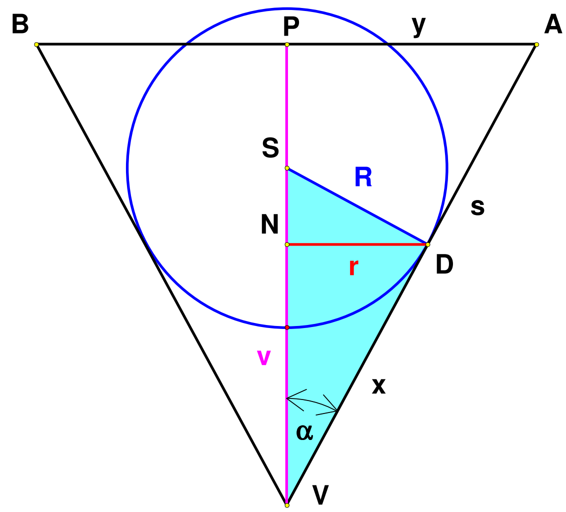
$$\Rightarrow r=\frac{15}{2}\cdot\frac{12}{15}\Rightarrow r=\frac{15}{2}\cdot\frac{12}{15}\Rightarrow r=6.$$

Duljina kružnice (opseg) u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca je:

$$\left.\begin{matrix}O=2\cdot r\cdot\pi\\ r=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow O=2\cdot 6\cdot\pi\Rightarrow O=12\cdot\pi\ cm.$$

2.inačica

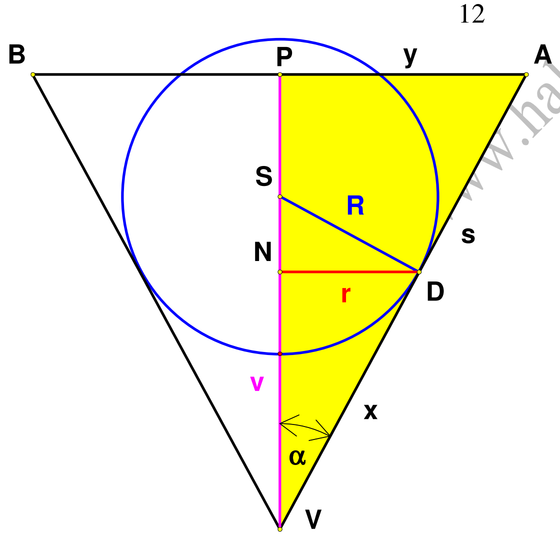


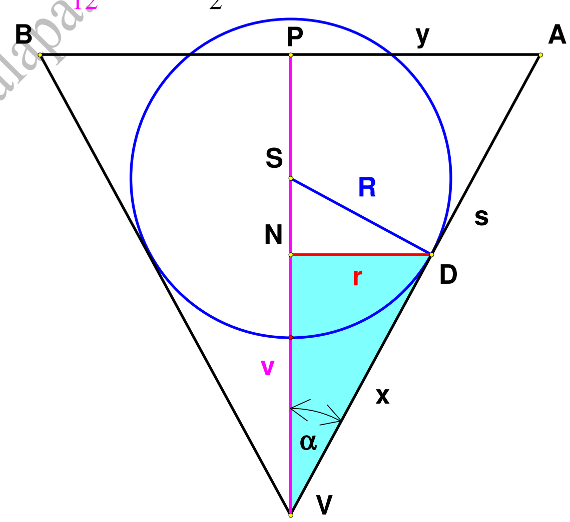


Uočimo pravokutne trokute ΔVAP i ΔVDS i uporabom trigonometrijske funkcije tangens dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{|PA|}{|VP|} \\ tg\,\alpha = \dfrac{|SD|}{|VD|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{y}{v} \\ tg\,\alpha = \dfrac{R}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{v} = \frac{R}{x} \Rightarrow \frac{y}{v} = \frac{R}{x} \; / \cdot x \cdot \frac{v}{y} \Rightarrow x = R \cdot \frac{v}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 10 \cdot \frac{9}{12} \Rightarrow x = 10 \cdot \frac{9}{12} \Rightarrow x = \frac{15}{2}.$$





