

Zadatak 081 (Ivana, gimnazija)

Polumjer osnovke stošca dugačak je 6 cm, a visina stošca iznosi 12 cm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravninom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \quad , \quad a \geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Formule za površinu trokuta glase:

- $P = r \cdot s$,

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

- $P = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, Heronova formula

gdje su a , b i c duljine stranica trokuta, a s poluopseg trokuta

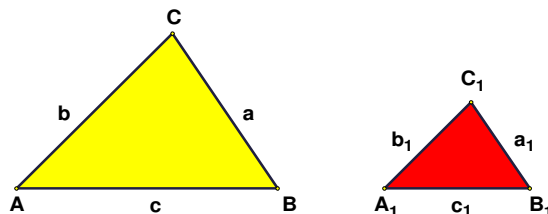
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \quad , \quad \beta = \beta_1 \quad , \quad \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent $a : b$, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b .

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

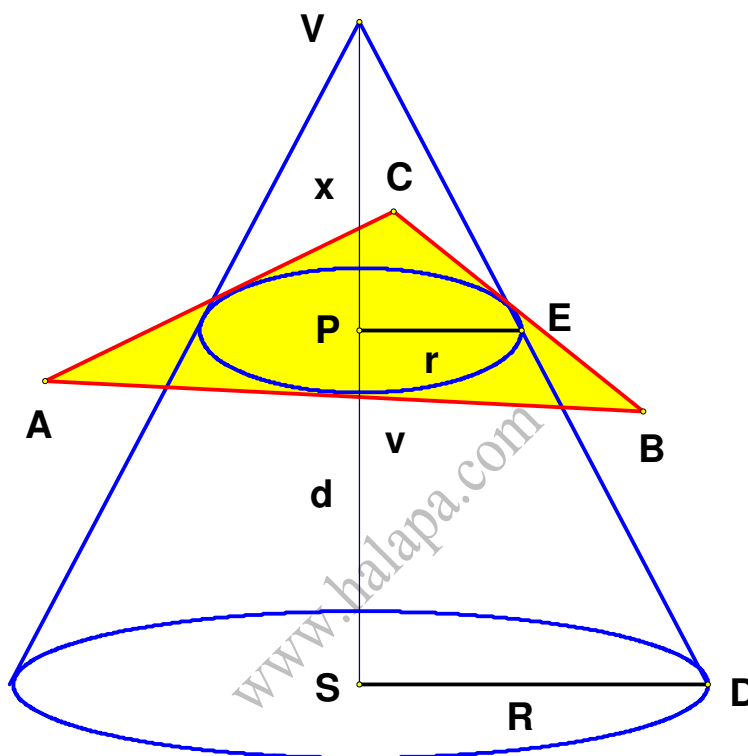
$$a : b = k \text{ i } c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c .

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$|VS| = v = 12, |VP| = x, |PS| = d, |SD| = R = 6, |PE| = r$$

Budući da je ravnina trokuta ABC usporedna s ravninom osnovke stošca, njezin presjek sa stošcem je kružnica polumjera r . Ona je **upisana** trokutu ABC pa joj polumjer r možemo izračunati na sljedeći način:

$$\left. \begin{aligned} P &= r \cdot s \\ P &= \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \Rightarrow$$

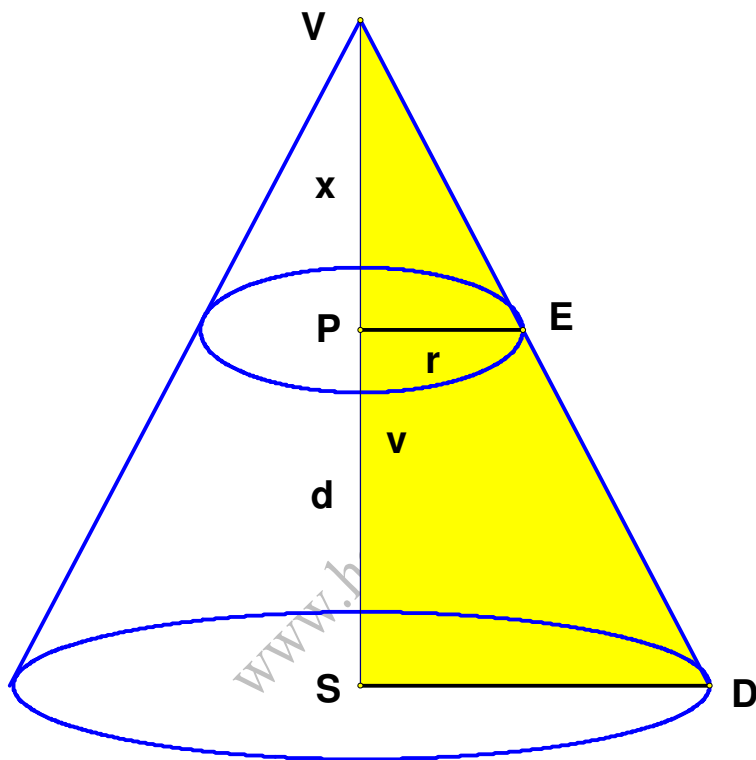
$$\Rightarrow r \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} / \frac{1}{s} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s}.$$

