Zadatak 001 (Tomislav, tehnička škola)

Kugli polumjera 3 upisana je kocka. Nađite brid kocke.

Rješenje 001

Ako je kugli upisana kocka, onda je promjer kugle jednak prostornoj dijagonali kocke: $2r = a\sqrt{2}$.
Prostorna dijagonala kocke računa se formulom:

$$D = a\sqrt{3}.$$

$$a\sqrt{3} = 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} = 6 \; /:\sqrt{3},$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Vježba 001

Kugli polumjera $\sqrt{3}$ upisana je kocka. Nađite brid kocke.

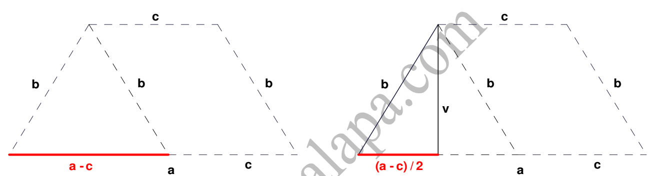
Rezultat: $a = 2$.

Zadatak 002 (Goran, tehnička škola)

Jednakokračni trapez dulje osnovice 7 cm, kraće osnovice 3 cm i kraka 4 cm rotira oko veće osnovice. Izračunajte obujam (volumen) nastalog rotacijskog tijela.

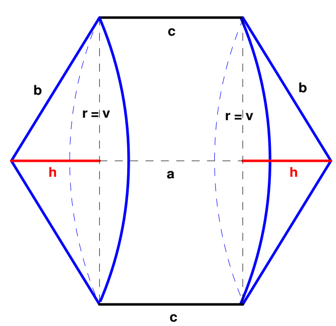
Rješenje 002

Izračunamo visinu jednakokračnog trapeza: a = 7 cm, b = 4 cm, c = 3 cm



$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 4^2 - 2^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \; cm.$$

Rotacijom jednakokračnog trapeza oko dulje stranice nastaje geometrijsko tijelo koje se sastoji od valjka i dva stošca.



Valjak ima visinu c i polumjer r = v pa je njegov obujam (volumen):

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot c = v^2 \cdot \pi \cdot c = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3 = 36\pi \; cm^3.$$

Stožac ima visinu $h = \frac{a-c}{2}$ i polumjer r = v pa je obujam dva stošca:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot v^2 \cdot \pi \cdot \frac{a-c}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2 = 16\pi \; cm^3.$$

Obujam rotacijskog tijela je: $V = 36\pi \text{ cm}^3 + 16\pi \text{ cm}^3 = 52\pi \text{ cm}^3$.

Vježba 002

Jednakokračni trapez dulje osnovice 8 cm, kraće osnovice 2 cm i kraka 5 cm rotira oko veće osnovice. Izračunajte obujam (volumen) nastalog rotacijskog tijela.

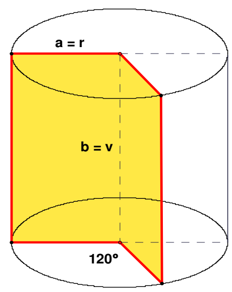
Rezultat: $V = 64\pi \text{ cm}^3$.

Zadatak 003 (Ines, gimnazija)

Pravokutnik stranica a = 3, b = 5 zarotiramo oko dulje stranice za 120°. Nađite obujam rotacijskog tijela.

Rješenje 003

Rotacijom pravokutnika oko dulje stranice dobivamo tijelo koje je po obujmu trećina obujma valjka.



$$\left.\begin{array}{l} a = r \\ b = v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot b = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5 = 15\pi.$$

Vježba 003

Pravokutnik stranica a = 4, b = 6 zarotiramo oko dulje stranice za 120°. Nađite obujam rotacijskog tijela.

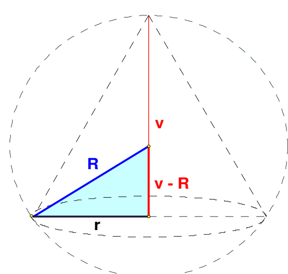
Rezultat: 32π.

Zadatak 004 (Hrvoje, tehnička škola)

U kuglu polumjera 2 cm upisan je stožac visine 3 cm. Koliki je omjer obujma (volumena) stošca prema obujmu (volumenu) kugle?

