Zadatak 081 (Ivana, gimnazija)

Polumjer osnovke stošca dugačak je 6 cm, a visina stošca iznosi 12 cm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravninom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Formule za površinu trokuta glase:

- $P = r \cdot s$,

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

- $P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, Heronova formula

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta, a s poluopseg trokuta

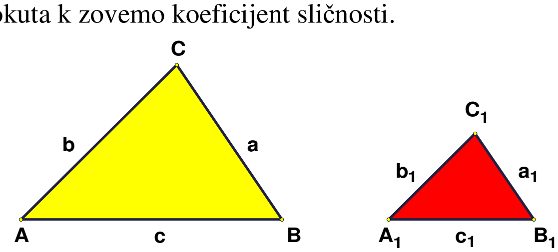
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

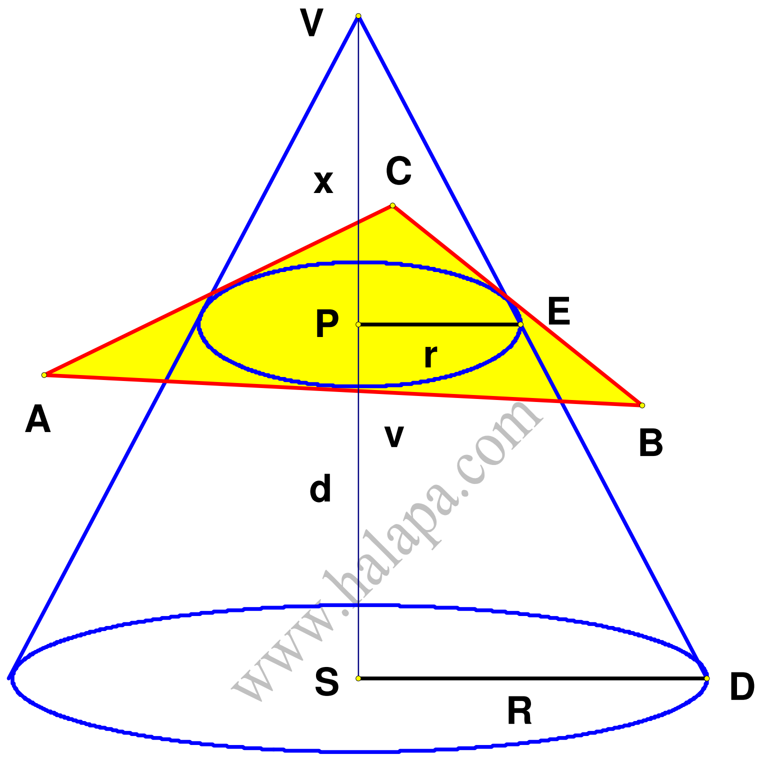
$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$|VS| = v = 12 \ , \ |VP| = x \ , \ |PS| = d \ , \ |SD| = R = 6 \ , \ |PE| = r$$

Budući da je ravnina trokuta ABC usporedna s ravninom osnovke stošca, njezin presjek sa stošcem je kružnica polumjera r. Ona je **upisana** trokutu ABC pa joj polumjer r možemo izračunati na sljedeći način:

$$\left.\begin{matrix} P = r \cdot s \\ P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \ / \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s}.$$

Najprije izračunamo poluopseg s trokuta ABC.