Uočimo pravokutne trokute ΔVAP i ΔVDN i uporabom trigonometrijske funkcije sinus dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{|PA|}{|VA|} \\ \sin\alpha = \dfrac{|ND|}{|VD|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{y}{s} \\ \sin\alpha = \dfrac{r}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{s} = \frac{r}{x} \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{y}{s} \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{y}{s} \; / \cdot x \Rightarrow r = x \cdot \frac{y}{s} \Rightarrow$$

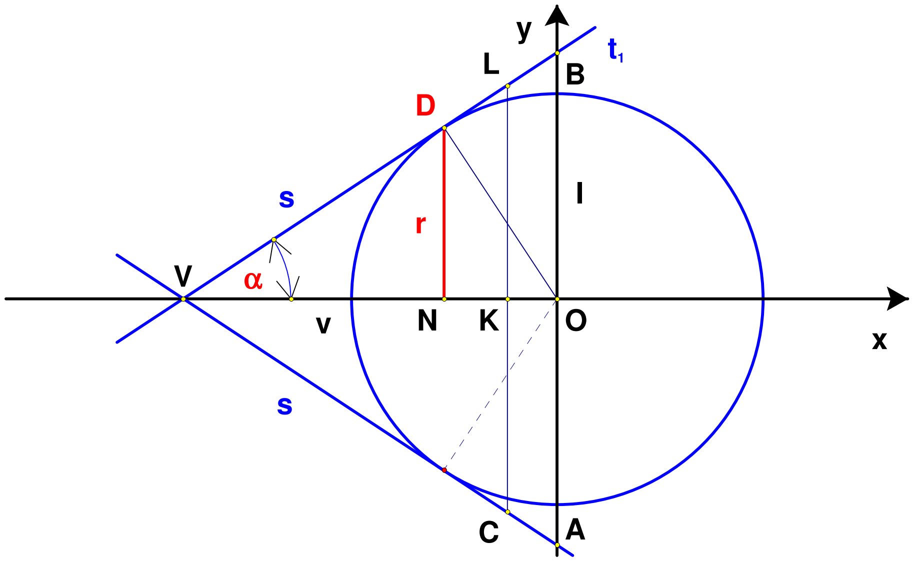
$$\Rightarrow r = \frac{15}{2} \cdot \frac{12}{15} \Rightarrow r = \frac{15}{2} \cdot \frac{12}{15} \Rightarrow r = 6.$$

Duljina kružnice (opseg) u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca je:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot 6 \cdot \pi \Rightarrow O = 12 \cdot \pi \; cm.$$

3.inačica

Rješenje je ponudio profesor matematike i informatike Tibor Pejić iz Bjelovara.



Sa slike vidi se:

$$|VC| = |VL| = s = 15 \;,\; |VK| = v = 9 \;,\; |OA| = |OB| = l \;,\; |OD| = 10 \;,\; \angle BVO = \alpha$$

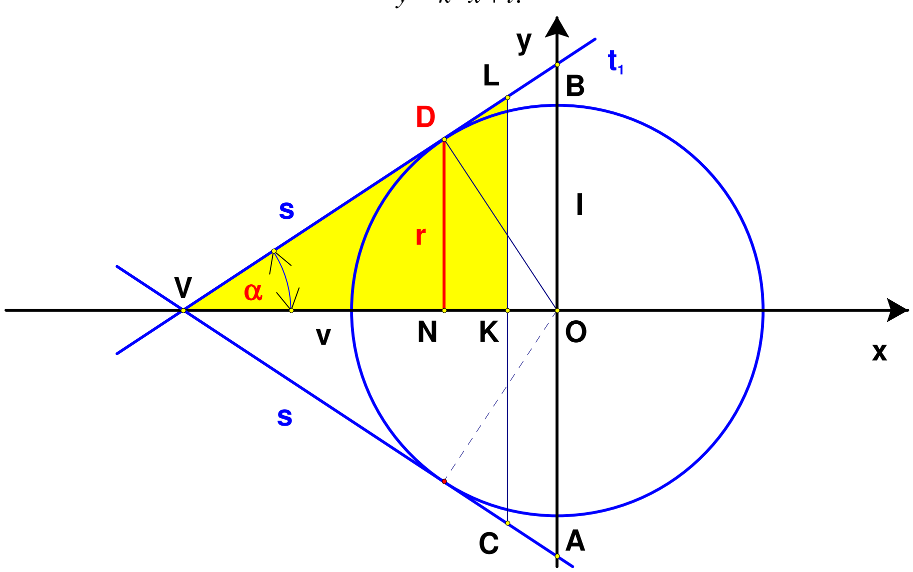
$|ND| = r$ – polumjer kružnice u kojoj se dodiruju kugla i stožac

Naći ćemo rezultat uporabom analitičke geometrije. Problem postavimo u koordinatni sustav u ravnini tako da kružnica polumjera 10 cm ima središte u ishodištu koordinatnog sustava.

