Zadatak 081 (Ivana, gimnazija)

Polumjer osnovke stošca dugačak je 6 cm, a visina stošca iznosi 12 cm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravninom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Formule za površinu trokuta glase:

- $P = r \cdot s$,

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

- $P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, Heronova formula

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta, a s poluopseg trokuta

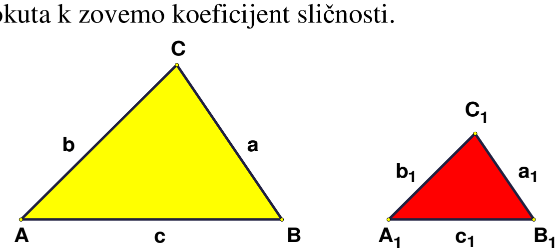
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

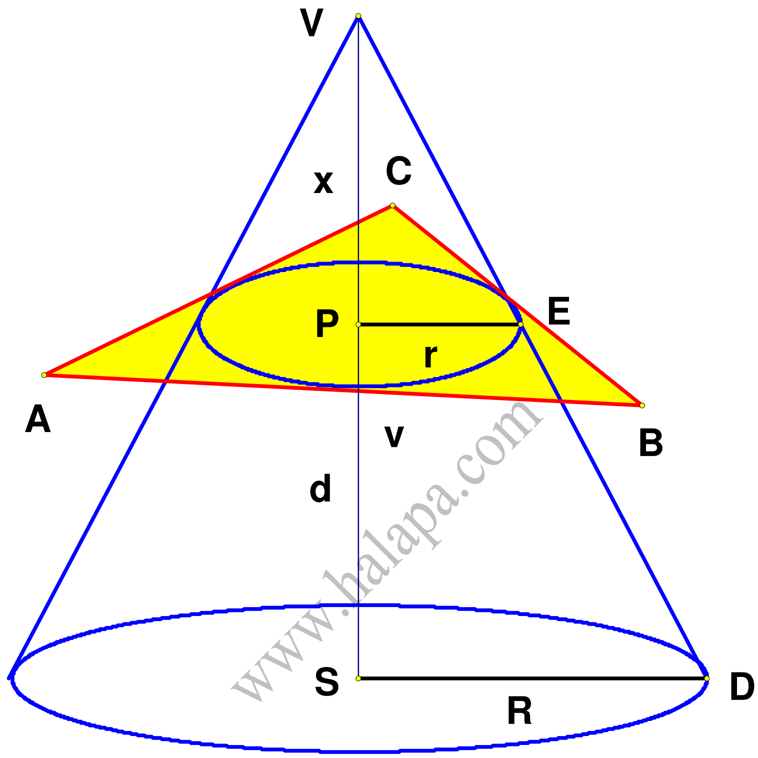
$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$|VS| = v = 12 \ , \ |VP| = x \ , \ |PS| = d \ , \ |SD| = R = 6 \ , \ |PE| = r$$

Budući da je ravnina trokuta ABC usporedna s ravninom osnovke stošca, njezin presjek sa stošcem je kružnica polumjera r. Ona je **upisana** trokutu ABC pa joj polumjer r možemo izračunati na sljedeći način:

$$\left. \begin{aligned} & P = r \cdot s \\ & P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \ / \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s}.$$

Najprije izračunamo poluopseg s trokuta ABC.