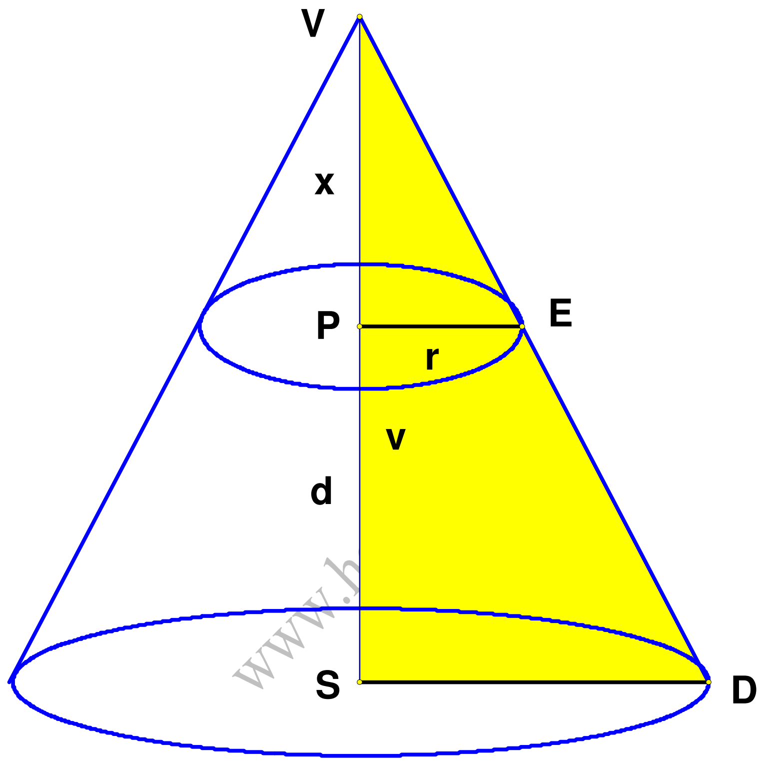
$$\left.\begin{matrix} a = 5 \ , \ b = 7 \ , \ c = 8 \\ s = \frac{a+b+c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = \frac{5+7+8}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = 10 \ cm.$$

Polumjer r kružnice je:

$$\left.\begin{array}{l} s = 10 \;\;,\;\; a = 5 \;\;,\;\; b = 7 \;\;,\;\; c = 8 \\ r = \dfrac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-7) \cdot (10-8)}}{10} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot 10 \cdot 3}}{10} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{100 \cdot 3}}{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow r = \frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow r = \sqrt{3} \; cm.$$



Uočimo slične trokute ΔVSD i ΔVPE (imaju jednake kutove) i napišimo razmjer:

$$|VS| : |VP| = |SD| : |PE| \Rightarrow v : x = R : r \Rightarrow 12 : x = 6 : \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot x = 12 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot x = 12 \cdot \sqrt{3} \;\; / : 6 \Rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{3} \; cm.$$

Ravnine trokuta ABC i osnovke stošca međusobno su udaljene:

$$d = |PS| \Rightarrow d = |VS| - |VP| \Rightarrow d = v - x \Rightarrow d = 12 - 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 2 \cdot \left(6 - \sqrt{3}\right) \; cm.$$

Vježba 081

Polumjer osnovke stošca dugačak je 0.6 dm, a visina stošca iznosi 1.2 dm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravninom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rezultat: $d = 2 \cdot \left(6 - \sqrt{3}\right) \; cm.$

Zadatak 082 (Matija, gimnazija)

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rješenje 082

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

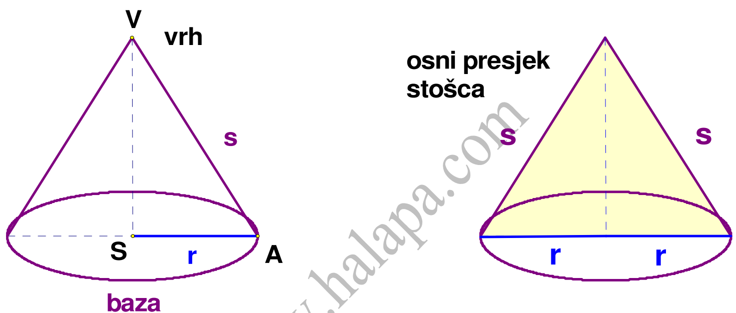
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

