Zadatak 061 (Dora, gimnazija)

U valjkastoj posudi polumjera osnovke 12 cm i visine 72 cm nalazi se voda do pola visine. Za koliko će se podignuti razina vode u posudi ako u vodu uronimo kuglu polumjera 10 cm?

Rješenje 061

Ponovimo!

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot v \;\Rightarrow\; V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Obujam kugle

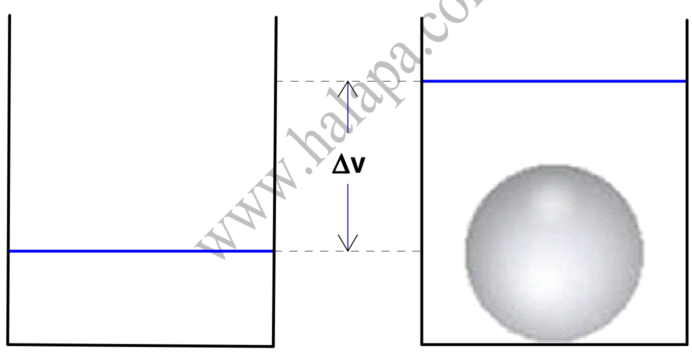
Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Kada kuglu uronimo u vodu, razina vode podigne se za Δv jer je povećanje obujma vode u valjkastoj posudi jednako obujmu uronjene kugle. Budući da je polumjer osnovke valjkaste posude r = 12 cm, a polumjer kugle r_1 = 10 cm, slijedi:

$$\Delta V = V \;\Rightarrow\; r^2 \cdot \pi \cdot \Delta v = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r^2 \cdot \pi \cdot \Delta v = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \;/ \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Delta v = \frac{4 \cdot r_1^3}{3 \cdot r^2} \;\Rightarrow\; \Delta v = \frac{4 \cdot (10\ cm)^3}{3 \cdot (12\ cm)^2} \;\Rightarrow\; \Delta v = 9.26\ cm.$$



Vježba 061

U valjkastoj posudi polumjera osnovke 120 mm i visine 7.2 dm nalazi se voda do pola visine. Za koliko će se podignuti razina vode u posudi ako u vodu uronimo kuglu polumjera 1 dm?

Rezultat: 9.26 cm.

Zadatak 062 (Ivan, gimnazija)

Jedna litra ulja je prolivena na površini mirnog mora. Zamislite da je sloj ulja debljine samo jedne molekule. Promjer molekule ulja iznosi $h = 2 \cdot 10^{-10}$ m. Koliki je promjer d nastale mrlje ulja?

Rješenje 062

$V = 1\ l = 1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$, $h = 2 \cdot 10^{-10}\ m$, $d = ?$

Ponovimo!

Obujam uspravnog valjka:

- ako je zadan polumjer r osnovke (baze) i visina h

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v$$

- ako je zadan promjer d osnovke (baze) i visina h

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot v.$$

1.inačica

Pretpostavimo da mrlja ulja ima oblik valjka. Tada je:

$$V=\frac{d^2\cdot\pi}{4}\cdot v \Rightarrow V=\frac{d^2\cdot\pi}{4}\cdot v \;/\cdot\frac{4}{\pi\cdot h} \Rightarrow d^2=\frac{4\cdot V}{\pi\cdot h} \Rightarrow d^2=\frac{4\cdot V}{\pi\cdot h}\;/\sqrt{\;} \Rightarrow d=\sqrt{\frac{4\cdot V}{\pi\cdot h}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-3}\ m^3}{\pi\cdot 2\cdot 10^{-10}\ m}}=2523.13\ m.$$

2.inačica

Pretpostavimo da mrlja ulja ima oblik valjka. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \;/\cdot\frac{1}{\pi\cdot v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ r^2=\frac{V}{\pi\cdot v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ r^2=\frac{V}{\pi\cdot v}\;/\sqrt{\;} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ r=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot v}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow d=2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot v}}=2\cdot\sqrt{\frac{10^{-3}\ m^3}{\pi\cdot 2\cdot 10^{-10}\ m}}=2523.13\ m.$$

Vježba 062

Jedna litra ulja je prolivena na površini mirnog mora. Zamislite da je sloj ulja debljine samo jedne molekule. Promjer molekule ulja iznosi h = $2\cdot 10^{-12}$ cm. Koliki je promjer d nastale mrlje ulja?

Rezultat: 2523.13 m.

Zadatak 063 (Mimi, Ivonchy, HTT)

Kugla promjera 4 cm pretopi se u manje kuglice promjera 1 cm. Koliko se dobije manjih kuglica?

Rješenje 063

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od središta S manja ili jednaka polumjeru r. Omeđena je sferom polumjera r. Sfera je skup točaka prostora čija je udaljenost od središta S jednaka r. Promjer je duljina dužine koja prolazi kroz središte kugle i čiji se krajevi nalaze na sferi.
Obujam kugle polumjera r iznosi:

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi.$$

1.inačica

Izračunamo obujam:

- velike kugle

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot r_1=4 \\ V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot r_1=4\;/:2 \\ V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1=2 \\ V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow V_1=\frac{4}{3}\cdot 2^3\cdot\pi \Rightarrow V_1=\frac{4}{3}\cdot 8\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{1}\cdot\pi \Rightarrow V_1=\frac{32}{3}\cdot\pi \Rightarrow V_1=\frac{32}{3}\cdot\pi\ cm^3.$$

- male kugle

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot r_2=1\\ V_2=\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot r_2=1\ /:2\\ V_2=\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}r_2=\frac{1}{2}\\ V_2=\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi\end{array}\right\}\Rightarrow V_2=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\pi\Rightarrow V_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\pi\Rightarrow V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\Rightarrow V_2=\frac{1}{6}\cdot\pi\Rightarrow V_2=\frac{1}{6}\cdot\pi\ cm^3.$$

Broj manjih kuglica n dobije se dijeljenjem obujma veće kugle V_1 obujmom manje kuglice V_2.

$$n=\frac{V_1}{V_2}\Rightarrow n=\frac{\frac{32}{3}\cdot\pi\ cm^3}{\frac{1}{6}\cdot\pi\ cm^3}\Rightarrow n=\frac{\frac{32}{3}\cdot\pi\ cm^3}{\frac{1}{6}\cdot\pi\ cm^3}\Rightarrow n=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{1}{6}}\Rightarrow n=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{1}{6}}\Rightarrow n=\frac{\frac{32}{1}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow n=64.$$

2.inačica

Neka su obujmovi:

- veće kugle $V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi$
- manje kugle $V_2=\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi.$

Broj manjih kuglica dobije se dijeljenjem većeg s manjim obujmom.

$$n=\frac{V_1}{V_2}\Rightarrow n=\frac{\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi}{\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi}\Rightarrow n=\frac{\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi}{\frac{4}{3}\cdot r_2^3\cdot\pi}\Rightarrow n=\frac{r_1^3}{r_2^3}\Rightarrow n=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{proširimo}\\ \text{razlomak s 2}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\left(\frac{2\cdot r_1}{2\cdot r_2}\right)^3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\cdot r_1=4\\ 2\cdot r_2=1\end{array}\right]\Rightarrow n=\left(\frac{4}{1}\right)^3\Rightarrow n=4^3\Rightarrow n=64.$$

Vježba 063

Kugla promjera 5 cm pretopi se u manje kuglice promjera 1 cm. Koliko se dobije manjih kuglica?

