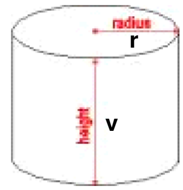
Zadatak 001 (Anita, ekonomska škola)

Ako je oplošje valjka 16π cm^2, a polumjer osnovke jednak visini, izračunaj obujam valjka.

Rješenje 001

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine v računa se formulom:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v).$$



Budući da je polumjer jednak visini, bit će $r = v$.

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 2r = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Oplošje valjka je zadano pa je

$$4 \cdot r^2 \cdot \pi = 16 \cdot \pi \quad / : 4\pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad / \sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

pa je

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot r = r^3 \cdot \pi = 2^3 \cdot \pi = 8\pi \text{ cm}^3.$$

Vježba 001

Ako je oplošje valjka 8π cm^2, a polumjer osnovke jednak visini, izračunaj obujam valjka.

Rezultat: $2\pi\sqrt{2}$ cm^3.

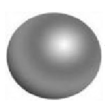
Zadatak 002 (Ana, gimnazija)

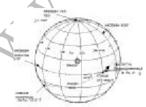
Za koliko postotaka treba uvećati polumjer kugle da se njezino oplošje uveća za 50%?

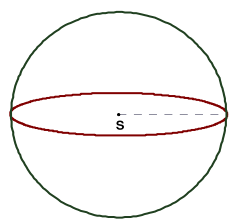
Rješenje 002

Oplošje kugle je:

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$







Oplošje kugle uvećano za 50% je:

$$O_1 = O + 0.50 \cdot O = 1.5 \cdot O \text{ ili } O_1 = 4 \cdot R^2 \cdot \pi.$$

Omjer oplošja je:

$$\frac{O_1}{O} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot \pi}{4 \cdot r^2 \cdot \pi} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2}{r^2} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = \sqrt{1.5}.$$

Sada je:

$$R = 1.2247 \cdot r = r + 0.2247 \cdot r = r + 22.47\% \cdot r.$$

Polumjer treba uvećati za 22.47%.

Vježba 002

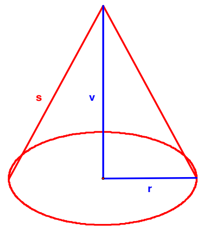
Za koliko postotaka treba uvećati polumjer kugle da se njezino oplošje uveća za 100%?

Rezultat: 41.42%.

Zadatak 003 (Ines, gimnazija)

Površina baze, plašt i oplošje uspravnog stošca čine aritmetički niz. Koliki je omjer duljine izvodnice i polumjera baze stošca?

Rješenje 003



površina baze... $B = r^2 \pi$

površina plašta... $P = r \pi s$

oplošje... $O = r \pi (r + s)$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog), aritmetička je sredina dva susjedna člana:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Budući da površina baze B, plašt P i oplošje O uspravnog stošca čine aritmetički niz slijedi

$$P = \frac{B+O}{2} \Rightarrow P = \frac{B+O}{2} \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot P = B + O \Rightarrow 2 \cdot r\pi s = r^2\pi + r\pi\left(r+s\right) \; / : r\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2s = r + r + s \Rightarrow 2s - s = 2r \Rightarrow s = 2r \Rightarrow s : r = 2 : 1.$$

Vježba 003

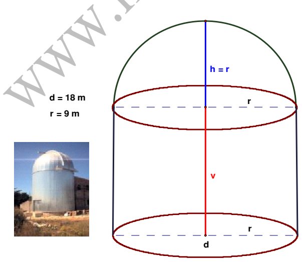
Površina baze i plašt uspravnog stošca su jednaki. U kojoj su svezi duljina izvodnice i polumjer baze stošca?

Rezultat: s = r.

Zadatak 004 (Ines, gimnazija)

Donji dio zvjezdarnice ima oblik valjka promjera 18 m, a gornji dio je kupola polukugle istog promjera. Kolika je ukupna visina zvjezdarnice ako oba dijela imaju jednak obujam?

Rješenje 004



Označimo slovima:

V_1 – obujam valjka (donji dio zvjezdarnice)
V_2 – obujam polukugle (kupola zvjezdarnice)

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \; / : r^2\pi \Rightarrow v = \frac{4}{6} \cdot r = \frac{2}{3} \cdot 9 \; m = 6 \; m.$$

Ukupna visina zvjezdarnice je:

$$v + h = v + r = 6 \text{ m} + 9 \text{ m} = 15 \text{ m}.$$

Vježba 004

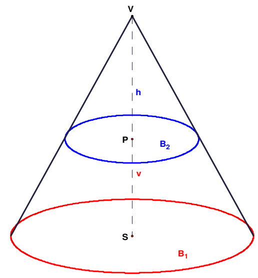
Donji dio zvjezdarnice ima oblik valjka promjera 42 m, a gornji dio je kupola polukugle istog promjera. Kolika je ukupna visina zvjezdarnice ako oba dijela imaju jednak obujam?