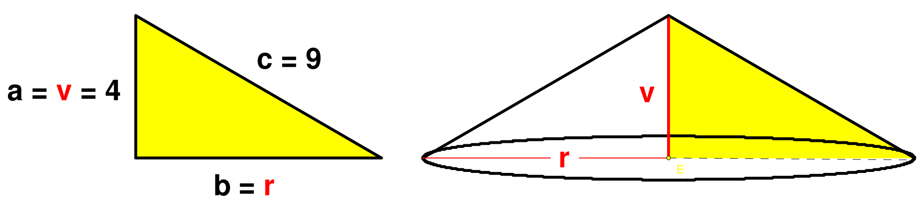
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze. Pravac određen točkama V i S zove se os stošca. Dužinu $\overline{AV}$ zovemo izvodnicom stošca i označavamo sa s. Ona povezuje vrh stošca s točkom na obodu baze.



Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Uočimo da je polumjer osnovke nastalog stošca jednak duljini druge katete zadanog trokuta. Prema Pitagorinu poučku dobije se:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow 81 = 16 + r^2 \Rightarrow 16 + r^2 = 81 \Rightarrow r^2 = 81 - 16 \Rightarrow r^2 = 65.$$

Nadalje, visina nastaloga stošca jednaka je duljini katete oko koje je rotirao polazni pravokutni trokut, tj.

v = 4 cm.

Traženi obujam stošca jednak je:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \begin{bmatrix} r^2 = 65 \ cm^2 \\ v = 4 \ cm \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 65 \ cm^2 \cdot \pi \cdot 4 \ cm \Rightarrow V = \frac{260}{3} \cdot \pi \ cm^3.$$

Vježba 082

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 10 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rezultat: $V = 112 \cdot \pi \ cm^3.$

Zadatak 083 (Ana, gimnazija)

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 24 cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

$$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3 \qquad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$$

$$C.\ 772 \cdot \pi \ cm^3 \qquad D.\ 1536 \cdot \pi \ cm^3$$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

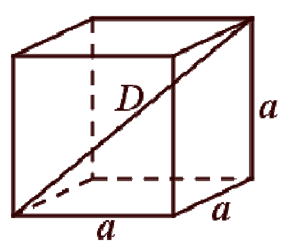
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki.
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

$$D = a \cdot \sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$



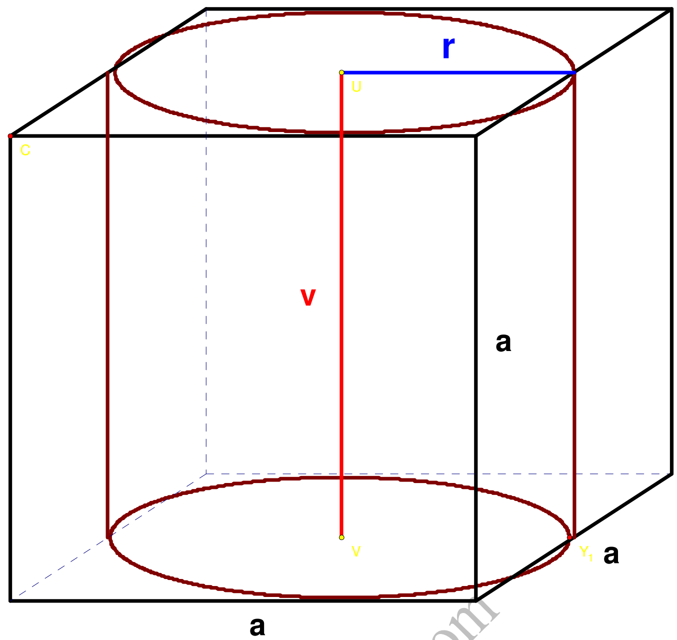
Budući da je zadana duljina prostorne dijagonale kocke, možemo izračunati duljinu brida.

$$D = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \ / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left[D = 24 \ cm \right] \Rightarrow a = \frac{24 \ cm \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{24 \ cm \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3} \ cm.$$

Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma.