Rješenje 004

Označimo s V_s volumen stošca, a s V_k volumen kugle. Iz označenog trokuta dobivamo polumjer baze stošca:



$$r = \sqrt{R^2 - (v - R)^2} = \sqrt{2^2 - (3 - 2)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Formula za obujam (volumen) stošca glasi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v,$$

a za obujam (volumen) kugle:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Gledamo omjer volumena stošca i kugle:

$$\frac{V_s}{V_k} = \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v}{\frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} = \frac{r^2 \cdot v}{4 \cdot R^3} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3}{4 \cdot 2^3} = \frac{9}{32} = 9:32.$$

Vježba 004

U kuglu polumjera 2 cm upisan je stožac visine 3 cm. Koliki je omjer obujma (volumena) kugle prema obujmu (volumenu) stošca?

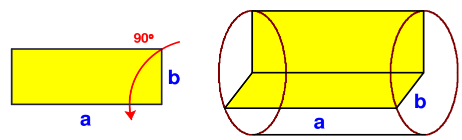
Rezultat: 32 : 9.

Zadatak 005 (Daria, ekonomska škola)

Pravokutnik površine 20 cm^2 rotira oko dulje stranice za 90º. Koliko je oplošje i volumen rotacionog tijela ako je razlika duljina stranica pravokutnika 5.5 cm?

Rješenje 005

Iz poznatih podataka nađemo stranice a i b:



$$\left.\begin{array}{l} P = 20 \\ a - b = 5.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 20 \\ a - b = 5.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 20 \\ a = b + 5.5 \end{array}\right\} \Rightarrow (b + 5.5) \cdot b = 20 \Rightarrow b^2 + 5.5b - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5.5 \pm \sqrt{30.25 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5.5 \pm \sqrt{110.25}}{2} = \frac{-5.5 \pm 10.5}{2}.$$

Duljina stranice b iznosi:

$$b = \frac{-5.5 + 10.5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \ cm.$$

Tada je duljina stranice a jednaka:

a = 5.5 + b = 5.5 + 2.5 = 8 cm.

Rotacijom pravokutnika oko dulje stranice dobije se valjak čija je visina v = a i polumjer r = b. Za oplošje i volumen valjka vrijede formule:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v) \quad , \quad V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Budući da pravokutnik rotira za 90º $\left(90^0 = \frac{1}{4} \cdot 360^0\right)$, računamo samo četvrtinu od cijelog oplošja i volumena:

$$O = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \pi \cdot (b + a) = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot \pi \cdot (2.5 + 8) = 13.125 \ cm^2,$$

$$V = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{4} \cdot b^2 \cdot \pi \cdot a = \frac{1}{4} \cdot 2.5^2 \cdot \pi \cdot 8 = 12.5 \cdot \pi \ cm^3.$$

Vježba 005

Pravokutnik površine 20 cm^2 rotira oko dulje stranice za 180º. Koliko je oplošje i volumen rotacionog tijela ako je razlika duljina stranica pravokutnika 5.5 cm?

Rezultat: O = 26.25π cm^2, V = 25π cm^3.

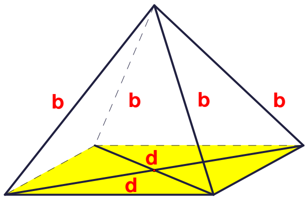
Zadatak 006 (Goran, tehnička škola)

Pobočni bridovi pravilne uspravne četverostrane piramide sukladni su dijagonalama osnovice. Ako je duljina brida osnovice 6, onda volumen kugle opisane toj piramidi iznosi

$$A.\ 72\sqrt{2}\pi \qquad B.\ 96\pi \qquad C.\ 64\pi \qquad D.\ 144\pi \qquad E.\ 64\sqrt{6}\pi$$

Rješenje 006

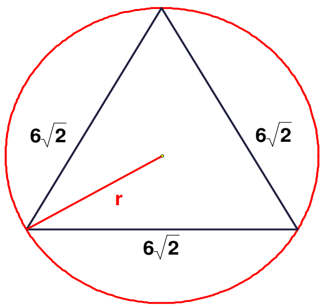
Osnovica pravilne uspravne četverostrane piramide je kvadrat. Ako je duljina stranice kvadrata a, onda je duljina dijagonale $d = a\sqrt{2}$.