Rezultat: 35 m.

Zadatak 004 (Sanja, gimnazija)

Visina stošca podijeljena je na tri jednaka dijela pa su djelišnim točkama položene ravnine paralelne s osnovicom stošca. U kojem su omjeru površine presjeka?

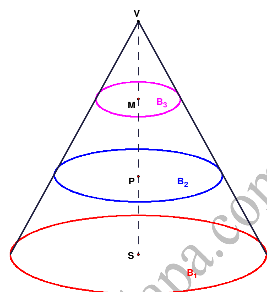
Rješenje 004



Presijecanjem stošca ravninom paralelnom s ravninom baze dobivamo manji stožac sličan početnom i dio koji nazivamo krnji stožac. Označimo $|SV| = v$ visinu većeg (početnog stošca), a $|PV| = h$ visinu manjeg stošca. Baze B_1 i B_2 slični su likovi za koje vrijedi:

$$B_1 : B_2 = v^2 : h^2.$$

Budući da je u zadatku visina stošca podijeljena na tri jednaka dijela, bit će:



$$|SV| = v \quad , \quad |PV| = \frac{2}{3} v \quad , \quad |MV| = \frac{1}{3} v.$$

Baze B_1, B_2 i B_3 slični su likovi za koje vrijedi:

$$B_1 : B_2 : B_3 = |SV|^2 : |PV|^2 : |MV|^2 \Rightarrow B_1 : B_2 : B_3 = v^2 : \left(\frac{2}{3} v\right)^2 : \left(\frac{1}{3} v\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 : B_2 : B_3 = v^2 : \frac{4}{9} v^2 : \frac{1}{9} v^2 \quad / \cdot 9 \Rightarrow B_1 : B_2 : B_3 = 9v^2 : 4v^2 : v^2 \quad / : v^2 \Rightarrow B_1 : B_2 : B_3 = 9 : 4 : 1.$$

Vježba 004

Visina stošca podijeljena je na dva jednaka dijela pa je djelišnom točkom položena ravnina paralelna s osnovicom stošca. U kojem su omjeru površine presjeka?

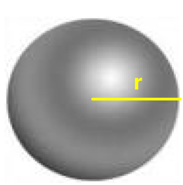
Rezultat: $B_1 : B_2 = 4 : 1.$

Zadatak 005 (Ines, gimnazija)

Veliku metalnu kuglu promjera 2 metra pretalimo u 125 međusobno jednakih malih kugli. Koliko puta je ukupna površina svih malih kugli veća od površine polazne velike kugle?

Rješenje 005

Ponovimo formule za oplošje i obujam (volumen) kugle polumjera r:



$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \quad , \quad V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Ako je promjer velike kugle d = 2 m, tada je njezin polumjer $R = \frac{d}{2} = 1$ m. Budući da se velika kugla pretalila u 125 međusobno jednakih malih kugli polumjera r, za njihove volumene vrijedi:

$$125 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \; / : \frac{4}{3}\pi \Rightarrow 125 \cdot r^3 = R^3 \Rightarrow r^3 = \frac{R^3}{125} \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow r = \frac{R}{5} = \frac{1}{5} \; m.$$

Označimo oplošje (površinu) male kugle slovom O_m, a oplošje (površinu) velike kugle slovom O. Ukupna površina svih malih kugli odnosi se prema površini velike kugle kao:

$$\frac{O_m}{O} = \frac{125 \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi}{4 \cdot R^2 \cdot \pi} = \frac{125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{1^2} = 125 \cdot \frac{1}{25} = 5.$$

Vježba 005

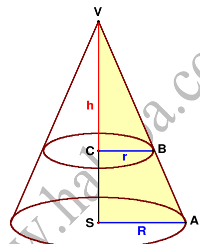
Veliku metalnu kuglu promjera 2 metra pretalimo u 8 međusobno jednakih malih kugli. Koliko puta je ukupna površina svih malih kugli veća od površine polazne velike kugle?

Rezultat: 2.

Zadatak 006 (Ines, gimnazija)

Stožac visine 2 m presiječemo ravninom paralelno s bazom na dva dijela (stožac i krnji stožac) jednakih volumena. Kolika je visina odsječenog stošca?