Sa slike vidi se:

$$v = a \ , \ r = \frac{1}{2} \cdot a$$

Obujam valjka iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow \left[a = 8 \cdot \sqrt{3} \ cm \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{3} \ cm\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \ cm \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 8^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \ cm^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \ cm^3 \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \ cm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 16 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \ cm^3 \Rightarrow V = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 083

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 2.4 dm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

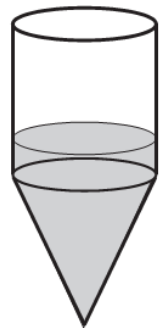
$$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3 \qquad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$$

$$C.\ 772 \cdot \pi \ cm^3 \qquad D.\ 1536 \cdot \pi \ cm^3$$

Rezultat: A.

Zadatak 084 (Marija, gimnazija)

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 7 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenoga** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



A. 3 *cm*   *B.* 4 *cm*   *C.* 6 *cm*   *D.* 8 *cm*

Rješenje 084

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

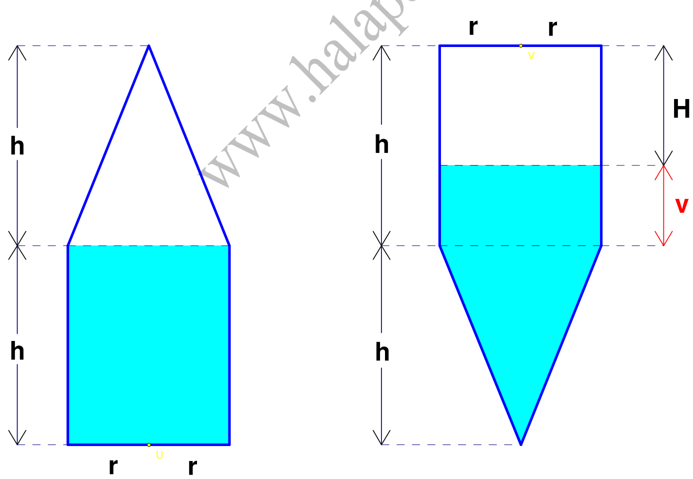
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom h iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;\;,\;\; n \neq 0 \;\;,\;\; n \neq 1.$$



Sa slika vidi se:

$$h = 12 \; cm \;\;,\;\; 2 \cdot r = 7 \; cm \;\;,\;\; H + v = h \;\Rightarrow\; H = h - v$$

Budući da pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode, volumen vode pune čaše jednak je zbroju volumena vode punog stošca i volumena vode dijela čaše visine v.

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \;\Rightarrow\; r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \;/ \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; h = \frac{1}{3} \cdot h + v \;\Rightarrow\; h = \frac{1}{3} \cdot h + v \;/ \cdot 3 \;\Rightarrow\; 3 \cdot h = h + 3 \cdot v \;\Rightarrow\; h + 3 \cdot v = 3 \cdot h \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3 \cdot v = 3 \cdot h - h \;\Rightarrow\; 3 \cdot v = 2 \cdot h \;\Rightarrow\; 3 \cdot v = 2 \cdot h \;/ : 3 \;\Rightarrow\; v = \frac{2}{3} \cdot h \;\Rightarrow\; v = \frac{2}{3} \cdot 12 \; cm \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ v = \frac{2}{3} \cdot 12 \ cm \ \Rightarrow \ v = 2 \cdot 4 \ cm \ \Rightarrow \ v = 8 \ cm.$$

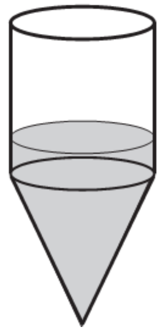
Visina neispunjenoga dijela čaše iznosi:

$$H = h - v \ \Rightarrow \ H = 12 \ cm - 8 \ cm \ \Rightarrow \ H = 4 \ cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 084

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 9 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenog** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$

Rezultat: B.