Rezultat: 125.

Zadatak 064 (Ademir, Branko, srednja škola)

Pravokutnik stranica a i b (a > b) rotira oko dulje i kraće stranice. Odredi razliku obujama tako dobivenih tijela.

Rješenje 064

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze (osnovke) r i visine h imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

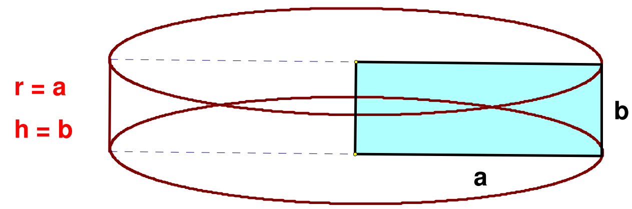
$$V=r^2\cdot\pi\cdot h.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

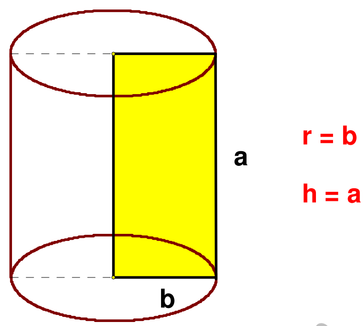
Kada pravokutnik stranica a i b rotiramo oko stranice b dobije se valjak polumjera r = a i visine h = b. Njegov obujam iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}r=a\ ,\ h=b\\ V=r^2\cdot\pi\cdot h\end{array}\right\}\Rightarrow V_1=a^2\cdot\pi\cdot b.$$



Kada pravokutnik stranica a i b rotiramo oko stranice a dobije se valjak polumjera r = b i visine h = a. Njegov obujam iznosi:

$$\left.\begin{matrix} r = b \;\;,\;\; h = a \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot h \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_2 = b^2 \cdot \pi \cdot a.$$



Razlika obujama je:

$$V_1 - V_2 = a^2 \cdot \pi \cdot b - b^2 \cdot \pi \cdot a \;\Rightarrow\; V_1 - V_2 = a \cdot \pi \cdot b \cdot (a - b).$$

Vježba 064

Pravokutnik stranica 17 cm i 13 cm rotira oko dulje i kraće stranice. Odredi razliku obujama tako dobivenih tijela.

Rezultat: $884 \cdot \pi$ cm^2.

Zadatak 065 (Katarina, gimnazija)

Opseg osnog presjeka uspravnog stošca je 48, a ploština plašta $128 \cdot \pi$. Koliko mu je oplošje?

Rješenje 065

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica. (nejednakost trokuta)

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.

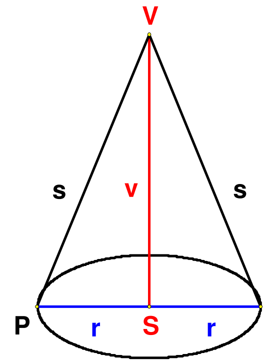
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.

Opseg trokuta kojemu su duljine stranica a, b i c iznosi

$$O = a + b + c.$$

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda su osni presjeci sukladni jednakokračni trokuti, s osnovicom duljine $2 \cdot r$ i krakovima duljine s. Opseg osnog presjeka dan je formulom

$$O=2\cdot r+2\cdot s \;\Rightarrow\; O=2\cdot(r+s).$$



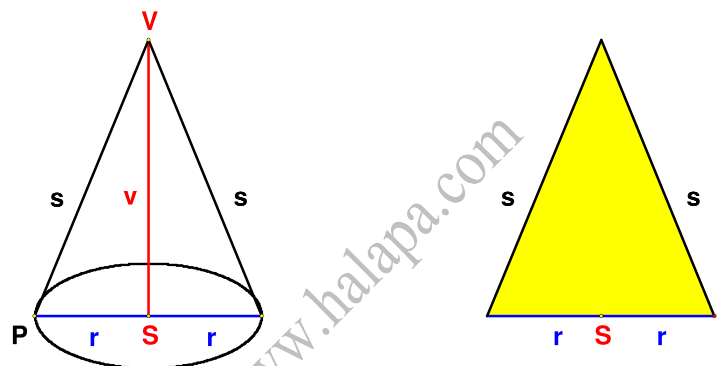
Ploština plašta uspravnog stošca jednaka je

$$P=r\cdot\pi\cdot s.$$

Oplošje uspravnog stošca

Oplošje uspravnog stošca s bazom polumjera r i izvodnicom s iznosi:

$$O=r\cdot\pi\cdot(r+s).$$



Iz uvjeta zadatka dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} O=2\cdot(r+s)\ ,\ O=48 \\ P=r\cdot\pi\cdot s\ ,\ P=128\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot(r+s)=48 \\ r\cdot\pi\cdot s=128\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot(r+s)=48\ /:2 \\ r\cdot\pi\cdot s=128\cdot\pi\ /:\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r+s=24 \\ r\cdot s=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=24-s \\ r\cdot s=128 \end{array}\right\} \Rightarrow (24-s)\cdot s=128 \Rightarrow 24\cdot s-s^2=128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24\cdot s-s^2-128=0 \Rightarrow -s^2+24\cdot s-128=0 \Rightarrow -s^2+24\cdot s-128=0\ /\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2-24\cdot s+128=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s^2-24\cdot s+128=0 \\ a=1\ ,\ b=-24\ ,\ c=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-24\ ,\ c=128 \\ s_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 1\cdot 128}}{2\cdot 1} \Rightarrow s_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{576-512}}{2} \Rightarrow s_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{1,2}=\frac{24\pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_1=\dfrac{24+8}{2} \\ s_2=\dfrac{24-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_1=\dfrac{32}{2} \\ s_2=\dfrac{16}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_1=16 \\ s_2=8 \end{array}\right\}.$$

Sada računamo polumjer.

- $\left.\begin{array}{l} r = 24 - s \\ s = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 24 - 16 \Rightarrow r = 8.$

Ako je r = 8, s = 16 osni presjek uspravnog stošca je jednakostraničan trokut pa je oplošje stošca jednako:

$$P = r \cdot \pi \cdot (r + s) \Rightarrow P = 8 \cdot \pi \cdot (8 + 16) \Rightarrow P = 8 \cdot \pi \cdot 24 \Rightarrow P = 192 \cdot \pi.$$

- $\left.\begin{array}{l} r = 24 - s \\ s = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 24 - 8 \Rightarrow r = 16.$

Ako je r = 16, s = 8 nije ispunjena nejednakost trokuta, trokut nije moguć. Mora biti

$$2 \cdot r < s + s,$$

a to ne vrijedi.

Vježba 065

Opseg osnog presjeka uspravnog stošca je 26, a ploština plašta 40 · π. Koliko mu je oplošje?

Rezultat: 65 · π.