Najprije izračunamo poluopseg s trokuta ABC.

$$\left. \begin{aligned} a &= 5, b = 7, c = 8 \\ s &= \frac{a+b+c}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{5+7+8}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = \frac{20}{2} \Rightarrow s = 10 \text{ cm.}$$

Polumjer r kružnice je:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} s = 10, a = 5, b = 7, c = 8 \\ r = \frac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-7) \cdot (10-8)}}{10} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}}{10} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10 \cdot 10 \cdot 3}}{10} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{100 \cdot 3}}{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array} \right] \Rightarrow r = \frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{10} \Rightarrow r = \sqrt{3} \text{ cm.}
 \end{aligned}$$



Uočimo slične trokute ΔVSD i ΔVPE (imaju jednake kutove) i napišimo razmjer:

$$\begin{aligned}
 |VS| : |VP| &= |SD| : |PE| \Rightarrow v : x = R : r \Rightarrow 12 : x = 6 : \sqrt{3} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 6 \cdot x = 12 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot x = 12 \cdot \sqrt{3} / : 6 \Rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Ravnine trokuta ABC i osnovke stošca međusobno su udaljene:

$$d = |PS| \Rightarrow d = |VS| - |VP| \Rightarrow d = v - x \Rightarrow d = 12 - 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 2 \cdot (6 - \sqrt{3}) \text{ cm.}$$

Vježba 081

Poluprijer osnovke stošca dugačak je 0.6 dm, a visina stošca iznosi 1.2 dm. Stranice trokuta čija je ravnina paralelna s ravinom osnovke stošca, diraju plašt stošca. Na kojoj su udaljenosti ravnina trokuta i ravnina osnovke stošca ako su duljine stranica trokuta 5, 7 i 8 cm?

Rezultat: $d = 2 \cdot (6 - \sqrt{3}) \text{ cm.}$

Zadatak 082 (Matija, gimnazija)

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rješenje 082

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

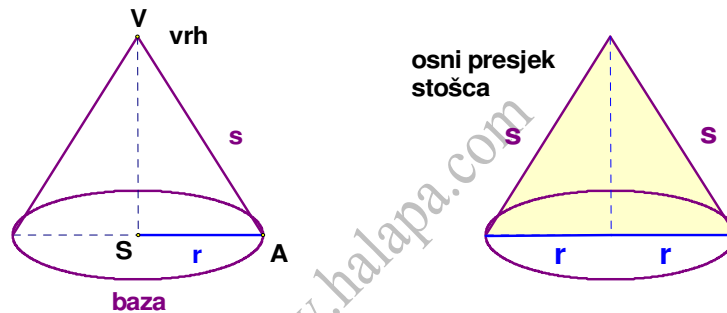
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

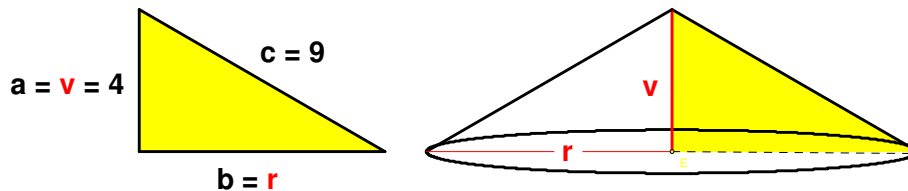
$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 = c^2 - b^2, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze. Pravac određen točkama V i S zove se os stošca. Dužinu \overline{AV} zovemo izvodnicom stošca i označavamo sa s. Ona povezuje vrh stošca s točkom na obodu baze.



Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Uočimo da je polumjer osnovke nastalog stošca jednak duljini druge katete zadanog trokuta. Prema Pitagorinu poučku dobije se:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow 81 = 16 + r^2 \Rightarrow 16 + r^2 = 81 \Rightarrow r^2 = 81 - 16 \Rightarrow r^2 = 65.$$

Nadalje, visina nastalog stošca jednaka je duljini katete oko koje je rotirao polazni pravokutni trokut, tj.

$$v = 4 \text{ cm.}$$

Traženi obujam stošca jednak je:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r^2 = 65 \text{ cm}^2 \\ v = 4 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 65 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 4 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{260}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

Vježba 082

Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 10 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm.

Rezultat: $V = 112 \cdot \pi \text{ cm}^3$.