Rješenje 006



Visina velikog stošca je $|VS| = 2$, a malog stošca je $|VC| = h$. Budući da je veliki stožac presječen ravninom paralelnom s bazom na dva dijela jednakih volumena, onda je volumen manjeg stošca jednak polovini volumena velikog stošca:

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot 2 \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = R^2 \cdot \pi \; / : \pi \Rightarrow r^2 \cdot h = R^2.$$

Na slici uočimo pravokutne trokute VSA i VCB. Oni su slični pa vrijedi razmjer:

$$|SA| : |VS| = |CB| : |VC| \Rightarrow R : 2 = r : h \Rightarrow R \cdot h = 2 \cdot r \Rightarrow r = \frac{R \cdot h}{2}.$$

Dobili smo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 \cdot h = R^2 \\ r = \frac{R \cdot h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{R \cdot h}{2}\right)^2 \cdot h = R^2 \Rightarrow \frac{R^2 \cdot h^2}{4} \cdot h = R^2 \; / \cdot \frac{4}{R^2} \Rightarrow h^3 = 4 \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow h = \sqrt[3]{4}.$$

Vježba 006

Stožac visine 8 m presiječemo ravninom paralelno s bazom na dva dijela (stožac i krnji stožac) jednakih volumena. Kolika je visina odsječenog stošca?

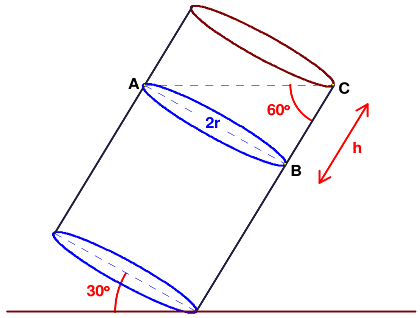
Rezultat: 4 m.

Zadatak 007 (Anastazija, gimnazija)

Čašu u obliku valjka s promjerom osnovice 6 cm i visinom 10 cm punu vode stavimo na kosinu s kutom 30°. Kolika će količina vode pri tome iscuriti iz čaše? (Dno čaše stoji na kosoj podlozi!).

Rješenje 007

Količina vode koja je iscurila iz čaše odgovara polovini volumena valjka visine h i polumjera baze r.



Visinu h odredimo iz pravokutnog trokuta ABC:

$$tg\,60^0=\frac{2r}{h}\ \Rightarrow\ h=\frac{2r}{tg\,60^0}.$$

Iz čaše iscuri:

$$V=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi\cdot\frac{2r}{tg\,60^0}=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\pi\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}=9\cdot\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=9\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\ cm^3\approx 48.97\ cm^3.$$

Vježba 007

Čašu u obliku valjka s promjerom osnovice 2 cm i visinom 10 cm punu vode stavimo na kosinu s kutom 45°. Kolika će količina vode pri tome iscuriti iz čaše? (Dno čaše stoji na kosoj podlozi!).

Rezultat: π cm^3.

Zadatak 008 (Anastazija, gimnazija)

Kolika je najmanja duljina vrlo tankog užeta kroz kojeg, kad mu spojite krajeve, možete provući kuglu obujma (volumena) 0.1 m^3?

Rješenje 008

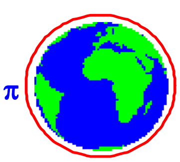
Iz formule za obujam (volumen) kugle nađemo njezin polumjer:

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi\ \Rightarrow\ r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}}.$$

Vrlo tanko uže kroz koje, kad mu spojimo krajeve, možemo provući kuglu čini kružnicu oko kugle. Opseg kružnice bit će duljina užeta:

$$l=O=2\cdot r\cdot\pi=2\cdot\sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}}\cdot\pi=2\cdot\sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}\cdot\pi^3}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{3\cdot V\cdot\pi^2}{4}}\approx 1.81\ m.$$

$$V=\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi$$



$$O=2\cdot R\cdot\pi$$

Vježba 008

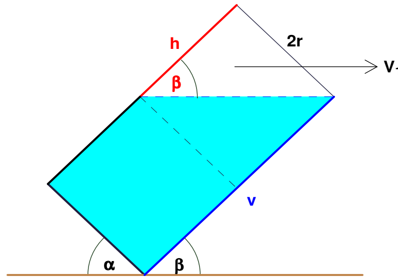
Kolika je najmanja duljina vrlo tankog užeta kroz kojeg, kad mu spojite krajeve, možete provući kuglu obujma (volumena) 4 m^3?