Zadatak 085 (Eugen, srednja škola)

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 10 cm zakrene se oko dulje stranice za 150º. Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rješenje 085

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kružnog isječka sa središnjim kutom α dana je formulom

$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

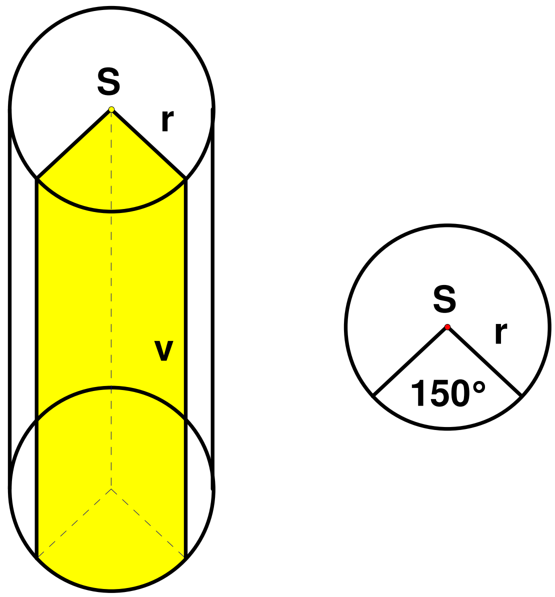
Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = B \cdot v.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Sa slike vidi se da je osnovka (baza) tijela kružni isječak površine

$$B=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^\circ}\Rightarrow\left[\alpha=150^\circ\right]\Rightarrow B=\frac{r^2\cdot\pi\cdot 150^\circ}{360^\circ}\Rightarrow B=\frac{r^2\cdot\pi\cdot 150^\circ}{360^\circ}\Rightarrow B=\frac{5\cdot r^2\cdot\pi}{12}.$$

Obujam tijela iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} B=\dfrac{5\cdot r^2\cdot\pi}{12} \\ V=B\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow V=\frac{5\cdot r^2\cdot\pi}{12}\cdot v\Rightarrow\left[\begin{array}{l} r=6\ cm \\ v=10\ cm \end{array}\right]\Rightarrow V=\frac{5\cdot(6\ cm)^2\cdot\pi}{12}\cdot 10\ cm\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\frac{5\cdot 36\ cm^2\cdot\pi}{12}\cdot 10\ cm\Rightarrow V=\frac{5\cdot 36\ cm^2\cdot\pi}{12}\cdot 10\ cm\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=5\cdot 3\ cm^2\cdot\pi\cdot 10\ cm\Rightarrow V=150\cdot\pi\ cm^3.$$

Vježba 085

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 20 cm zakrene se oko dulje stranice za 150º. Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rezultat: $300\cdot\pi\ cm^3.$

Zadatak 086 (Iva, gimnazija)

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 1500 L. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 0.265\ m$ $B.\ 0.795\ m$ $C.\ 0.9\ m$ $D.\ 2.5\ m$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$1\ L=1\ dm^3=1\cdot 10^{-3}\ m^3.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V=r^2\cdot\pi\cdot h.$$

1.inačica

Za 5 sati spremnik se napuni sa 7.5 m^3 vode.

$$V = 5 \cdot 1500\ L \Rightarrow V = 7500\ L \Rightarrow V = 7500\ dm^3 \Rightarrow V = 7.5\ m^3.$$

Računamo za koliko se podigla razina vode u spremniku.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 7.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{7.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.265\ m.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Najprije izračunamo visinu valjka koji ima polumjer baze r = 3 m i obujam 1.5 m^3.

$$V = 1500\ L \Rightarrow V = 1500\ dm^3 \Rightarrow V = 1.5\ m^3.$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 1.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{1.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.053\ m.$$

Dakle, za 1 sat razina vode podigne se za 0.053 m.
Za 5 sati razina vode porast će za

$$5 \cdot 0.053\ \text{m} = 0.265\ \text{m}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 086

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 15 hl. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$$A.\ 0.265\ m \qquad B.\ 0.795\ m \qquad C.\ 0.9\ m \qquad D.\ 2.5\ m$$

Rezultat: A.