Iz uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = d = 6\sqrt{2} \end{cases}.$$

Problem iz tri dimenzije (kugla je opisana toj piramidi) možemo prebaciti, prevesti na problem u dvije dimenzije (kružnica je opisana jednakostraničnom trokutu duljine stranice $6\sqrt{2}$. Polumjer kružnice opisane jednakostraničnom trokutu duljine stranice a računa se po formuli $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Zato je:

$$\left.\begin{matrix} a = 6\sqrt{2} \\ r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}.$$

Volumen kugle iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \left(2\sqrt{6}\right)^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{6^3} \cdot \pi = [\text{djelomično korjenovanje}] =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi = 64\pi.$$

Vježba 006

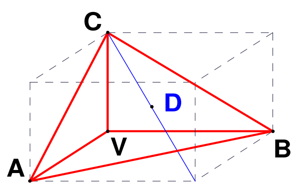
Pobočni bridovi pravilne uspravne četverostrane piramide sukladni su dijagonalama osnovice. Ako je duljina brida osnovice 6, koliko je oplošje kugle opisane toj piramidi?

Rezultat: 96π.

Zadatak 007 (Ivan, tehnička škola)

Svi bridovi koji izlaze iz jednog vrha piramide VABC međusobno su okomiti i imaju duljine $|VA| = a$, $|VB| = b$, $|VC| = c$. Nađi polumjer sfere opisane toj piramidi.

Rješenje 007



Sfera opisana piramidi VABC istodobno je opisana i kvadru s bridovima a, b i c. Polumjer sfere je:

$$r = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

gdje je D prostorna dijagonala kvadra.

Vježba 007

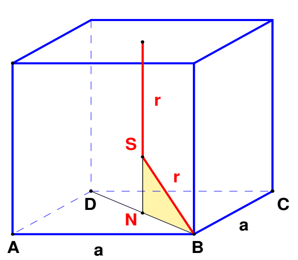
Svi bridovi koji izlaze iz jednog vrha piramide VABC međusobno su okomiti i imaju duljine $|VA| = 8$, $|VB| = 6$, $|VC| = 5$. Nađi polumjer sfere opisane toj piramidi.

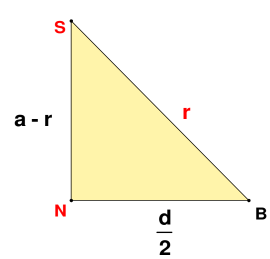
Rezultat: $\frac{5}{2} \cdot \sqrt{5}$.

Zadatak 008 (Goga, gimnazija)

Sfera prolazi kroz vrhove donje osnovke kocke brida duljine 8 i dodiruje gornju osnovku kocke. Nađite r sfere.

Rješenje 008





Sa slike vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} d = a\cdot\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\cdot\sqrt{2}}{2} \\ r^2 = (a-r)^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = (a-r)^2 + \left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot r + r^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a\cdot r = \frac{3\cdot a^2}{2} \;/\cdot\frac{1}{2\cdot a} \Rightarrow r = \frac{3\cdot a}{4} = \frac{3\cdot 8}{4} = 6.$$

Vježba 008

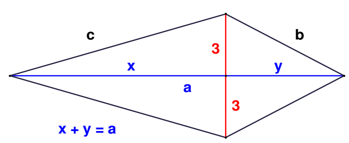
Sfera prolazi kroz vrhove donje osnovke kocke brida duljine 12 i dodiruje gornju osnovku kocke. Nađite r sfere.

Rezultat: 9.

Zadatak 009 (Ante, gimnazija)

Trokut sa stranicama a, b i c rotira oko stranice a. Ako je duljina visine na stranicu a jednaka 3 cm, odredite volumen nastalog rotacijskog tijela.

Rješenje 009



Volumen nastalog rotacijskog tijela jednak je zbroju volumena dvaju stožaca koji imaju zajedničku osnovku (bazu) polumjera 3 i visine x i y:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot x + \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot y = \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot\underbrace{(x+y)}_{a} = 3\cdot\pi\cdot a\ cm^3.$$

Vježba 009

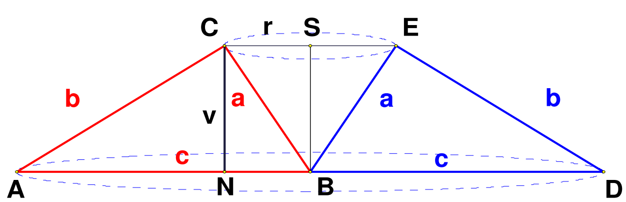
Trokut sa stranicama a, b i c rotira oko stranice a. Ako je duljina visine na stranicu a jednaka 6 cm, odredite volumen nastalog rotacijskog tijela.