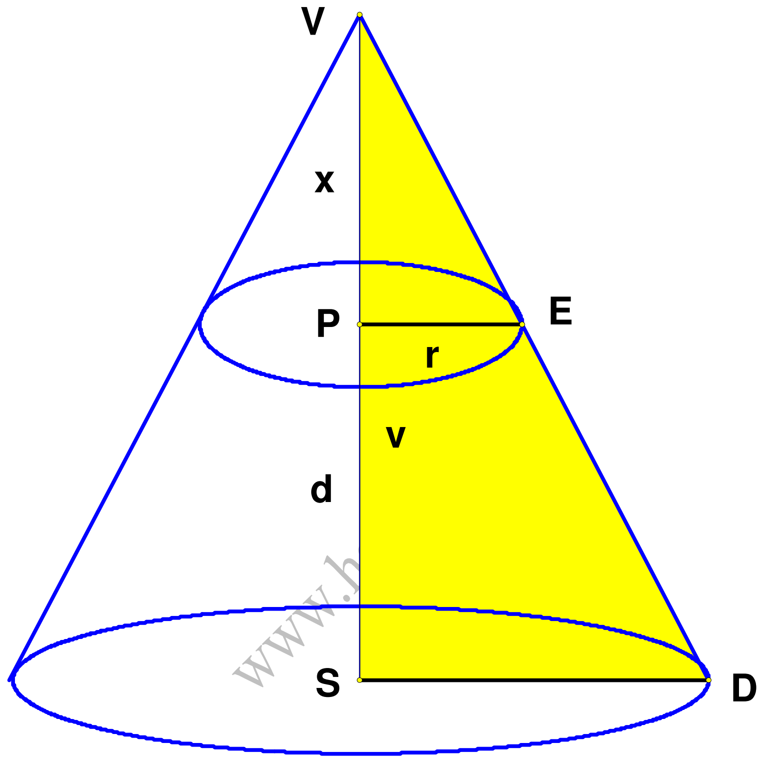
$$\left. \begin{aligned} & a = 5 \ , \ b = 7 \ , \ c = 8 \\ & s = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{5+7+8}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = 10 \ cm.$$

Polumjer r kružnice je:

$$\left.\begin{matrix} s=10 \ , \ a=5 \ , \ b=7 \ , \ c=8 \\ r=\dfrac{\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{s} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{10\cdot(10-5)\cdot(10-7)\cdot(10-8)}}{10} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{10\cdot 10\cdot 3}}{10} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{100\cdot 3}}{10} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{matrix}\right] \Rightarrow r=\frac{\sqrt{100}\cdot\sqrt{3}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{10} \Rightarrow r=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{10} \Rightarrow r=\sqrt{3}\ cm.$$



Uočimo slične trokute ΔVSD i ΔVPE (imaju jednake kutove) i napišimo razmjer:

$$|VS|:|VP|=|SD|:|PE| \Rightarrow v:x=R:r \Rightarrow 12:x=6:\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x=12\cdot\sqrt{3} \Rightarrow 6\cdot x=12\cdot\sqrt{3}\ /:6 \Rightarrow x=2\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

Ravnine trokuta ABC i osnovke stošca međusobno su udaljene:

$$d=|PS| \Rightarrow d=|VS|-|VP| \Rightarrow d=v-x \Rightarrow d=12-2\cdot\sqrt{3} \Rightarrow d=2\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)\ cm.$$

Vježba 081

Polumjer osnovke stošca dugačak je 0.6 dm, a visina stošca iznosi 1.2 dm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravninom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rezultat: $d=2\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)\ cm.$

Zadatak 082 (Matija, gimnazija)

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rješenje 082

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

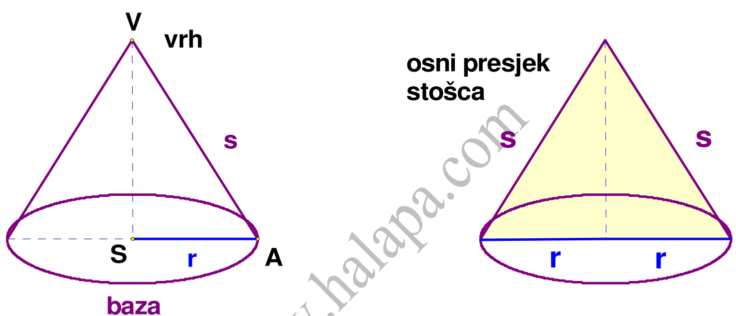
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

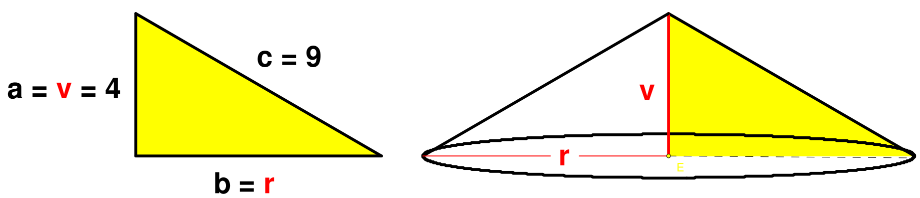
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze. Pravac određen točkama V i S zove se os stošca. Dužinu $\overline{AV}$ zovemo izvodnicom stošca i označavamo sa s. Ona povezuje vrh stošca s točkom na obodu baze.



Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Uočimo da je polumjer osnovke nastalog stošca jednak duljini druge katete zadanog trokuta. Prema Pitagorinu poučku dobije se:

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; 9^2 = 4^2 + r^2 \;\Rightarrow\; 81 = 16 + r^2 \;\Rightarrow\; 16 + r^2 = 81 \;\Rightarrow\; r^2 = 81 - 16 \;\Rightarrow\; r^2 = 65.$$

Nadalje, visina nastaloga stošca jednaka je duljini katete oko koje je rotirao polazni pravokutni trokut, tj.

v = 4 cm.

Traženi obujam stošca jednak je:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} r^2 = 65 \; cm^2 \\ v = 4 \; cm \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; V = \frac{1}{3} \cdot 65 \; cm^2 \cdot \pi \cdot 4 \; cm \;\Rightarrow\; V = \frac{260}{3} \cdot \pi \; cm^3.$$

Vježba 082

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 10 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rezultat: $V = 112 \cdot \pi \ cm^3$.

Zadatak 083 (Ana, gimnazija)

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 24 cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

$$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3 \qquad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$$

$$C.\ 772 \cdot \pi \ cm^3 \qquad D.\ 1536 \cdot \pi \ cm^3$$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

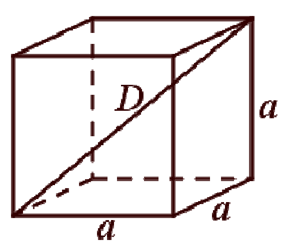
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki.
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

$$D = a \cdot \sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$



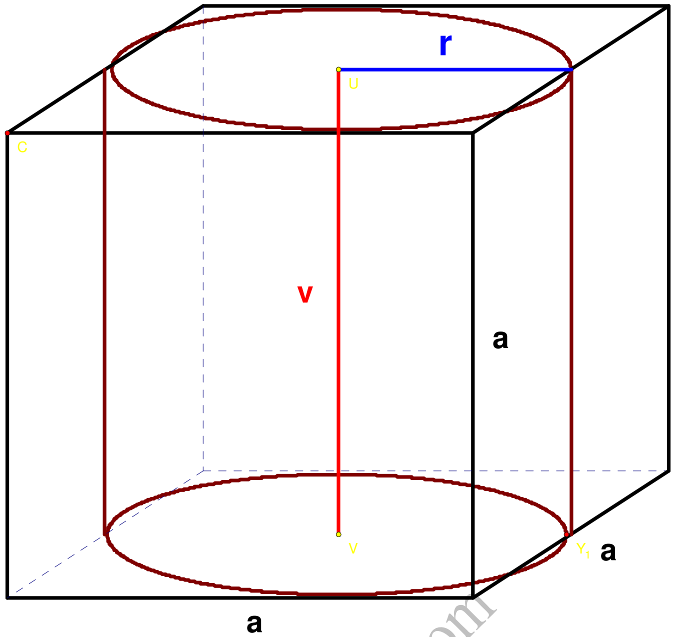
Budući da je zadana duljina prostorne dijagonale kocke, možemo izračunati duljinu brida.

$$D = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \ / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left[D = 24 \ cm \right] \Rightarrow a = \frac{24 \ cm \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{24\ cm \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3}\ cm.$$

Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma.



Sa slike vidi se:

$$v = a\ ,\ r = \frac{1}{2} \cdot a$$

Obujam valjka iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow \left[\ a = 8 \cdot \sqrt{3}\ cm\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{3}\ cm\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3}\ cm \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 8^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2\ cm^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3}\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3}\ cm^3 \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3}\ cm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 16 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3}\ cm^3 \Rightarrow V = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 083

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 2.4 dm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

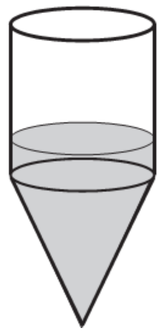
$$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3 \qquad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3$$

$$C.\ 772 \cdot \pi\ cm^3 \qquad D.\ 1536 \cdot \pi\ cm^3$$

Rezultat: A.