Zadatak 087 (Iva, gimnazija)

Neka je r polumjer polukugle i osnovice uspravnog stošca. Ako su volumeni polukugle i stošca jednaki, kolika je visina stošca?

$$A.\ v = 2 \cdot r \qquad B.\ v = r \qquad C.\ v = 3 \cdot r \qquad D.\ v = \frac{1}{2} \cdot r$$

Rješenje 087

Ponovimo!

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Obujam stošca

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \text{ volumen polukugle} \\ V_2 = \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} \text{ volumen stošca} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ V_1 = V_2 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi = \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi = \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\pi = \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} \Rightarrow \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} = \frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2\cdot\pi\cdot v}{3} = \frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\pi \;/\cdot\frac{3}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow v = 2\cdot r.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 087

Neka je 2 polumjer polukugle i osnovice uspravnog stošca. Ako su volumeni polukugle i stošca jednaki, kolika je visina stošca?

$A.\ v = 4 \qquad B.\ v = 2 \qquad C.\ v = 6 \qquad D.\ v = 1$

Rezultat: A.

Zadatak 088 (4B, TUPŠ)

Koliko iznosi razmak između dvije susjedne oznake na menzuri ako ona označava 1 cm^3, a unutarnji promjer menzure iznosi 1 cm?

Rješenje 088

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2\cdot\pi\cdot h.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Zadano je:

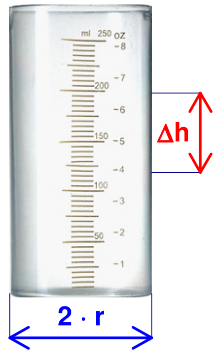
$\Delta V = 1\ cm^3$, $\quad 2\cdot r = 1\ cm \Rightarrow r = 0.5\ cm$, $\quad \Delta h = ?$

Računamo!

$$\Delta V = r^2\cdot\pi\cdot\Delta h \Rightarrow r^2\cdot\pi\cdot\Delta h = \Delta V \Rightarrow r^2\cdot\pi\cdot\Delta h = \Delta V \;/\cdot\frac{1}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta V}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{(0.5\ cm)^2\cdot\pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{0.25\ cm^2\cdot\pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{0.25\ cm^2\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm}{0.25\cdot\pi} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširimo} \\ \text{razlomak s } 4 \end{array}\right] \Rightarrow \Delta h = \frac{4}{\pi}\ cm.$$



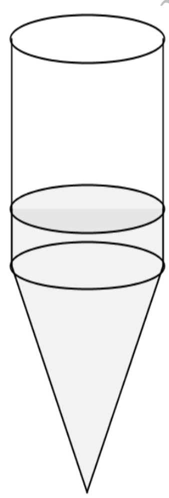
Vježba 088

Koliko iznosi razmak između dvije susjedne oznake na menzuri ako ona označava 2 cm^3, a unutarnji promjer menzure iznosi 1 cm?

Rezultat: $\frac{8}{\pi}\ cm.$

Zadatak 089 (Tonka, maturantica)

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 7 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao i čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac.
Kolika je visina **ispunjenoga** dijela čaše?
Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$

Rješenje 089

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

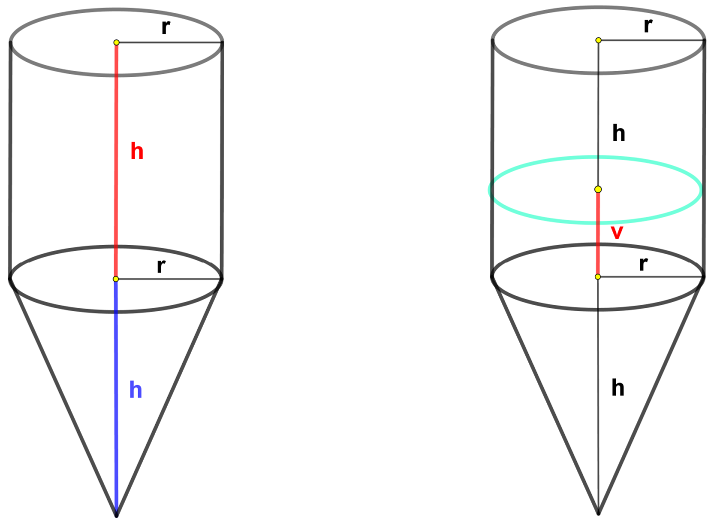
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom h iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