Zadatak 083 (Ana, gimnazija)

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 24 cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

- A. $384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$ B. $192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$
C. $772 \cdot \pi \text{ cm}^3$ D. $1536 \cdot \pi \text{ cm}^3$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.

Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki.

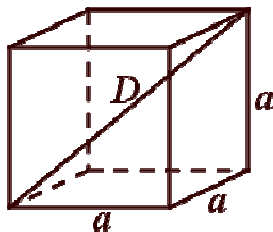
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

$$D = a \cdot \sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

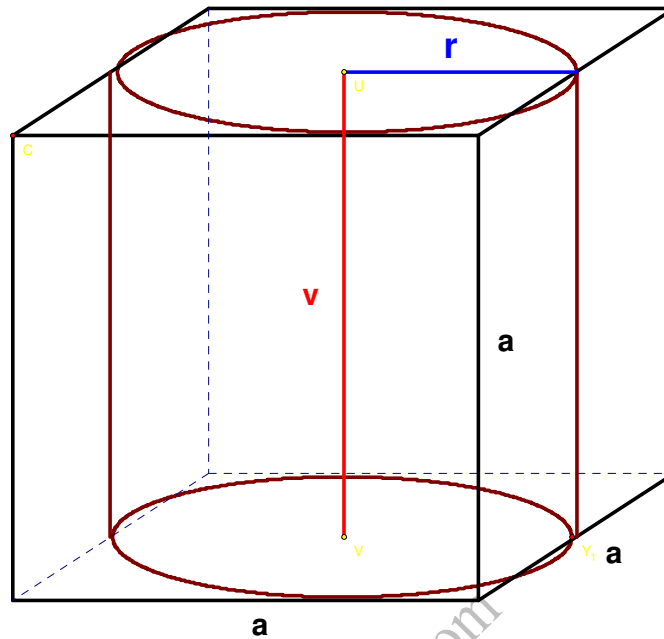


Budući da je zadana duljina prostorne dijagonale kocke, možemo izračunati duljinu brida.

$$\begin{aligned} D = a \cdot \sqrt{3} &\Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &\Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \Rightarrow a = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow [D = 24 \text{ cm}] \Rightarrow a = \frac{24 \text{ cm} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{24 \text{ cm} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma.



Sa slike vidi se:

$$v = a, \quad r = \frac{1}{2} \cdot a$$

Obujam valjka iznosi:

$$\begin{aligned} V &= r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow [a = 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}] \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{4} \cdot (8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 8^2 \cdot (\sqrt{3})^2 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= 16 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 083

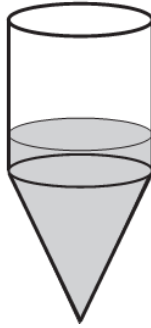
Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 2.4 dm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam toga valjka?

- A. $384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$ B. $192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$
 C. $772 \cdot \pi \text{ cm}^3$ D. $1536 \cdot \pi \text{ cm}^3$

Rezultat: A.

Zadatak 084 (Marija, gimnazija)

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 7 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenoga** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



- A. 3 cm B. 4 cm C. 6 cm D. 8 cm

Rješenje 084

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

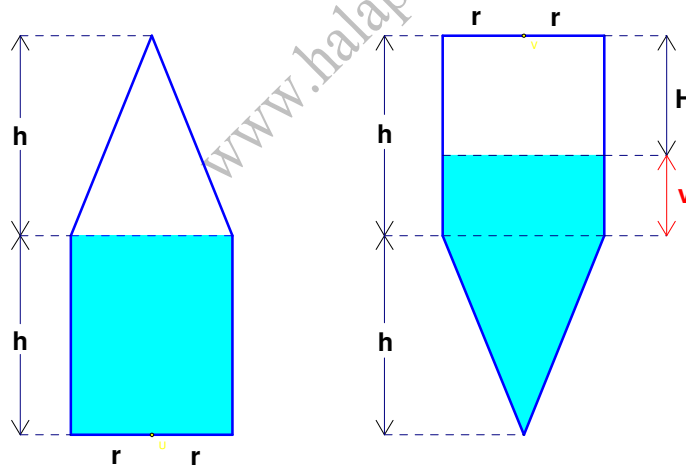
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom h iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Sa slika vidi se:

$$h = 12 \text{ cm}, \quad 2 \cdot r = 7 \text{ cm}, \quad H + v = h \Rightarrow H = h - v$$

Budući da pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode, volumen vode pune čaše jednak je zbroju volumena vode punog stošca i volumena vode dijela čaše visine v .