Zadatak 084 (Marija, gimnazija)

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 7 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenoga** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$$

Rješenje 084

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

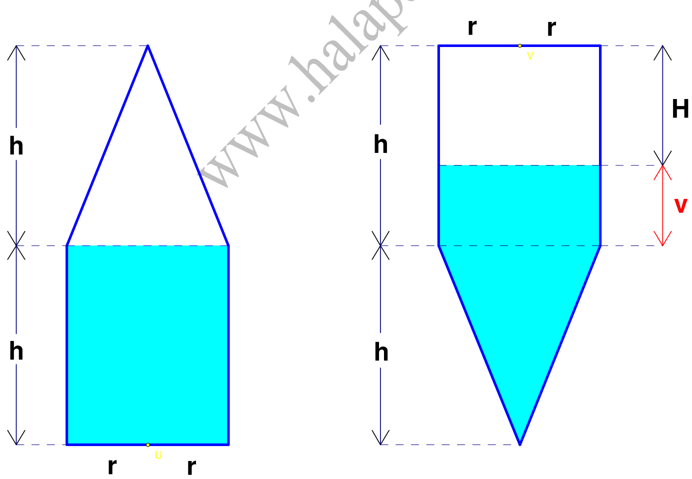
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom h iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Sa slika vidi se:

$$h = 12\ cm \ , \ 2 \cdot r = 7\ cm \ , \ H + v = h \ \Rightarrow \ H = h - v$$

Budući da pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode, volumen vode pune čaše jednak je zbroju volumena vode punog stošca i volumena vode dijela čaše visine v.

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \ \Rightarrow \ r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ h = \frac{1}{3} \cdot h + v \ \Rightarrow \ h = \frac{1}{3} \cdot h + v \ / \cdot 3 \ \Rightarrow \ 3 \cdot h = h + 3 \cdot v \ \Rightarrow \ h + 3 \cdot v = 3 \cdot h \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 3 \cdot v = 3 \cdot h - h \ \Rightarrow \ 3 \cdot v = 2 \cdot h \ \Rightarrow \ 3 \cdot v = 2 \cdot h \ / : 3 \ \Rightarrow \ v = \frac{2}{3} \cdot h \ \Rightarrow \ v = \frac{2}{3} \cdot 12\ cm \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; v = \frac{2}{3} \cdot 12 \; cm \; \Rightarrow \; v = 2 \cdot 4 \; cm \; \Rightarrow \; v = 8 \; cm.$$

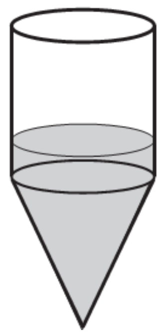
Visina neispunjenoga dijela čaše iznosi:

$$H = h - v \; \Rightarrow \; H = 12 \; cm - 8 \; cm \; \Rightarrow \; H = 4 \; cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 084

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 9 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenog** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$

Rezultat: B.

Zadatak 085 (Eugen, srednja škola)

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 10 cm zakrene se oko dulje stranice za 150º. Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rješenje 085

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).

Ploština kružnog isječka sa središnjim kutom α dana je formulom

$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

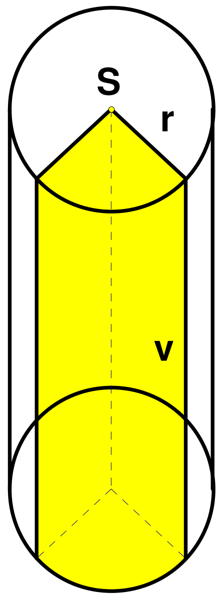
Obujam valjka

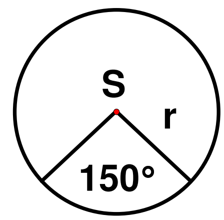
Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = B \cdot v.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$