Zadatak 066 (Fran, srednja škola)

Kolika je najmanja duljina vrlo tankog užeta kroz kojeg kad mu spojite krajeve možete provući kuglu obujma 0.1 m^3?

A. 6.28 *m* *B.* 1.81 *m* *C.* 1.41 *m* *D.* 3.14 *m*

Rješenje 066

Ponovimo!

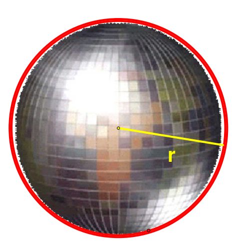
Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta) te ravnine. Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom.

Krug je skup svih točaka u ravnini čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kruga, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kruga. Opseg kružnice i kruga:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$



Iz obujma kugle odredimo njezin polumjer

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \; / \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \; / \sqrt[3]{} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}.$$

Budući da je uže omotano oko kugle polumjera r, duljina užeta jednaka je opsegu kruga polumjera r.

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \cdot \pi \Rightarrow O = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.1 \ m^3}{4 \cdot \pi}} \cdot \pi \Rightarrow O = 1.81 \ m.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 066

Kolika je najmanja duljina vrlo tankog užeta kroz kojeg kad mu spojite krajeve možete provući kuglu obujma 100 dm^3?

$A. \ 62.8 \ dm \qquad B. \ 18.1 \ dm \qquad C. \ 14.1 \ dm \qquad D. \ 31.4 \ dm$

Rezultat: B.

Zadatak 067 (Sanja, srednja škola)

Šuplju metalnu kuglu vanjskog polumjera 25 cm i debljine 3 cm treba pretopiti u punu kuglu. Polumjer pune kugle je:

$A. \ 21.123 \ cm \qquad B. \ 21.092 \ cm \qquad C. \ 17.073 \ cm \qquad D. \ 17.053 \ cm$

Rješenje 067

Ponovimo!

Kugla je skup svih točaka u prostoru čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kugle, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kugle.

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Obujam šuplje metalne kugle jednak je razlici obujma kugle polumjera r_1 = 25 cm i obujma kugle polumjera r_2 = 25 cm – 3 cm = 22 cm.

$$V_{šk} = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi - \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi \Rightarrow V_{šk} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 - r_2^3\right).$$

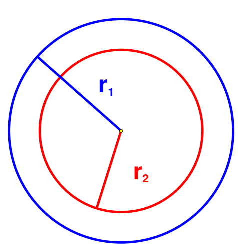
Budući da šuplju metalnu kuglu obujma $V_{šk}$ treba pretopiti u punu kuglu polumjera r, obujam $V_{šk}$ mora biti jednak volumenu pune kugle V_{pk} pa vrijedi:

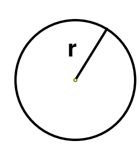
$$V_{šk} = V_{pk} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 - r_2^3\right) = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 - r_2^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 - r_2^3\right) \ / \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = r_1^3 - r_2^3 \Rightarrow r^3 = r_1^3 - r_2^3 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{r_1^3 - r_2^3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{(25 \ cm)^3 - (22 \ cm)^3} \Rightarrow r = 17.073 \ cm.$$

Odgovor je pod C.





Vježba 067

Šuplju metalnu kuglu vanjskog polumjera 2.5 dm i debljine 0.3 dm treba pretopiti u punu kuglu. Polumjer pune kugle je:

$A. \ 21.123 \ cm \qquad B. \ 21.092 \ cm \qquad C. \ 17.073 \ cm \qquad D. \ 17.053 \ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 068 (Vesna, srednja škola)

Polumjer jednakostraničnog stošca uvećan je za 30%. Koliko će se postotaka uvećati obujam stošca?

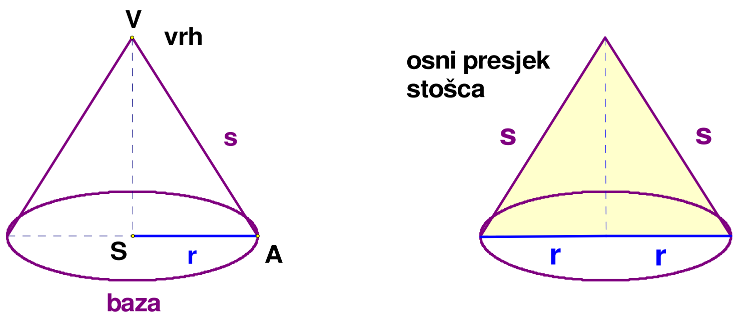
$A.\ 30\%$ $B.\ 131.5\%$ $C.\ 119.7\%$ $D.\ 170.6\%$

Rješenje 068

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze. Pravac određen točkama V i S zove se os stošca. Dužinu $\overline{AV}$ zovemo izvodnicom stošca i označavamo sa s. Ona povezuje vrh stošca s točkom na obodu baze.



Jednakostraničan stožac je stožac kojemu je svaka izvodnica jednaka promjeru baze.
Obujam jednakostraničnog stošca polumjera baze r računa se po formuli:

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100}\cdot x.$$

Ako se broj x poveća p%, pišemo:

$$x + \frac{p}{100}\cdot x = x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Neka je r polumjer baze jednakostraničnog stošca. Ako se polumjer uveća za 30% iznosit će:

$$R = r + \frac{30}{100}\cdot r = r + 0.3\cdot r = 1.3\cdot r.$$

Tada je:

- stari obujam

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}$$

- novi obujam

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot R^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}\cdot (1.3\cdot r)^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}\cdot 1.3^3 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = 1.3^3 \cdot \frac{1}{3}\cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V_2 = 1.3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}\right) \Rightarrow V_2 = 1.3^3 \cdot V_1.$$

Računamo koliko će se postotaka uvećati obujam stošca.

$$V_2 = 1.3^3 \cdot V_1 \Rightarrow V_2 = 2.197 \cdot V_1 \Rightarrow V_2 = V_1 + 1.197 \cdot V_1 \Rightarrow V_2 = V_1 + \frac{119.7}{100} \cdot V_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1 + 119.7\% \cdot V_1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 068

Polumjer jednakostraničnog stošca uvećan je za 50%. Koliko će se postotaka uvećati obujam stošca?

$A.\ 50\% \qquad B.\ 237.5\% \qquad C.\ 150\% \qquad D.\ 150.5\%$

Rezultat: B.

Zadatak 069 (Docx, strukovna škola)

Puna metalna kocka brida a pretopljena je u kuglu. Koliki je promjer kugle?

$A.\ 0.98 \cdot a \qquad B.\ 1.24 \cdot a \qquad C.\ 1.33 \cdot a \qquad D.\ 1.64 \cdot a$

Rješenje 069

Ponovimo!

Kugla je skup svih točaka u prostoru čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kugle, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kugle.

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je obujam:

$$V = a^3.$$

Budući da se puna metalna kocka pretopi u kuglu, njihovi obujmovi ostaju jednaki.