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100,$$

a izvodnice stošca su tangente

$$y = k \cdot x + l.$$



Zbog jednostavnosti promatrat ćemo pravokutni trokut VKL. Pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete $|KL|$.

$$\left|KL\right|^2=\left|VL\right|^2-\left|VK\right|^2 \Rightarrow \left|KL\right|^2=\left|VL\right|^2-\left|VK\right|^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \left|KL\right|=\sqrt{\left|VL\right|^2-\left|VK\right|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|KL\right|=\sqrt{15^2-9^2} \Rightarrow \left|KL\right|=12.$$

U trokutu VKL je kut α istodobno koeficijent smjera tangente t_1.

$$\left.\begin{array}{l} k=tg\,\alpha \\ tg\,\alpha=\dfrac{\left|KL\right|}{\left|VK\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{\left|KL\right|}{\left|VK\right|} \Rightarrow k=\frac{12}{9} \Rightarrow k=\frac{12}{9} \Rightarrow k=\frac{4}{3}.$$

Pomoću uvjeta dodira pravca i kružnice dobije se duljina odsječka l tangente t_1.

$$r^2\cdot\left(1+k^2\right)=l^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r^2=100 \\ k=\dfrac{4}{3} \end{array}\right] \Rightarrow 100\cdot\left(1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)=l^2 \Rightarrow 100\cdot\left(1+\frac{16}{9}\right)=l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{16}{9}\right)=l^2 \Rightarrow 100\cdot\frac{9+16}{9}=l^2 \Rightarrow 100\cdot\frac{25}{9}=l^2 \Rightarrow \frac{2\,500}{9}=l^2 \Rightarrow l^2=\frac{2\,500}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2=\frac{2\,500}{9} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow l=\sqrt{\frac{2\,500}{9}} \Rightarrow l=\frac{50}{3}.$$

Jednadžba tangente t_1 glasi:

$$y=k\cdot x+l \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{4}{3} \\ l=\dfrac{50}{3} \end{array}\right] \Rightarrow y=\frac{4}{3}\cdot x+\frac{50}{3}.$$

Koordinate točke D u kojoj tangenta t_1 dira kružnicu rješenja su sustava jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{3}\cdot x+\dfrac{50}{3} \\ x^2+y^2=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow x^2+\left(\frac{4}{3}\cdot x+\frac{50}{3}\right)^2=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{16}{9}\cdot x^2+\frac{400}{9}\cdot x+\frac{2\,500}{9}=100 \Rightarrow x^2+\frac{16}{9}\cdot x^2+\frac{400}{9}\cdot x+\frac{2\,500}{9}=100 \ /\cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot x^2+16\cdot x^2+400\cdot x+2\,500=900 \Rightarrow 9\cdot x^2+16\cdot x^2+400\cdot x+2\,500-900=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cdot x^2+400\cdot x+1600=0 \Rightarrow 25\cdot x^2+400\cdot x+1600=0 \ /:25 \Rightarrow x^2+16\cdot x+64=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+8)^2=0 \Rightarrow x+8=0 \Rightarrow x=-8.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{3}\cdot x+\dfrac{50}{3} \\ x=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{4}{3}\cdot(-8)+\frac{50}{3} \Rightarrow y=-\frac{32}{3}+\frac{50}{3} \Rightarrow y=\frac{-32+50}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{18}{3} \Rightarrow y=\frac{18}{3} \Rightarrow y=6.$$

Dirlište D ima koordinate

$$D(x,\ y)=D(-8,\ 6).$$

Budući da je ordinata y = 6 ujedno i polumjer tražene kružnice (u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca) vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6 \\ r = y \end{array}\right\} \Rightarrow \; r = 6.$$

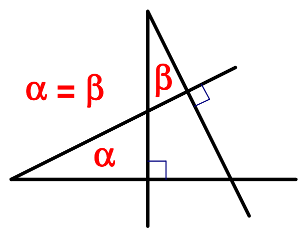
Duljina kružnice (opseg) u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca je:

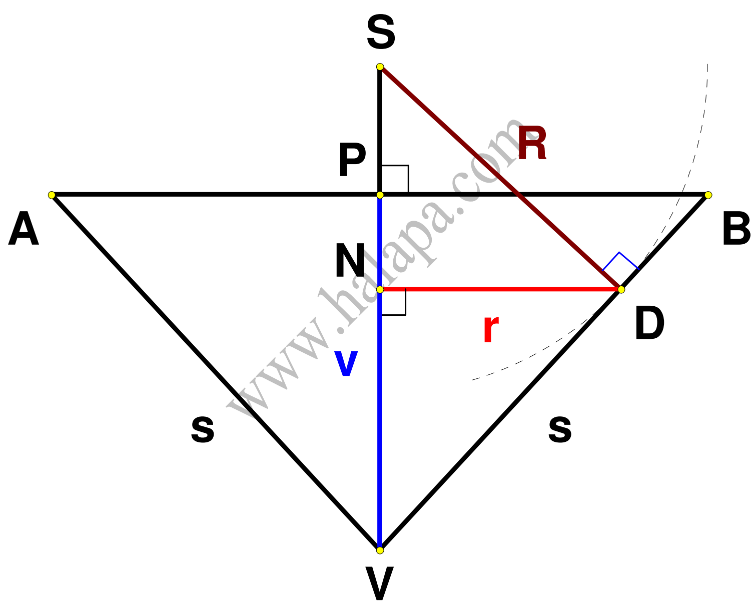
$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \; O = 2 \cdot 6 \cdot \pi \; \Rightarrow \; O = 12 \cdot \pi \; cm.$$

4.inačica

Rješenje je ponudio veliki ljubitelj matematike iz Gimnazije Bjelovar pod nadimkom Ivan Galeb.

Treba ponoviti kutove sa okomitim kracima!





Sa slike vidi se:

$$|VA| = |VB| = s = 15 \;\; , \;\; |VP| = v = 9 \;\; , \;\; |ND| = r \;\; , \;\; |SD| = R = 10$$

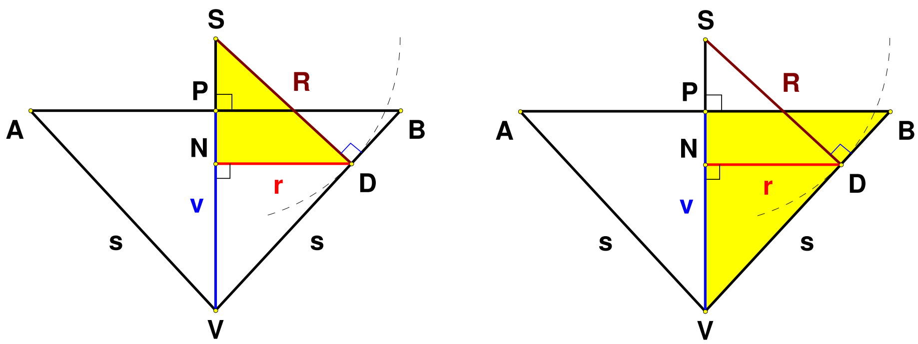
Izvodnica stošca tangenta je kružnice, a pravci VS i AB međusobno su okomiti. Vrijedi

$$\angle DSN = \angle VBP$$

jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Trokuti ΔDSN i ΔVBP slični su (K – K poučak) pa vrijedi razmjer:

$$|VP| : |VB| = |ND| : |SD| \; \Rightarrow \; v : s = r : R \; \Rightarrow \; s \cdot r = v \cdot R \; \Rightarrow \; s \cdot r = v \cdot R \; / \cdot \frac{1}{s} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; r = \frac{v \cdot R}{s} \; \Rightarrow \; r = \frac{9 \; cm \cdot 10 \; cm}{15 \; cm} \; \Rightarrow \; r = \frac{9 \; cm \cdot 10 \; cm}{15 \; cm} \; \Rightarrow \; r = 6 \; cm.$$



Duljina kružnice (opseg) u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca je:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ r = 6\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot 6\ cm \cdot \pi \Rightarrow O = 12 \cdot \pi\ cm.$$

Vježba 036

Zadan je šuplji uspravni stožac s izvodnicama duljine 1.5 dm te visinom duljine 9 cm. U njega je stavljena kugla polumjera 1 dm koja dira samo izvodnice stošca. Kolika je duljina kružnice u kojoj se dodiruju kugla i plašt stošca?