Rezultat: $12\cdot\pi\cdot a\ cm^3.$

Zadatak 010 (Ivan, tehnička škola)

Pravokutni trokut (a = 15, b = 20) rotira oko osi kroz vrh B okomite na hipotenuzu. Nađite oplošje rotacijskog tijela.

Rješenje 010



Uočimo pravokutan trokut ABC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo hipotenuzu c:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow c^2 = 225 + 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 625 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow c = 25.$$

Visina v pravokutnog trokuta ABC dobije se pomoću formula za površinu trokuta:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a\cdot b}{2} \\ P = \dfrac{c\cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2} = \frac{c\cdot v}{2} \;/\cdot\frac{2}{c} \Rightarrow v = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{15\cdot 20}{25} = 12.$$

Uočimo pravokutan trokut BSC i pomoću Pitagorina poučka nađemo $|CS|$:

$$|CS|^2 = |BC|^2 - |BS|^2 \Rightarrow |CS|^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow |CS|^2 = 225 - 144 \Rightarrow |CS|^2 = 81 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow |CS| = 9.$$

Nastalo je tijelo krnji stožac iz kojeg je izvađen manji stožac.

$$R = |AB| = |BD| = c = 25 \quad , \quad r = |CS| = |SE| = 9$$

$$s_1 = |AC| = |DE| = b = 20 \quad , \quad s_2 = |BC| = |BE| = a = 15$$

Oplošje tako dobivenog rotacijskog tijela sastoji se od:

- osnovke krnjeg stošca ... $O_1 = R^2 \cdot \pi = 25^2 \cdot \pi = 625 \cdot \pi,$
- plašta krnjeg stošca ... $O_2 = (R + r) \cdot \pi \cdot s_1 = (25 + 9) \cdot \pi \cdot 20 = 680 \cdot \pi,$
- plašta manjeg stošca ... $O_3 = r \cdot \pi \cdot s_2 = 9 \cdot \pi \cdot 15 = 135 \cdot \pi.$

Oplošje rotacijskog tijela iznosi:

$$O = O_1 + O_2 + O_3 = 625 \cdot \pi + 680 \cdot \pi + 135 \cdot \pi = 1440 \cdot \pi.$$

Vježba 010

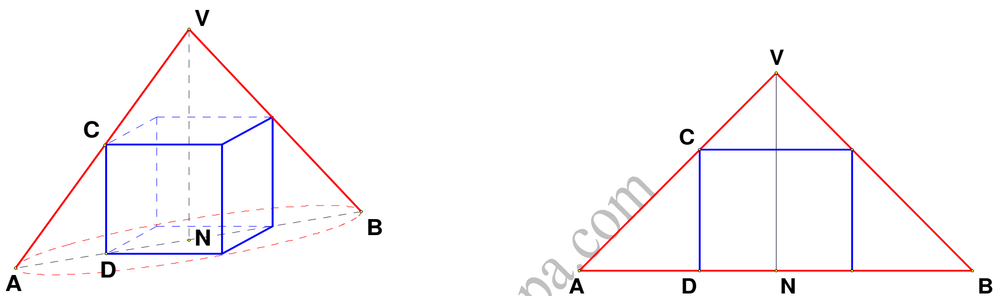
Pravokutni trokut (a = 15, b = 20) rotira oko osi kroz vrh B okomite na hipotenuzu. Nađite obujam rotacijskog tijela.

Rezultat: $V = \frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} = \frac{R \cdot \pi \cdot v}{3} \cdot (R + r) = 3400 \cdot \pi.$

Zadatak 011 (Ivana, gimnazija)

U uspravni stožac polumjera r = 1 i visine v = $\sqrt{2}$ upisana je kocka. Nađite duljinu brida kocke.

Rješenje 011



Iz dijagonalnog presjeka kocke i stošca zajedno vidi se da su trokuti ΔADC i ΔANV slični.

$$|AN| = r = 1 \quad , \quad |VN| = v = \sqrt{2} \quad , \quad |DC| = a \quad , \quad |AD| = |AN| - |DN| = r - \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Postavimo razmjer:

$$|AD| : |DC| = |AN| : |VN| \Rightarrow \left(1 - \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right) : a = 1 : \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - \frac{a \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = a \Rightarrow \sqrt{2} - \frac{2 \cdot a}{2} = a \Rightarrow \sqrt{2} - a = a \Rightarrow 2 \cdot a = \sqrt{2} \; /:2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vježba 011

U uspravni stožac polumjera r = 1 i visine v = $2 \cdot \sqrt{2}$ upisana je kocka. Nađite duljinu brida kocke.