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi - obujam\ kugle \\ V_2 = a^3 - obujam\ kocke \end{array}\right\} \Rightarrow \left[V_1 = V_2\right] \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = a^3 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = a^3 \ \Big/ \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi} \ \Big/ \sqrt[3]{\ } \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi}} \Rightarrow r = a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi}}.$$

Promjer kugle iznosi:

$$2 \cdot r = 2 \cdot a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi}} \Rightarrow 2 \cdot r = 1.24 \cdot a.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 069

Puna metalna kocka brida a pretopljena je u kuglu. Koliki je polumjer kugle?

$A.\ 0.62 \cdot a \qquad B.\ 0.49 \cdot a \qquad C.\ 0.68 \cdot a \qquad D.\ 0.82 \cdot a$

Rezultat: A.

Zadatak 070 (TP, gimnazija)

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je 24 cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam valjka?

$A.\ 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3 \qquad B.\ 192 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3 \qquad C.\ 772 \cdot \pi\ cm^3 \qquad D.\ 1536 \cdot \pi\ cm^3$

Rješenje 070

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je duljina prostorne dijagonale:

$$D = a \cdot \sqrt{3}.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

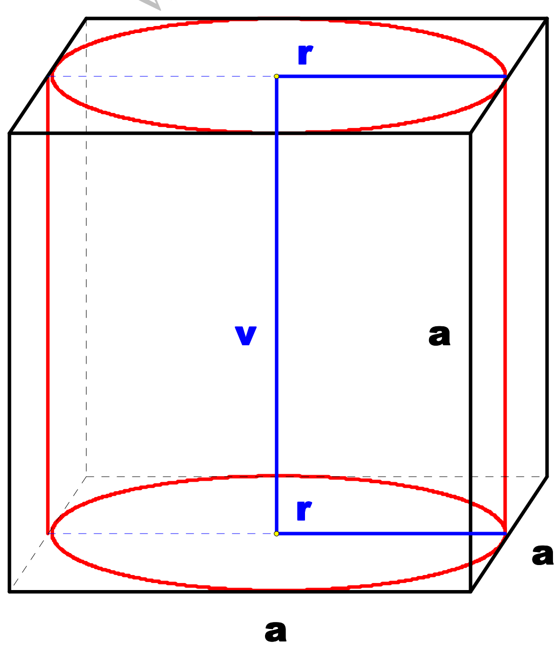
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Budući da je zadana duljina prostorne dijagonale kocke, duljina brida iznosi:

$$\left.\begin{matrix} D = a \cdot \sqrt{3} \\ D = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = 24 \Rightarrow a \cdot \sqrt{3} = 24 \; / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow a = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{24} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3} \; cm.$$



Sa slike vidi se:

$$r = \frac{1}{2} \cdot a \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = 4 \cdot \sqrt{3} \quad , \quad v = a \Rightarrow v = 8 \cdot \sqrt{3}$$

Računamo obujam valjka.

$$\left. \begin{array}{l} r = 4 \cdot \sqrt{3} \ , \ v = 8 \cdot \sqrt{3} \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow V = \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = 4^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 16 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 070

Duljina prostorne dijagonale drvene kocke je $8 \cdot \sqrt{3}$ cm. Iz kocke je izrezan valjak najvećega mogućega obujma. Koliki je obujam valjka?

$A.\ 64 \cdot \pi \ cm^3 \qquad B.\ 128 \cdot \pi \ cm^3 \qquad C.\ 32 \cdot \pi \ cm^3 \qquad D.\ 256 \cdot \pi \ cm^3$

Rezultat: B.

Zadatak 071 (4A, 4B, TUPŠ)

Koliko **litara** (L) vode stane u posudu oblika valjka čija je visina 15 cm, a **promjer** baze 9 cm? (Napomena: 1 litra = 1 dm^3)

$A.\ 0.424\ L \qquad B.\ 0.954\ L \qquad C.\ 4.241\ L \qquad D.\ 9.543\ L$

Rješenje 071

Ponovimo!

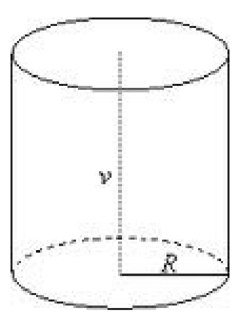
$$1\ l = 1\ dm^3 \quad , \quad 1\ dm = 10\ cm \quad , \quad 1\ cm = 0.1\ dm.$$

$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 \quad , \quad 1\ cm^3 = 0.001\ dm^3 \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Budući da je zadan promjer baze valjka d = 9 cm, polumjer iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} d = 9\ cm \\ r = \frac{1}{2} \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot 9\ cm = \frac{9}{2}\ cm.$$

Računamo obujam valjka.

$$\left.\begin{array}{l} r=\frac{9}{2}\ cm\ ,\ v=15\ cm \\ V=r^{2}\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V=\left(\frac{9}{2}\ cm\right)^{2}\cdot\pi\cdot 15\ cm \Rightarrow V=\frac{81}{4}\ cm^{2}\cdot\pi\cdot 15\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=954.26\ cm^{3} \Rightarrow \left[954.26:1000\right] \Rightarrow V=0.95426\ dm^{3} \Rightarrow V\approx 0.954\ dm^{3} \Rightarrow V=0.954\ L.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 071

Koliko **litara** (L) vode stane u posudu oblika valjka čija je visina 30 cm, a **promjer** baze 9 cm? (Napomena: 1 litra = 1 dm^3)

$A.\ 1.909\ L \qquad B.\ 1.954\ L \qquad C.\ 4.241\ L \qquad D.\ 9.543\ L$

Rezultat: A.

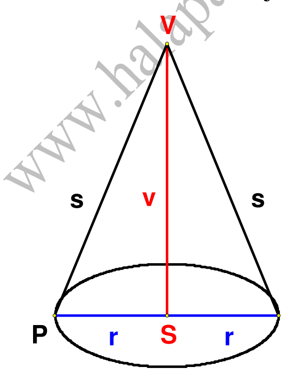
Zadatak 072 (WWW, tehnička škola)

Ploština plašta kružnog stošca jednaka je dvostrukoj ploštini osnovke stošca. Izračunaj prikloni kut izvodnice prema ravnini osnovke.

Rješenje 072

Ponovimo!

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda su osni presjeci sukladni jednakokračni trokuti, s osnovicom duljine 2 · r i krakovima duljine s.



Ploština plašta uspravnog stošca jednaka je

$$P=r\cdot\pi\cdot s.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º). Stranice koje su međusobno okomite zovu se katete, a najdulja stranica zove se hipotenuza.

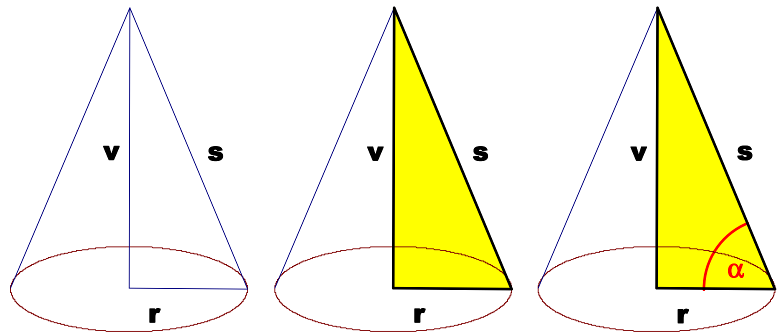
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer katete uz taj kut i hipotenuze.