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h + r^2 \cdot \pi \cdot v \quad /: \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{3} \cdot h + v \Rightarrow h = \frac{1}{3} \cdot h + v \quad /: 3 \Rightarrow 3 \cdot h = h + 3 \cdot v \Rightarrow h + 3 \cdot v = 3 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot v = 3 \cdot h - h \Rightarrow 3 \cdot v = 2 \cdot h \Rightarrow 3 \cdot v = 2 \cdot h \quad /: 3 \Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot h \Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ cm} \Rightarrow v = 2 \cdot 4 \text{ cm} \Rightarrow v = 8 \text{ cm}.$$

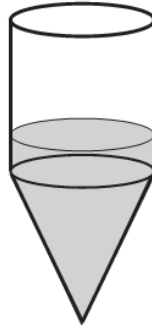
Visina neispunjenoga dijela čaše iznosi:

$$H = h - v \Rightarrow H = 12 \text{ cm} - 8 \text{ cm} \Rightarrow H = 4 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 084

Čaša u obliku valjka visine 12 cm i promjera 9 cm napunjena je do vrha vodom. Na čašu se postavi posuda u obliku stošca iste visine i promjera kao čaša pa ih se okrene kao na skici pri čemu dio vode iz čaše ispuni stožac. Kolika je visina **neispunjenog** dijela čaše? Napomena: Pri okretanju posuda nije iscurilo ništa vode.



- A. 3 cm B. 4 cm C. 6 cm D. 8 cm

Rezultat: B.

Zadatak 085 (Eugen, srednja škola)

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 10 cm zakrene se oko dulje stranice za 150° . Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rješenje 085

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Ploština kružnog isječka sa središnjim kutom α dana je formulom

$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

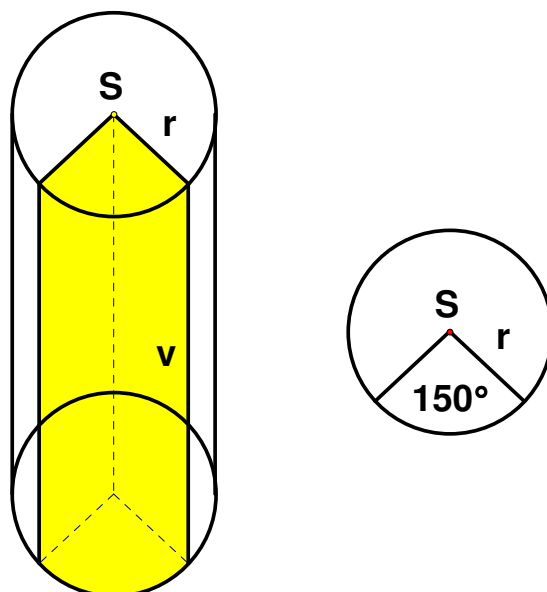
Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = B \cdot v.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Sa slike vidi se da je osnovka (baza) tijela kružni isječak površine

$$B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \Rightarrow [\alpha = 150^\circ] \Rightarrow B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 150^\circ}{360^\circ} \Rightarrow B = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 150^\circ}{360^\circ} \Rightarrow B = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12}$$

Obujam tijela iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12} \\ V = B \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \pi}{12} \cdot v \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 6 \text{ cm} \\ v = 10 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow V = \frac{5 \cdot (6 \text{ cm})^2 \cdot \pi}{12} \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{5 \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}}{12} \Rightarrow V = \frac{5 \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}}{12}$$

$$\Rightarrow V = 5 \cdot 3 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow V = 150 \cdot \pi \text{ cm}^3$$

Vježba 085

Pravokutnik sa stranicama 6 cm i 20 cm zakrene se oko dulje stranice za 150°. Koliki je obujam tijela nastalog ovom rotacijom?

Rezultat: $300 \cdot \pi \text{ cm}^3$

Zadatak 086 (Asterix, gimnazija)

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 3 m postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 1500 L. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm³)

Rješenje 086

Ponovimo!

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3, \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3, \quad 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Za 5 sati punjenja u spremniku oblika valjka volumen vode povećao se za:

$$V = 5 \cdot 1500 \text{ L} \Rightarrow V = 7500 \text{ L} \Rightarrow V = 7500 \text{ dm}^3 \Rightarrow V = 7.5 \text{ m}^3.$$

Razina vode u spremniku podigla se za:

$$\left. \begin{array}{l} V = r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h \\ V = 7.5 \text{ m}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h = 7.5 \text{ m}^3 \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h = 7.5 \text{ m}^3 / \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta h = \frac{7.5 \text{ m}^3}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow [r = 3 \text{ m}] \Rightarrow \Delta h = \frac{7.5 \text{ m}^3}{(3 \text{ m})^2 \cdot \pi} \Rightarrow \Delta h = 0.27 \text{ m} \Rightarrow \Delta h = 27 \text{ cm}.$$

Vježba 086

Spremnik oblika uspravnog valjka polumjera 300 cm postavljen je na bazu. U spremniku se svaki sat količina vode poveća za 15 hL. Koliko se podigla razina vode u spremniku za 5 sati punjenja? (Napomena: 1 L = 1 dm³)

Rezultat: 27 cm.