Rezultat: $a = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}.$

Zadatak 012 (Ivana, gimnazija)

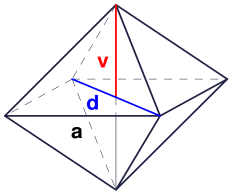
Pravilnom oktaedru brida a = $\sqrt{6}$ upisana je kugla. Koliki je polumjer r kugle?

Rješenje 012

Ako je oko sfere polumjera r opisana piramida kojoj je oplošje O, tada se obujam piramide može izračunati na sljedeći način: zamislimo da je središte sfere vrh svih piramida kojima su osnovke osnovka piramide i sve njezine pobočke, a visina svih je polumjer upisane sfere. Budući da smo piramidu rastavili na niz manjih piramida, njezin obujam iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot r + \frac{1}{3} \cdot P_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot P_2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot P_3 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} \cdot P_n \cdot r = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \left(B + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n\right) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot O.$$

Računamo obujam oktaedra:

$$\left.\begin{array}{l} d = a\cdot\sqrt{2} \\ v^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = a^2 - \left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{2\cdot a^2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{2\cdot a^2}{4} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow v = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}.$$

Oktaedar je jedno od pet pravilnih tijela i omeđeno je s osam jednakostraničnih trokuta. Volumen oktaedra iznosi:

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot B\cdot v = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}\cdot a^3\cdot\sqrt{2}.$$

Polumjer upisane kugle je:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\cdot r\cdot O = \frac{1}{3}\cdot r\cdot 8\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \\ V = \frac{1}{3}\cdot a^3\cdot\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot r\cdot 8\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\cdot a^3\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot r\cdot 2\cdot a^2\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot a^3\cdot\sqrt{2} \;/\cdot\frac{3}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot r\cdot\sqrt{3} = a\cdot\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4\cdot 3}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}} = 1.$$

Vježba 012

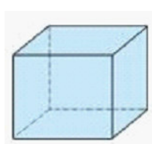
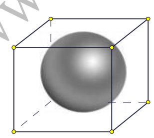
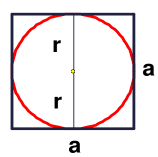
Pravilnom oktaedru brida a = $\sqrt{6}$ upisana je kugla. Koliko je oplošje kugle?

Rezultat: O = 4π.

Zadatak 013 (Biba, hotelijerska škola)

U kocku zadanog brida a upisana je kugla. Koliko u postocima iznosi obujam kugle s obzirom na obujam kocke?

Rješenje 013

Budući da je kugla polumjera r upisana u kocku zadanog brida a, vrijedi:

$$r = \frac{1}{2}\cdot a.$$

Gledamo omjer obujmova kugle i kocke:

$$\frac{V_{ku}}{V_{ko}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^3\cdot\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot a^3\cdot\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6} = 0.5236 = \frac{52.36}{100} = 52.36\%.$$

Vježba 013

U kocku zadanog brida a upisana je kugla. Koliko u postocima iznosi oplošje kugle s obzirom na oplošje kocke?

Rezultat: 52.36%.

Zadatak 014 (Kety, farmaceutska škola)

U kocku su upisani istostrani valjak i kugla. Odredi $V_1 : V_2 : V_3$, gdje je V_1 obujam kugle, V_2 obujam istostranog valjka i V_3 obujam kocke.

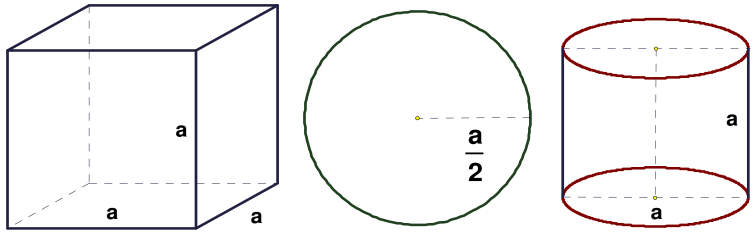
Rješenje 014

Ponovimo!