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga). Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^{2}\cdot\pi.$$

Kako zapisati da je broj a n – puta veći od broja b?

$$a=n\cdot b \quad , \quad \frac{a}{b}=n \quad , \quad \frac{a}{n}=b.$$



Budući da je ploština plašta P_p kružnog stošca jednaka dvostrukoj ploštini osnovke P_o stošca (kruga polumjera r), vrijedi:

$$P_p = 2 \cdot P_0 \;\Rightarrow\; r \cdot \pi \cdot s = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r \cdot \pi \cdot s = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \;/ \cdot \frac{1}{r \cdot \pi} \;\Rightarrow\; s = 2 \cdot r \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \cdot r = s \;\Rightarrow\; 2 \cdot r = s \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \;\Rightarrow\; \frac{r}{s} = \frac{1}{2}.$$

Na slici uočimo pravokutan trokut čije su katete r i v, a hipotenuza s. Pomoću funkcije kosinus izračunamo kut α.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{r}{s} \\ \dfrac{r}{s} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 60^0.$$

Vježba 072

Ploština plašta kružnog stošca jednaka je trostrukoj ploštini osnovke stošca. Izračunaj prikloni kut izvodnice prema ravnini osnovke.

Rezultat: 70° 31' 44".

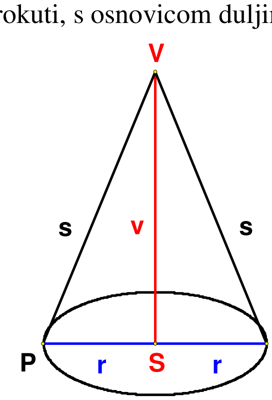
Zadatak 073 (Tihomir, strukovna škola)

Oplošje i obujam uspravnoga kružnog stošca izraženi su istim mjernim brojem. Odredite vezu između polumjera osnovke (r), visine (v) i izvodnice (s) stošca.

Rješenje 073

Ponovimo!

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda su osni presjeci sukladni jednakokračni trokuti, s osnovicom duljine 2 · r i krakovima duljine s.



Oplošje uspravnog stošca s bazom polumjera r i izvodnicom s iznosi:

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s).$$

Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3}.$$

Budući da su oplošje i obujam uspravnoga kružnog stošca izraženi istim mjernim brojem, slijedi:

$$O = V \Rightarrow r \cdot \pi \cdot (r + s) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \Rightarrow r \cdot \pi \cdot (r + s) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot v}{3} \; / \cdot \frac{3}{r \cdot \pi} \Rightarrow 3 \cdot (r + s) = r \cdot v.$$

Vježba 073

Oplošje i obujam uspravnoga kružnog stošca izraženi su istim mjernim brojem. Odredite vezu između polumjera osnovke (r), visine (v) i izvodnice (s) stošca.

Rezultat: $r \cdot (v - 3) = 3 \cdot s.$

Zadatak 074 (Oggy, tehnička škola)

Zbroj obujmova dviju kugli iznosi 324 · π, a polumjer jedne kugle je 6. Polumjer druge kugle je:

A. 2 *B.* 3 *C.* 4 *D.* 5

Rješenje 074

Ponovimo!

$$\sqrt[3]{a^3} = a.$$

Obujam kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Polumjer r_2 druge kugle je:

$$V_1 + V_2 = 324 \cdot \pi \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi = 324 \cdot \pi \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi = 324 \cdot \pi \; / \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1^3 + r_2^3 = 243 \Rightarrow \left[r_1 = 6 \right] \Rightarrow 6^3 + r_2^3 = 243 \Rightarrow 216 + r_2^3 = 243 \Rightarrow r_2^3 = 243 - 216 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^3 = 27 \Rightarrow r_2^3 = 27 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{27} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{3^3} \Rightarrow r_2 = 3.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 074

Zbroj obujmova dviju kugli iznosi 324 · π, a polumjer jedne kugle je 3. Polumjer druge kugle je:

A. 4 *B.* 5 *C.* 6 *D.* 7

Rezultat: C.

Zadatak 075 (Mario, tehnička škola)

Posuda oblika šupljeg valjka polumjera r i visine v, sa zanemarivom debljinom stijenki, napunjena je tekućinom do 80% svoje visine. Ako se u posudu urone tri metalne kugle polumjera r/2, posuda se napuni tekućinom do svog vrha. Nađi visinu v.

Rješenje 075

Ponovimo!

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot v \Rightarrow V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kada tri metalne kugle uronimo u vodu, razina vode podigne se do visine valjka.
Kada se valjak napuni tekućinom do svog vrha bit će:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Kada je valjak napunjen tekućinom do 80% svoje visine vrijedi:

$$V_1 = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{80}{100} \cdot v \Rightarrow V_1 = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{80}{100} \cdot v \Rightarrow V_1 = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{4}{5} \cdot v \Rightarrow V_1 = \frac{4}{5} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Tri uronjene metalne kugle imaju obujam

$$V_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 \cdot \pi \Rightarrow V_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{8} \cdot \pi \Rightarrow V_2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{8} \cdot \pi \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{4}{5} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v + \frac{1}{2} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{4}{5} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v + \frac{1}{2} \cdot r^3 \cdot \pi \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow v = \frac{4}{5} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{4}{5} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot r \ / \cdot 10 \Rightarrow 10 \cdot v = 8 \cdot v + 5 \cdot r \Rightarrow 10 \cdot v - 8 \cdot v = 5 \cdot r \Rightarrow 2 \cdot v = 5 \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v = 5 \cdot r \ / : 2 \Rightarrow v = \frac{5}{2} \cdot r.$$

Vježba 075

Posuda oblika šupljeg valjka polumjera 8 dm i visine v, sa zanemarivom debljinom stijenki, napunjena je tekućinom do 80% svoje visine. Ako se u posudu urone tri metalne kugle polumjera 4 dm, posuda se napuni tekućinom do svog vrha. Nađi visinu v.

Rezultat: 20 dm.

Zadatak 076 (Zlatko, tehnička škola)

Izvodnica uspravnog kružnog stošca ima duljinu l i zatvara s bazom stošca kut od 60º. Tada volumen stošca iznosi:

$$A.\ l^3\cdot\pi \qquad B.\ \frac{l^3\cdot\pi}{8\cdot\sqrt{3}} \qquad C.\ l^3\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \qquad D.\ l^3\cdot\sqrt{\pi}$$

Rješenje 076

Ponovimo!