1.inačica

Uočimo da valjak (čaša) i stožac imaju jednake promjere baze 2 · r (tj. jednake polumjere baze r) i jednake visine h. Pri prelijevanju u posudu oblika stošca stane jedna trećina vode iz čaše (valjka), a u valjku ostane vode do visine v valjka:

$$\underbrace{r^2\cdot\pi\cdot h}_{valjak}=\underbrace{\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h}_{stožac}+\underbrace{r^2\cdot\pi\cdot v}_{novi\ valjak}\ \Rightarrow\ r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h+r^2\cdot\pi\cdot v\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h+r^2\cdot\pi\cdot v\ /\cdot\frac{1}{r^2\cdot\pi}\ \Rightarrow\ h=\frac{1}{3}\cdot h+v\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\cdot h+v=h\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v=h-\frac{1}{3}\cdot h\ \Rightarrow\left[\,h=12\ cm\,\right]\Rightarrow\ v=12\ cm-\frac{1}{3}\cdot 12\ cm\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v=12\ cm-\frac{1}{3}\cdot 12\ cm\ \Rightarrow\ v=12\ cm-4\ cm\ \Rightarrow\ v=8\ cm.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Uočimo da valjak (čaša) i stožac imaju jednake promjere baze 2 · r (tj. jednake polumjere baze r) i jednake visine h. Pri prelijevanju u posudu oblika stošca stane jedna trećina vode iz čaše (valjka), a u valjku ostanu dvije trećine vode do visine v valjka:

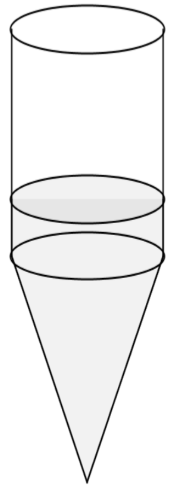
$$\frac{2}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h=r^2\cdot\pi\cdot v\ \Rightarrow\ r^2\cdot\pi\cdot v=\frac{2}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h\ \Rightarrow\ r^2\cdot\pi\cdot v=\frac{2}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h\ /\cdot\frac{1}{r^2\cdot\pi}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v=\frac{2}{3}\cdot h\ \Rightarrow\ \left[\,h=12\ cm\,\right]\ \Rightarrow\ v=\frac{2}{3}\cdot 12\ cm\ \Rightarrow\ v=\frac{2}{3}\cdot 12\ cm\ \Rightarrow\ v=2\cdot 4\ cm\ \Rightarrow\ v=8\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 089

Čaša u obliku valjka visine 1.2 dm i polumjera 3.5 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao i čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac.
Kolika je visina **ispunjenoga** dijela čaše?
Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$$

Rezultat: D.

Zadatak 090 (Domagoj, srednja škola)

Zadana su dva stošca. Polumjer baze prvog je 4 puta veći od polumjera baze drugog stošca, a visina prvog stošca je 4 puta manja od visine drugog stošca. Koliki je omjer volumena prvog i drugog stošca?

$$A.\ 1 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ \frac{1}{4} \qquad D.\ 16 \qquad E.\ \frac{1}{16}$$

Rješenje 090

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \frac{n}{1} = n \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Volumen prvog stošca je:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 = 4 \cdot r \\ v_1 = \frac{1}{4} \cdot v \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot v \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot v \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Volumen drugog stošca je:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} r_2 = r \\ v_2 = v \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Omjer volumen iznosi:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v}{\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v}{\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{1}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 090

Zadana su dva stošca. Polumjer baze prvog je 3 puta veći od polumjera baze drugog stošca, a visina prvog stošca je 3 puta manja od visine drugog stošca. Koliki je omjer volumena prvog i drugog stošca?

$$A.\ 3 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ \frac{1}{3} \qquad D.\ 9 \qquad E.\ \frac{1}{9}$$

Rezultat: A.