Obujam kugle: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$

Obujam istostranog valjka: $V = 2 \cdot r^3 \cdot \pi$
(istostrani valjak je uspravni kružni valjak kojemu je duljina s izvodnice jednaka dijametru 2 · r baznoga kruga, s = v = 2 · r).

Obujam kocke: $V = a^3.$



Budući da su istostrani valjak i kugla upisani u kocku duljine brida a, za omjer obujmova vrijedi:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^3 \cdot \pi : 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^3 \cdot \pi : a^3 \Rightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot \pi}{8} : 2 \cdot \frac{a^3 \cdot \pi}{8} : a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \frac{a^3 \cdot \pi}{6} : \frac{a^3 \cdot \pi}{4} : a^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{svaki član s } \frac{12}{a^3} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \left(\frac{a^3 \cdot \pi}{6} \cdot \frac{12}{a^3}\right) : \left(\frac{a^3 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{12}{a^3}\right) : \left(a^3 \cdot \frac{12}{a^3}\right) \Rightarrow V_1 : V_2 : V_3 = 2\pi : 3\pi : 12.$$

Vježba 014

U kocku su upisani istostrani valjak i kugla. Odredi $V_1 : V_2 : V_3$, gdje je V_1 obujam kocke, V_2 obujam istostranog valjka i V_3 obujam kugle.

Rezultat: 12 : 3π : 2π.

Zadatak 015 (Kety, farmaceutska škola)

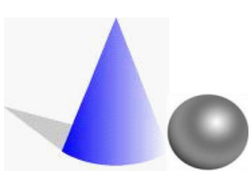
U uspravni kružni stožac obujma V, čija izvodnica s bazom zatvara kut od 60°, upisana je kugla. Koliki je obujam kugle?

Rješenje 015

Ponovimo!

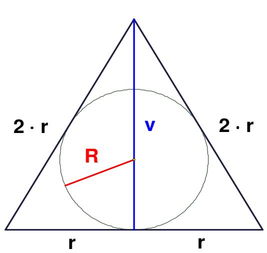
Obujam stošca: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v$, gdje je r polumjer kruga (baze), v visina stošca,

Obujam kugle: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$, gdje je r polumjer kugle.



Budući da izvodnica stošca s bazom zatvara kut od 60°, dijametralni presjek stošca je jednakostraničan trokut pa obujam stošca iznosi:

$$V_s = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V_s = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow V_s = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$



Kako je kugla upisana u stožac njezin je polumjer jednak $\frac{1}{3}$ visine stošca:

$$R = \frac{1}{3} \cdot v \Rightarrow R = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Obujam kugle je:

$$V_k = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^3 \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{27} \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{27} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Gledamo omjere obujmova:

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{27} \cdot r^3 \cdot \pi}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{V_k}{V_s} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{V_k}{V_s} = \frac{12}{27} \Rightarrow \frac{V_k}{V_s} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_k = \frac{4}{9} \cdot V_s.$$

Vježba 015

U uspravni kružni stožac obujma 81 cm^3, čija izvodnica s bazom zatvara kut od 60°, upisana je kugla. Koliki je obujam kugle?

Rezultat: 36 cm^3.

Zadatak 016 (Kety, farmaceutska škola)

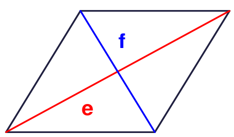
Vrtnjom romba oko njegove dulje dijagonale nastaje tijelo obujma dva put manjeg od obujma tijela koje nastaje vrtnjom romba oko njegove kraće dijagonale. Koliki je omjer duljina dijagonala e : f? (e > f)

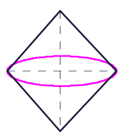
Rješenje 016

Ponovimo!

Obujam stošca: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v$, gdje je r polumjer kruga (baze), v visina stošca.

Dijagonale romba međusobno su okomite i raspolavljaju se.

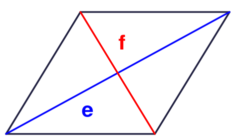


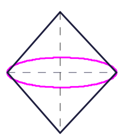


Vrtnjom romba oko njegove dulje dijagonale e nastaje tijelo koje se sastoji od dva stošca sa zajedničkom bazom.

Polumjer baze tih stožaca je $\frac{f}{2}$, a visina svakog od njih je $\frac{e}{2}$. Zato je volumen nastalog tijela jednak:

$$V_e = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \Rightarrow V_e = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{f}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \Rightarrow V_e = \frac{1}{3} \cdot \frac{f^2}{4} \cdot \pi \cdot e \Rightarrow V_e = \frac{1}{12} \cdot f^2 \cdot e \cdot \pi.$$





Vrtnjom romba oko njegove kraće dijagonale f nastaje tijelo koje se sastoji od dva stošca sa zajedničkom bazom.