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda su osni presjeci sukladni jednakokračni trokuti, s osnovicom duljine 2 · r i krakovima duljine s.
Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v.$$

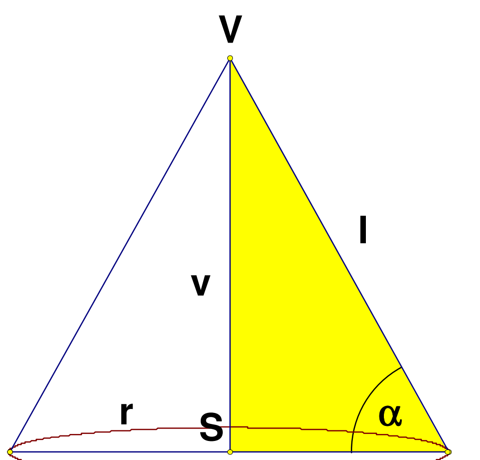
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

$$\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^0=\frac{1}{2} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|SA\right|=r \ , \ \left|SV\right|=v \ , \ \left|AV\right|=l \ , \ \angle SAV=\alpha=60^0$$

Uočimo pravokutan trokut AVS. Tada je:

- $\sin\alpha = \frac{|SV|}{|AV|} \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{v}{l} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{l} \Rightarrow \frac{v}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{v}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ / \cdot l \Rightarrow v = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\alpha = \frac{|SA|}{|AV|} \Rightarrow \cos 60^0 = \frac{r}{l} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{l} \Rightarrow \frac{r}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{l} = \frac{1}{2} \ / \cdot l \Rightarrow r = \frac{l}{2}.$

Volumen stošca iznosi:

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v \Rightarrow \begin{bmatrix} r = \frac{l}{2} \\ v = l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^2}{4}\cdot\pi\cdot l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^3}{8}\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\frac{l^3}{8}\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\frac{l^3}{8}\cdot\pi\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{l^3}{8}\cdot\frac{\pi}{1} \Rightarrow V = \frac{l^3\cdot\pi}{8\cdot\sqrt{3}}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 076

Izvodnica uspravnog kružnog stošca ima duljinu l i zatvara s bazom stošca kut od 30º. Tada volumen stošca iznosi:

$A.\ l^3\cdot\pi \qquad B.\ \frac{l^3\cdot\pi}{8} \qquad C.\ l^3\cdot\pi \qquad D.\ l^3\cdot\sqrt{\pi}$

Rezultat: B.

Zadatak 077 (Zlatko, tehnička škola)

Ako se polumjer baze i visina stošca smanje dva puta, volumen stošca smanji se:

$A.\ 2\ puta \qquad B.\ 4\ puta \qquad C.\ 6\ puta \qquad D.\ 8\ puta$

Rješenje 077

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda su osni presjeci sukladni jednakokračni trokuti, s osnovicom duljine 2 · r i krakovima duljine s. Obujam uspravnog stošca s bazom polumjera r i visinom v iznosi:

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka je

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v$$

volumen prvog stošca, a

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1$$

volumen stošca čiji su polumjer baze r_1 i visina v_1 smanjeni dva puta:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \frac{r}{2} \\ v_1 = \frac{v}{2} \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Tada je:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2}{8} \cdot \pi \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v\right) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Računamo kvocijent V_1 i V.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1}{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot v_1}{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{r_1^2 \cdot v_1}{r^2 \cdot v} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 = \frac{r}{2} \\ v_1 = \frac{v}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{v}{2}}{r^2 \cdot v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{r^2}{4} \cdot \frac{v}{2}}{r^2 \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{r^2 \cdot v}{8}}{\frac{r^2 \cdot v}{1}} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{r^2 \cdot v}{8}}{\frac{r^2 \cdot v}{1}} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \; / \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 077

Ako se polumjer baze i visina stošca povećaju dva puta, volumen stošca poveća se:

$A.\ 2\ puta \qquad B.\ 4\ puta \qquad C.\ 6\ puta \qquad D.\ 8\ puta$

Rezultat: D.

Zadatak 078 (4A, TUPŠ)

Puna metalna kocka brida a pretopljena je u kuglu. Koliki je promjer te kugle?

$A.\ 0.98 \cdot a \qquad B.\ 1.24 \cdot a \qquad C.\ 1.33 \cdot a \qquad D.\ 1.64 \cdot a$

Rješenje 078

Ponovimo!

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad , \quad \sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a \cdot \sqrt[3]{b}.$$

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Promjer kugle polumjera r je:

$$d = 2 \cdot r.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je obujam:

$$V = a^3.$$

Budući da je kocka duljine brida a pretopljena u kuglu polumjera duljine r, vrijedi:

$$V_{kugla} = V_{kocka} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = a^3 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = a^3 \; / \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi} \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot a^3}{4 \cdot \pi}} \Rightarrow r = a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi}} \Rightarrow r = 0.62 \cdot a.$$

Promjer kugle je:

$$\left.\begin{array}{l} r = 0.62 \cdot a \\ d = 2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow d = 2 \cdot 0.62 \cdot a = 1.24 \cdot a.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 078

Puna metalna kocka brida 1 pretopljena je u kuglu. Koliki je promjer te kugle?

A. 0.98 *B.* 1.24 *C.* 1.33 *D.* 1.64

Rezultat: B.

Zadatak 079 (Martina, gimnazija)

Visina uspravnog valjka jednaka je 16 cm, a polumjer osnovke 10 cm. Dužini duljine 20 cm jedan je kraj na rubu donje, a drugi na rubu gornje osnovke. Kolika je najkraća udaljenost te dužine od osi valjka?

Rješenje 079

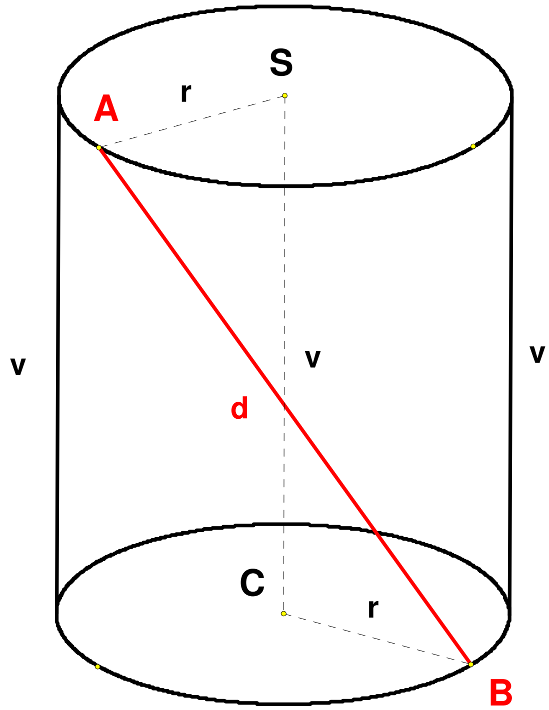
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º). Stranice koje su međusobno okomite zovu se katete, a najdulja stranica zove se hipotenuza.