Rezultat: 12 · π cm.

Zadatak 037 (Petra, gimnazija)

Brid kocke ima duljinu a. U tu kocku upisana je uspravna piramida tako da se donje baze poklapaju, a vrh piramide je u središtu gornje baze kocke. Nađi omjer oplošja kocke i piramide.

Rješenje 037

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je oplošje:

$$O = 6 \cdot a^2.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Oplošje piramide računa se po formuli

$$O = B + P,$$

gdje je B ploština baze, a P ploština plašta.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha=\alpha_1 \;,\; \beta=\beta_1 \;,\; \gamma=\gamma_1 \quad , \quad a=a_1 \;,\; b=b_1 \;,\; c=c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

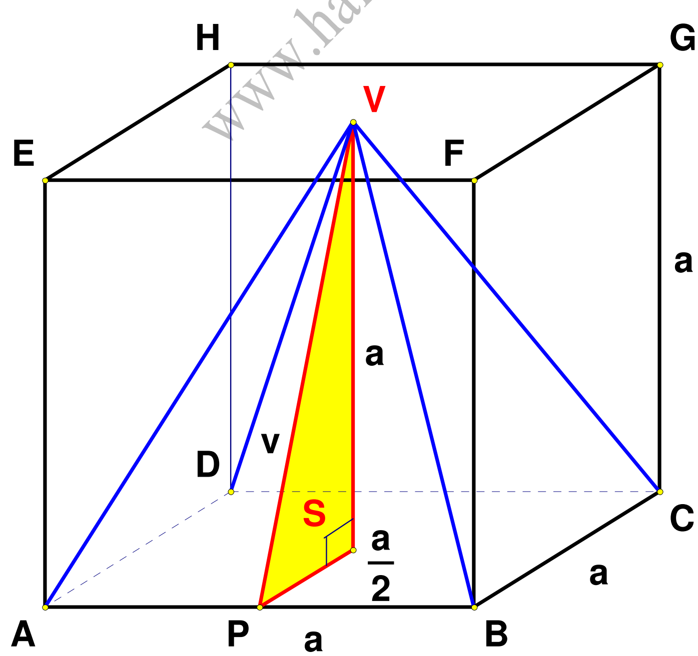
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P=a^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CG|=|SV|=a \;,\; |SP|=\frac{a}{2} \;,\; |VP|=v$$

Uočimo pravokutan trokut PSV i uporabimo Pitagorin poučak.

$$|VP|^2 = |SP|^2 + |SV|^2 \Rightarrow v^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow v^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Rightarrow v^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{a^2 + 4 \cdot a^2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{5 \cdot a^2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{5 \cdot a^2}{4} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5 \cdot a^2}{4}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{5 \cdot a^2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2}}{2} \Rightarrow v = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}.$$

Jednakokračni trokuti ΔABV, ΔBCV, ΔCDV i ΔDAV međusobno su sukladni (S – S – S) pa imaju jednake površine

$$P = \frac{a \cdot v}{2}.$$

Oplošje kocke O_1 iznosi:

$$O_1 = 6 \cdot a^2.$$

Oplošje piramide ABCDV jednako je zbroju ploštine kvadrata ABCD i ploština jednakokračnih trokuta ΔABV, ΔBCV, ΔCDV i ΔDAV.
Oplošje piramide O_2 je:

$$O_2 = B + P \Rightarrow \begin{bmatrix} B = a^2 \\ P = 4 \cdot \frac{a \cdot v}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow O_2 = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v}{2} \Rightarrow O_2 = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot v \Rightarrow \left[v = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} \right] \Rightarrow O_2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_2 = a^2 + 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow O_2 = a^2 + a^2 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow O_2 = a^2 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right).$$

Za omjer oplošja kocke O_1 i oplošja piramide O_2 vrijedi:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{6 \cdot a^2}{a^2 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)} \Rightarrow \frac{O_1}{O_2} = \frac{6 \cdot a^2}{a^2 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)} \Rightarrow \frac{O_1}{O_2} = \frac{6}{1 + \sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 : O_2 = 6 : \left(1 + \sqrt{5}\right).$$

Vježba 037

Odmor!

Rezultat: …