Rezultat: 6.19 m.

Zadatak 009 (Anastazija, gimnazija)

Valjkasta posuda polumjera r = 5 cm i visine v = 10 cm napunjena je vodom. Za koliko treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode?

Rješenje 009



Iz valjkaste posude iscuri četvrtina vode:

$$V_1 = \frac{1}{4} \cdot V = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot \pi \cdot 10 = \frac{125\pi}{2}\ cm^3.$$

Uočimo gornju polovicu valjkaste posude:

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot V_1 \;\Rightarrow\; 25 \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot \frac{125\pi}{2} \quad / : 25\pi \;\Rightarrow\; h = 5\ cm.$$

Odredimo kut β:

$$tg\,\beta = \frac{2r}{h} = \frac{10}{5} = 2 \;\Rightarrow\; \beta = 63^0 25'6" \;\Rightarrow\; \alpha = 90^0 - \beta = 89^0 59'60" - 63^0 25'6" = 26^0 33'54".$$

Vježba 009

Valjkasta posuda polumjera r = 5 cm i visine v = 10 cm napunjena je vodom. Za koliko treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode?

Rezultat: 45º.

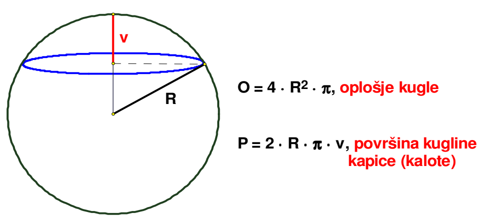
Zadatak 010 (Petra, gimnazija)

Ako Zemlja ima oblik kugle polumjera R, koliko se treba udaljiti od Zemlje da bi se vidjela četvrtina njezine površine?

Rješenje 010

1. inačica

Ponovimo formule za oplošje kugle i površinu kugline kapice (kalote):

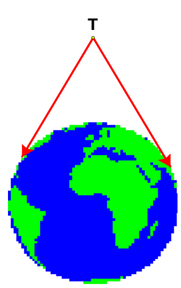


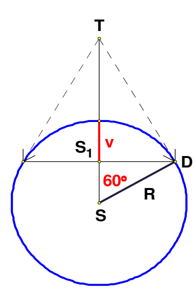
Iz formule za površinu kugline kapice (kalote)

P = 2 · R· π · v

lako se dobije visina v:

$$2 \cdot R \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot R^2 \cdot \pi \quad / : 2R\pi \;\Rightarrow\; v = \frac{R}{2}.$$





Sada je:

$$\left|SS_1\right| = R - v = \frac{R}{2}.$$

U pravokutnom trokutu SDS_1 duljina katete $|SS_1|$ jednaka je polovici duljine hipotenuze $|SD|$ pa slijedi:

$$\sphericalangle DSS_1 = 60^0.$$

Iz pravokutnog trokuta SDT dobije se:

$$\cos 60^0 = \frac{R}{|ST|} \Rightarrow |ST| = \frac{R}{\cos 60^0} = \frac{R}{\frac{1}{2}} = 2R.$$

Treba se udaljiti za R, tj. polumjer Zemlje.

2. inačica

Iz formule za površinu kugline kapice (kalote)

$$P = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot v$$

lako se dobije visina v:

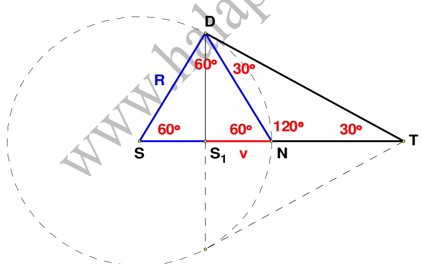
$$2 \cdot R \cdot \pi \cdot v = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot R^2 \cdot \pi \quad / : 2R\pi \Rightarrow v = \frac{R}{2}.$$

Sada je:

$$\left|SS_1\right| = R - v = \frac{R}{2}.$$

U pravokutnom trokutu SDS_1 duljina katete $|SS_1|$ jednaka je polovici duljine hipotenuze $|SD|$ pa slijedi:

$$\sphericalangle DSS_1 = 60^0.$$



Iz slike se vidi da je trokut SND jednakostraničan:

$$|SN| = |ND| = |DS| = R.$$

Za kutove trokuta TDN vrijedi:

$$\overline{TD} \perp \overline{DS} \Rightarrow \sphericalangle TDN = 90^0 - 60^0 = 30^0,$$

$$\sphericalangle DNT = 180^0 - 60^0 = 120^0,$$

$$\sphericalangle NTD = 180^0 - \left(30^0 + 120^0\right) = 30^0.$$

Dakle, trokut TDN je jednakokračan. Budući da nasuprot jednakih kutova u trokutu leže jednake stranice, proizlazi:

$$\sphericalangle TDN = \sphericalangle NTD \Rightarrow |NT| = |ND| = R.$$

Treba se udaljiti za R, tj. polumjer Zemlje.