Sa slike vidi se da je osnovka (baza) tijela kružni isječak površine

$$B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \left[\alpha = 150^\circ \right] \Rightarrow B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 150^\circ}{360^\circ} \Rightarrow B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 150^\circ}{360^\circ} \Rightarrow B = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12}.$$

Obujam tijela iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} B = \dfrac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12} \\ V = B \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12} \cdot v \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 6\ cm \\ v = 10\ cm \end{array} \right] \Rightarrow V = \frac{5 \cdot (6\ cm)^2 \cdot \pi}{12} \cdot 10\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{5 \cdot 36\ cm^2 \cdot \pi}{12} \cdot 10\ cm \Rightarrow V = \frac{5 \cdot 36\ cm^2 \cdot \pi}{12} \cdot 10\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 5 \cdot 3\ cm^2 \cdot \pi \cdot 10\ cm \Rightarrow V = 150 \cdot \pi\ cm^3.$$

Vježba 085

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 20 cm zakrene se oko dulje stranice za 150º. Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rezultat: $300 \cdot \pi\ cm^3.$

Zadatak 086 (Iva, gimnazija)

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 1500 L. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 0.265\ m$ $\quad B.\ 0.795\ m$ $\quad C.\ 0.9\ m$ $\quad D.\ 2.5\ m$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$1\ L = 1\ dm^3 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

1.inačica

Za 5 sati spremnik se napuni sa 7.5 m^3 vode.

$$V = 5 \cdot 1500\ L \Rightarrow V = 7500\ L \Rightarrow V = 7500\ dm^3 \Rightarrow V = 7.5\ m^3.$$

Računamo za koliko se podigla razina vode u spremniku.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 7.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{7.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.265\ m.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Najprije izračunamo visinu valjka koji ima polumjer baze r = 3 m i obujam 1.5 m^3.

$$V = 1500\ L \Rightarrow V = 1500\ dm^3 \Rightarrow V = 1.5\ m^3.$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 1.5\ m^3 \\ r = 3\ m \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{1.5\ m^3}{(3\ m)^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = 0.053\ m.$$

Dakle, za 1 sat razina vode podigne se za 0.053 m.
Za 5 sati razina vode porast će za

$$5 \cdot 0.053\ m = 0.265\ m.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 086

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 15 hl. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 0.265\ m \qquad B.\ 0.795\ m \qquad C.\ 0.9\ m \qquad D.\ 2.5\ m$

Rezultat: A.

Zadatak 087 (Iva, gimnazija)

Neka je r polumjer polukugle i osnovice uspravnog stošca. Ako su volumeni polukugle i stošca jednaki, kolika je visina stošca?

$A.\ v = 2 \cdot r \qquad B.\ v = r \qquad C.\ v = 3 \cdot r \qquad D.\ v = \frac{1}{2} \cdot r$

Rješenje 087

Ponovimo!

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Obujam stošca

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \ \text{volumen polukugle} \\ V_2 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \ \text{volumen stošca} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ V_1 = V_2 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \Rightarrow \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \ / \cdot \frac{3}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow v = 2 \cdot r.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 087

Neka je 2 polumjer polukugle i osnovice uspravnog stošca. Ako su volumeni polukugle i stošca jednaki, kolika je visina stošca?

$A.\ v = 4$ $\quad B.\ v = 2$ $\quad C.\ v = 6$ $\quad D.\ v = 1$

Rezultat: A.

Zadatak 088 (4B, TUPŠ)

Koliko iznosi razmak između dvije susjedne oznake na menzuri ako ona označava 1 cm^3, a unutarnji promjer menzure iznosi 1 cm?