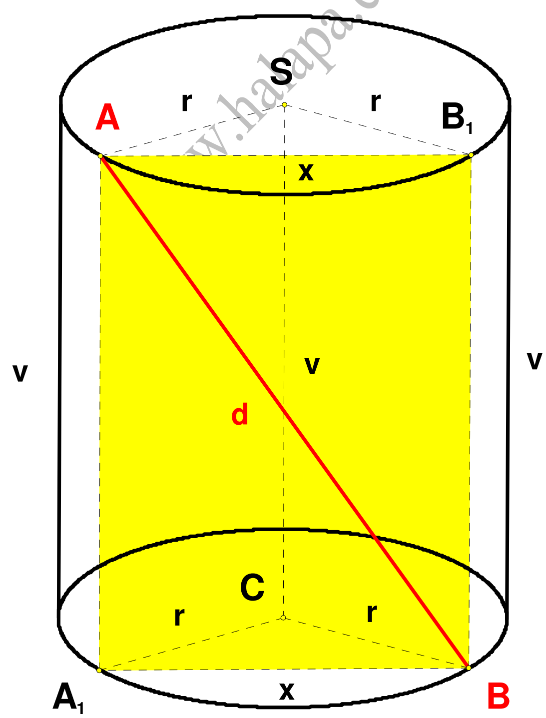
Pitagorin poučak:

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

Valjak je oblo geometrijsko tijelo, omeđeno dvama sukladnim krugovima koji leže u usporednim ravninama i dijelom zakrivljene plohe. Krugove nazivamo baze valjka, a zakrivljenu plohu nazivamo plašt valjka. Visina valjka je međusobna udaljenost baza. Kod uspravnog valjka visina je spojnica središta baza. Valjak je rotaciono tijelo što znači da nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne svoje stranice.



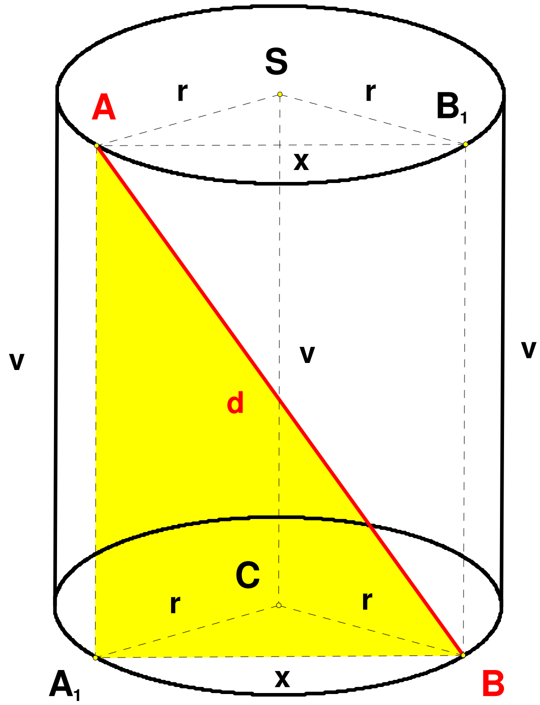
Dužinom $\overline{AB}$ položit ćemo ravninu usporednu (paralelnu) osi SC valjka. Ta ravnina siječe valjak u pravokutniku A_1BB_1A.



Sa slike vidi se:

$$|SA| = |SB_1| = |CA_1| = |CB| = r = 10 \;\; , \;\; |AA_1| = |SC| = |BB_1| = v = 16$$

$$|AB| = d = 20 \;\; , \;\; |AB_1| = |A_1B| = x$$

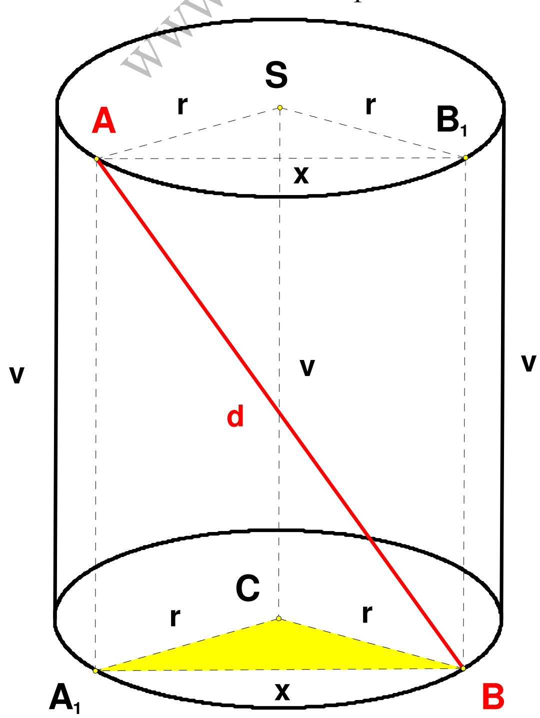


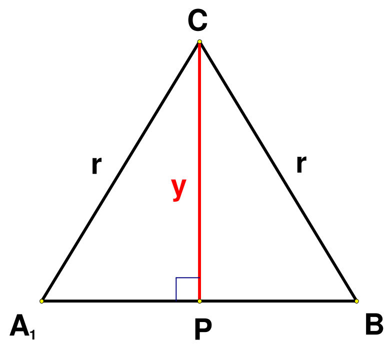
Iz pravokutnog trokuta AA_1B (ili BB_1A) pomoću Pitagorina poučka dobije se:

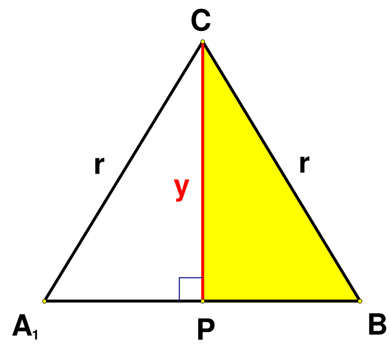
$$\left|A_1B\right|^2=\left|AB\right|^2-\left|AA_1\right|^2 \Rightarrow x^2=d^2-v^2 \Rightarrow x^2=20^2-16^2 \Rightarrow x^2=400-256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x^2=144 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x=\sqrt{144} \Rightarrow x=12\ cm.$$

Udaljenost koju tražimo je udaljenost točke C od dužine $\overline{A_1B}$ (ili udaljenost točke S od dužine $\overline{AB_1}$).







Promotrimo jednakokračan trokut A_1BC. Visina CP dijeli ga na dva sukladna pravokutna trokuta ΔA_1PC i ΔPBC. Sa slika vidi se:

$$|CA_1| = |CB| = r = 10 \ , \ |A_1B| = 12 \ , \ |A_1P| = |PB| = \frac{1}{2} \cdot |A_1B| = 6 \ , \ |CP| = y$$

Uočimo, na primjer, pravokutan trokut PBC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo y.

$$|CP|^2 = |CB|^2 - |PB|^2 \Rightarrow y^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 64 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow y = \sqrt{64} \Rightarrow y = 8 \ cm.$$

Tražena udaljenost jednaka je duljini visine y, tj. jednaka je 8 cm.

Vježba 079

Visina uspravnog valjka jednaka je 6 cm, a polumjer osnovke 5 cm. Dužini duljine 10 cm jedan je kraj na rubu donje, a drugi na rubu gornje osnovke. Kolika je najkraća udaljenost te dužine od osi valjka?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 080 (Martina, gimnazija)

Čašu oblika valjka s promjerom osnovke 6 cm, punu vode, stavimo na kosinu s kutom 30°. Kolika je količina vode što pritom isteče iz čaše?