Zadatak 091 (Domagoj, srednja škola)

Presjek uspravnog stošca sa ravninom koja ga raspolavlja i okomita je na bazu stošca je jednakostraničan trokut površine $\sqrt{3}$. Volumen stošca iznosi:

$$A.\ 8\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \qquad B.\ 32\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \qquad C.\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\pi \qquad D.\ \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\pi \qquad E.\ \frac{16\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\pi$$

Rješenje 091

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b},\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

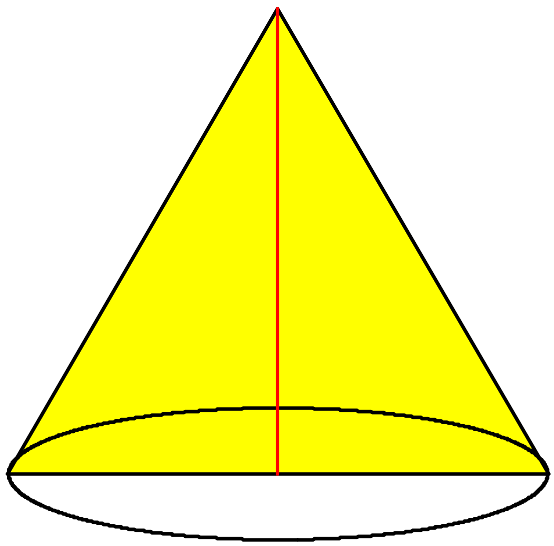
$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v.$$

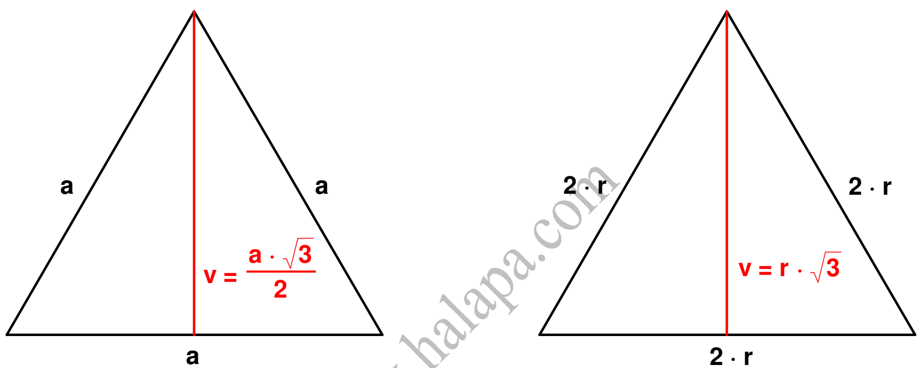
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta α = 60° i tri jednake stranice.
Duljina visine jednakostraničnog trokuta duljine stranice a iznosi:

$$v=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

Ploština jednakostraničnog trokuta duljine stranice a iznosi:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$





Računamo polumjer baze r.

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left[\, a = 2 \cdot r \,\right] \Rightarrow P = \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = r^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r^2 \cdot \sqrt{3} = P \Rightarrow \left[\, P = \sqrt{3} \,\right] \Rightarrow r^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow r^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \; / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \; / \sqrt{} \Rightarrow r = \sqrt{1} \Rightarrow r = 1.$$

Volumen stošca iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \left[\, v = r \cdot \sqrt{3} \,\right] \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow \left[\, r = 1 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1^3 \cdot \pi \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 091

Odmor!

Rezultat: …