Polumjer baze tih stožaca je $\frac{e}{2}$, a visina svakog od njih $\frac{f}{2}$. Zato je volumen nastalog tijela jednak:

$$V_f = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{2} \Rightarrow V_f = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{2} \Rightarrow V_f = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2}{4} \cdot \pi \cdot f \Rightarrow V_f = \frac{1}{12} \cdot e^2 \cdot f \cdot \pi.$$

Budući da je zbog pretpostavke zadatka obujam V_e dva put manji od obujma V_f, slijedi:

$$V_e = \frac{1}{2} \cdot V_f \Rightarrow \frac{1}{12} \cdot f^2 \cdot e \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot e^2 \cdot f \cdot \pi \; / \cdot \frac{12}{e \cdot f \cdot \pi} \Rightarrow f = \frac{1}{2} \cdot e \; / \cdot \frac{2}{f} \Rightarrow \frac{e}{f} = 2 \Rightarrow e : f = 2 : 1.$$

Vježba 016

Vrtnjom romba oko njegove dulje dijagonale nastaje tijelo obujma tri put manjeg od obujma tijela koje nastaje vrtnjom romba oko njegove kraće dijagonale. Koliki je omjer duljina dijagonala e : f? (e > f)

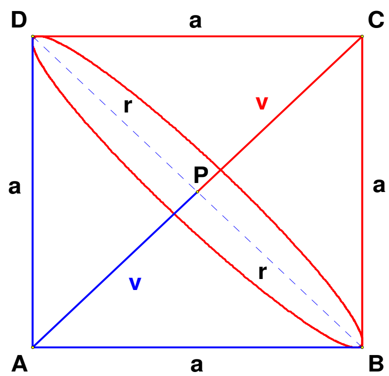
Rezultat: 3 : 1.

Zadatak 017 (Kety, gimnazija)

Kvadrat sa stranicom duljine a rotira oko svoje dijagonale. Koliki je volumen tako dobivenog tijela?

Rješenje 017

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \;,\; |DP| = |PB| = r = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \;,\; |AP| = |PC| = v = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$$



Nastalo tijelo sastoji se od dva stošca DBC i DBA sa zajedničkom bazom, krugom polumjera r. Volumen tijela iznosi:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot a^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot a^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow V = \frac{a^3 \cdot \pi}{3 \cdot \sqrt{2}}.$$

Vježba 017

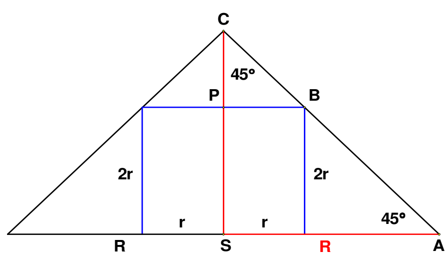
Kvadrat sa stranicom duljine $\sqrt{2}$ rotira oko svoje dijagonale. Koliki je volumen tako dobivenog tijela?

Rezultat: $\frac{2 \cdot \pi}{3}.$

Zadatak 018 (Los-Habalos, gimnazija)

Osni presjek uspravnog stošca pravokutan je trokut. U stožac je upisan valjak tako da mu jedna osnovica leži na bazi stošca. Promjer baze valjka jednak je njegovoj visini. Koliki je omjer volumena stošca i volumena valjka?

Rješenje 018



Budući da je osni presjek uspravnog stošca pravokutan trokut, trokut SAC je pravokutan jednakokračan:

$$|SC| = |SA| = R.$$

Trokut PBC je, također, pravokutan jednakokračan:

$$|PC| = |PB| = r.$$

Promjer baze valjka jednak je njegovoj visini pa vrijedi:

$$|SP| = 2 \cdot r.$$

Zato je:

$$|SC| = |SP| + |PC| \Rightarrow R = 2 \cdot r + r \Rightarrow R = 3 \cdot r.$$

Računamo omjer volumena stošca i volumena valjka:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \ - \text{ volumen stošca} \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot h \ - \text{ volumen valjka} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{\frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot R}{r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r} \Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{R^3}{6 \cdot r^3} \Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{(3 \cdot r)^3}{6 \cdot r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{27 \cdot r^3}{6 \cdot r^3} \Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{27}{6} \Rightarrow \frac{V_s}{V_v} = \frac{9}{2} \Rightarrow V_s : V_v = 9 : 2.$$

Vježba 018

Osni presjek uspravnog stošca pravokutan je trokut. U stožac je upisan valjak tako da mu jedna osnovica leži na bazi stošca. Promjer baze valjka jednak je njegovoj visini. Koliki je omjer volumena valjka i volumena stošca?