Rješenje 080

Ponovimo!

$$tg\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Valjak je oblo geometrijsko tijelo, omeđeno dvama sukladnim krugovima koji leže u usporednim ravninama i dijelom zakrivljene plohe. Krugove nazivamo baze valjka, a zakrivljenu plohu nazivamo plašt valjka. Visina valjka je međusobna udaljenost baza. Kod uspravnog valjka visina je spojnica središta baza. Valjak je rotaciono tijelo što znači da nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne svoje stranice.

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

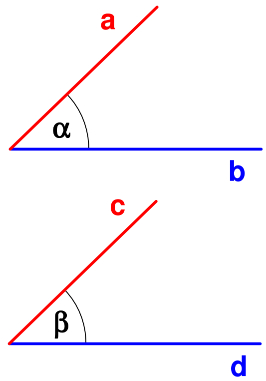
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

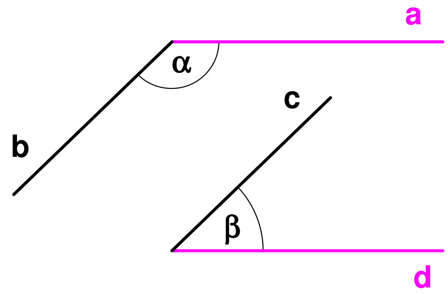
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º). Stranice koje su međusobno okomite zovu se katete, a najdulja stranica zove se hipotenuza.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Kutovi s paralelnim kracima

Kutovi s paralelnim kracima su sukladni ili su suplementni (zbroj kutova je 180º).



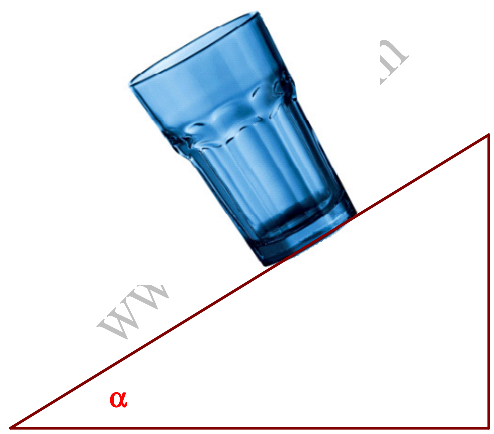


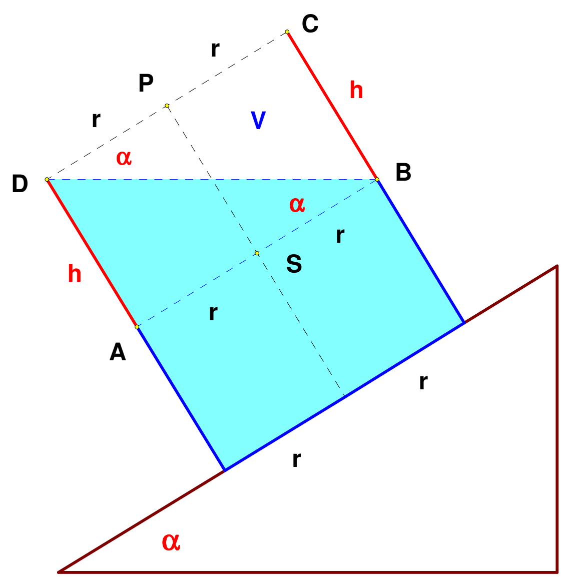
$a \,||\, c$, $b \,||\, d$, $\alpha = \beta$ $\qquad$ $a \,||\, d$, $b \,||\, c$, $\alpha + \beta = 180^0$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kosina je ravnina nagnuta pod oštrim kutom prema horizontalnoj ravnini i omogućuje podizanje ili spuštanje tereta.

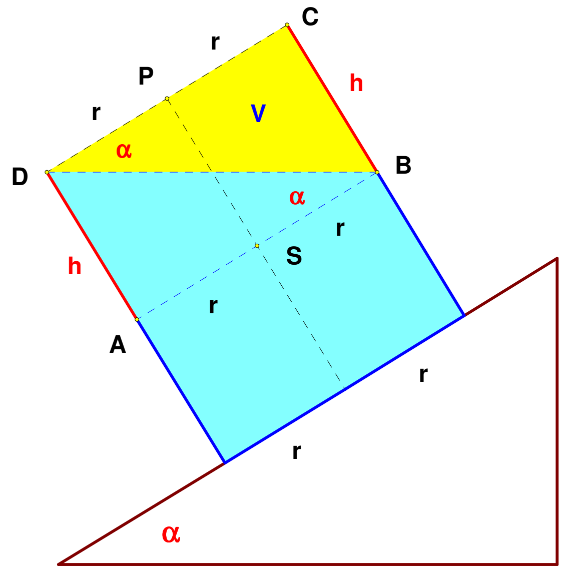




Sa slike vidi se:

$$|AB| = |DC| = 2 \cdot r = 6\ cm\ ,\ |AD| = |BC| = |SP| = h$$

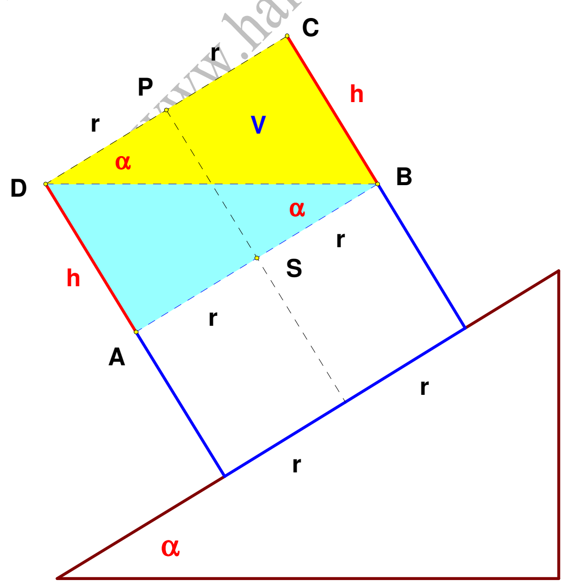
$$|AS| = |SB| = |DP| = |PC| = r = 3\ cm\ ,\ \angle CDB = \angle DBA = \alpha = 30^\circ$$



Uočimo pravokutan trokut DBC (ili ABD) i pomoću funkcije tangens izračunamo duljinu h.

$$tg\,\alpha = \frac{|BC|}{|DC|} \Rightarrow tg\,30^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ /\cdot 6 \Rightarrow h = 2 \cdot \sqrt{3}\ cm.$$

Kada punu čašu stavimo na kosinu količina vode što pritom isteče jednaka je polovici volumena valjka čiji je polumjer osnovke r, a visina h.



$$\left.\begin{array}{l} r = 3\ cm \\ h = 2 \cdot \sqrt{3}\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \left[V = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \right] \Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot (3\ cm)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot 9\ cm^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\ cm \Rightarrow V = \frac{1}{2} \cdot 9\ cm^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\ cm \Rightarrow V = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\ cm^3.$$

Vježba 080

Čašu oblika valjka s promjerom osnovke 0.6 dm i visinom 1 dm, punu vode, stavimo na kosinu s kutom 30°. Kolika je količina vode što pritom isteče iz čaše?

Rezultat: $9 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \ cm^3$.