Rješenje 088

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zadano je:

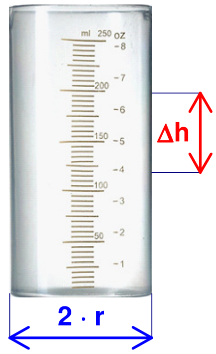
$\Delta V = 1\ cm^3$, $\quad 2 \cdot r = 1\ cm \Rightarrow r = 0.5\ cm$, $\quad \Delta h = ?$

Računamo!

$$\Delta V = r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h = \Delta V \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h = \Delta V \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{(0.5\ cm)^2 \cdot \pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{0.25\ cm^2 \cdot \pi} \Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm^3}{0.25\ cm^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{1\ cm}{0.25 \cdot \pi} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširimo} \\ \text{razlomak s } 4 \end{array}\right] \Rightarrow \Delta h = \frac{4}{\pi}\ cm.$$



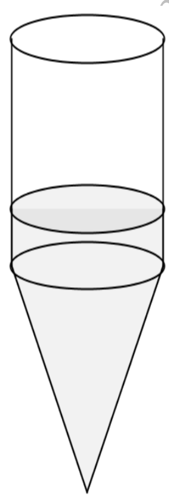
Vježba 088

Koliko iznosi razmak između dvije susjedne oznake na menzuri ako ona označava 2 cm^3, a unutarnji promjer menzure iznosi 1 cm?

Rezultat: $\frac{8}{\pi}\ cm.$

Zadatak 089 (Tonka, maturantica)

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 7 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao i čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac.
Kolika je visina **ispunjenoga** dijela čaše?
Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



$A.\ 3\ cm \qquad B.\ 4\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 8\ cm$

Rješenje 089

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

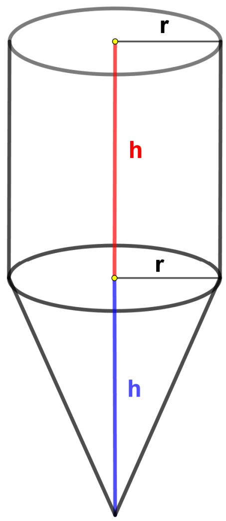
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

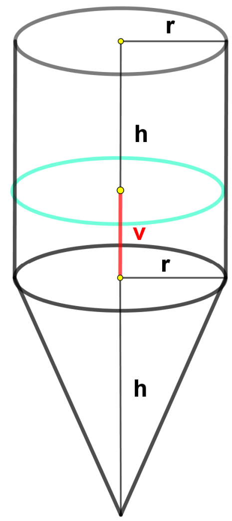
Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom h iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$





1.inačica

Uočimo da valjak (čaša) i stožac imaju jednake promjere baze 2 · r (tj. jednake polumjere baze r) i jednake visine h. Pri prelijevanju u posudu oblika stošca stane jedna trećina vode iz čaše (valjka), a u valjku ostane vode do visine v valjka:

$$\underbrace{r^2 \cdot \pi \cdot h}_{valjak} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h}_{stožac} + \underbrace{r^2 \cdot \pi \cdot v}_{novi\ valjak} \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \;/ \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{1}{3} \cdot h + v \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot h + v = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = h - \frac{1}{3} \cdot h \Rightarrow \left[\, h = 12\ cm \,\right] \Rightarrow v = 12\ cm - \frac{1}{3} \cdot 12\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 12\ cm - \frac{1}{3} \cdot 12\ cm \Rightarrow v = 12\ cm - 4\ cm \Rightarrow v = 8\ cm.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Uočimo da valjak (čaša) i stožac imaju jednake promjere baze 2 · r (tj. jednake polumjere baze r) i jednake visine h. Pri prelijevanju u posudu oblika stošca stane jedna trećina vode iz čaše (valjka), a u valjku ostanu dvije trećine vode do visine v valjka:

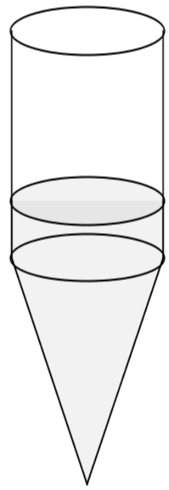
$$\frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \;/ \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot h \Rightarrow \left[\, h = 12\ cm \,\right] \Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot 12\ cm \Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot 12\ cm \Rightarrow v = 2 \cdot 4\ cm \Rightarrow v = 8\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 089

Čaša u obliku valjka visine 1.2 dm i polumjera 3.5 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao i čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac.
Kolika je visina **ispunjenoga** dijela čaše?
Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



A. 3 *cm* *B*. 4 *cm* *C*. 6 *cm* *D*. 8 *cm*

Rezultat: D.