Rezultat: $V_v : V_s = 2 : 9.$

Zadatak 019 (Los-Habalos, gimnazija)

U kvadrat stranice $a = \sqrt{6}$ upisan je krug. Lik koji je razlika kvadrata i kruga rotira oko dijagonale kvadrata. Nađite rotacijski volumen.

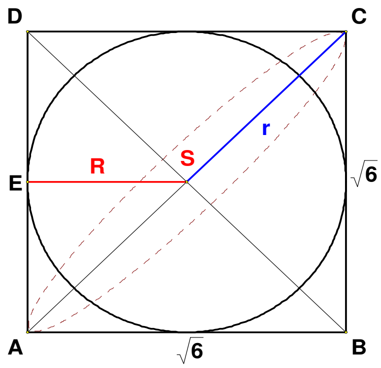
Rješenje 019

Ponovimo!

Dijagonala kvadrata stranice a iznosi $d = a \cdot \sqrt{2}.$

Volumen stošca: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$, volumen kugle: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3} = a \cdot \sqrt{a} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$



Rotacijom kvadrata ABCD oko, na primjer dijagonale DB, dobiju se dva stošca sa zajedničkom bazom, krugom sa središtem u točki S i polumjerom

$$r = |AS| = |SC| = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

i visinom

$$h = |SD| = |SB| = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Volumen nastalog tijela iznosi:

$$V_S = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_S = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \Rightarrow V_S = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi.$$

Rotacijom kruga oko dijagonale DB dobije se kugla polumjera

$$R = |SE| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Volumen kugle je:

$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 \cdot \pi \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{8} \cdot \pi \Rightarrow V_k = \sqrt{6} \cdot \pi.$$

Rotacijski volumen iznosi:

$$V = V_S - V_k \Rightarrow V = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi - \sqrt{6} \cdot \pi \Rightarrow V = \sqrt{12} \cdot \pi - \sqrt{6} \cdot \pi \Rightarrow V = \sqrt{6 \cdot 2} \cdot \pi - \sqrt{6} \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi - \sqrt{6} \cdot \pi \Rightarrow V = \sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \pi.$$

Vježba 019

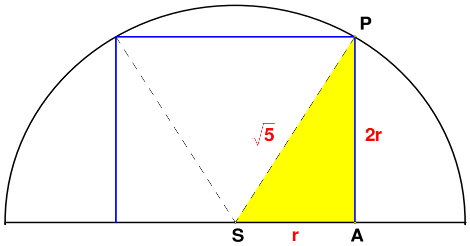
U kvadrat stranice a = 2 upisan je krug. Lik koji je razlika kvadrata i kruga rotira oko dijagonale kvadrata. Nađite rotacijski volumen.

Rezultat: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right).$

Zadatak 020 (Los-Habalos, gimnazija)

U polukuglu polumjera $\sqrt{5}$ upisan je valjak čija je visina jednaka promjeru njegove baze. Nađite volumen valjka.

Rješenje 020



Sa slike vidi se:

$$|SA| = r \quad , \quad |AP| = 2 \cdot r \quad , \quad |SP| = \sqrt{5}.$$

Uočimo pravokutan trokut SAP i pomoću Pitagorina poučka nađemo polumjer baze valjka:

$$|SA|^2 + |AP|^2 = |SP|^2 \Rightarrow r^2 + (2 \cdot r)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + 4 \cdot r^2 = 5 \Rightarrow 5 \cdot r^2 = 5 \; /:5 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1.$$

Volumen valjka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r=1\ ,\ h=2\cdot r=2 \\ V=r^2\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow V=1^2\cdot\pi\cdot 2 \Rightarrow V=2\cdot\pi.$$

Vježba 020

U polukuglu polumjera $2\cdot\sqrt{5}$ upisan je valjak čija je visina jednaka promjeru njegove baze. Nađite volumen valjka.

Rezultat: $16\cdot\pi.$