Vježba 010

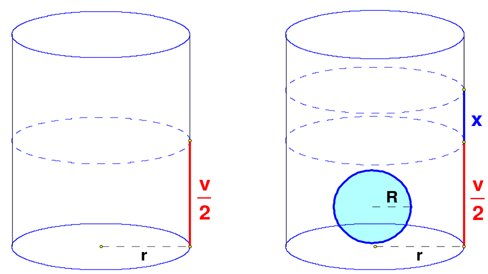
Ako Zemlja ima oblik kugle polumjera R, pod kojim kutom se vidi četvrtina njezine površine?

Rezultat: 60°.

Zadatak 011 (Anastazija, gimnazija)

U valjkastoj posudi visine 18 cm i polumjera baze 4 cm nalazi se voda do pola visine. Ako u vodu uronimo kuglu polumjera 3 cm, za koliko će se posto podignuti razina vode u posudi?

Rješenje 011



v = 18, r = 4, R = 3.

Volumen vode u valjkastoj posudi povećat će se za volumen kugle:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta V=\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot 3^3\cdot\pi=36\cdot\pi\\ \Delta V=r^2\cdot\pi\cdot x=16\cdot\pi\cdot x\end{array}\right\}\Rightarrow 16\cdot\pi\cdot x=36\cdot\pi \;/:16\pi\;\Rightarrow\; x=2.25.$$

Razina vode podignula se za:

$$\frac{x}{\frac{v}{2}}\cdot 100\%=\frac{2.25}{9}\cdot 100\%=25\%.$$

Vježba 011

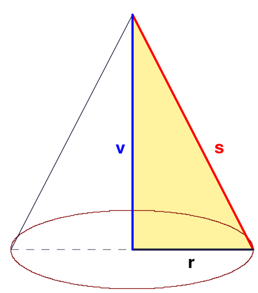
U valjkastoj posudi visine 20 cm i polumjera baze 4 cm nalazi se voda do pola visine. Ako u vodu uronimo kuglu polumjera 3 cm, za koliko će se posto podignuti razina vode u posudi?

Rezultat: 22.5%.

Zadatak 012 (Hrvoje, tehnička škola)

Visina uspravnog stošca je v = 12, a duljina izvodnice s za 4 je veća od polumjera r baze. Koliko iznosi oplošje stošca?

Rješenje 012



v = 12, s = r + 4.

Iz označenog trokuta uporabom Pitagorina poučka dobivamo:

$$s^2=v^2+r^2 \;\Rightarrow\; (r+4)^2=v^2+r^2 \;\Rightarrow\; r^2+8r+16=144+r^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 8r=144-16 \;\Rightarrow\; 8r=128 \;/:8 \;\Rightarrow\; r=16.$$

Oplošje stošca iznosi:

$$O=r\cdot\pi\cdot(r+s)=r\cdot\pi\cdot(r+r+4)=r\cdot\pi\cdot(2r+4)=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+2)=32\cdot\pi\cdot 18=576\cdot\pi.$$

Vježba 012

Visina uspravnog stošca je v = 12, a duljina izvodnice s za 4 je veća od polumjera r baze. Koliko iznosi obujam stošca?

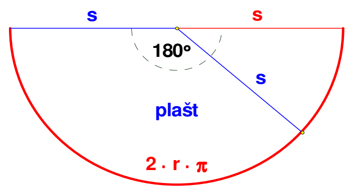
Rezultat: 1024π.

Zadatak 013 (Hrvoje, tehnička škola)

Kad se plašt stošca razvije u ravninu, dobije se polukrug. Koliko iznosi kut na vrhu osnog presjeka tog stošca?

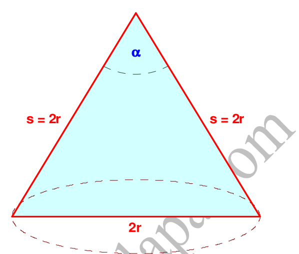
Rješenje 013

Označimo s α kut na vrhu osnog presjeka. Iz razvijenog plašta dobivamo izvodnicu s:



$$s \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi \;\; / : \pi \;\; \Rightarrow \;\; s = 2 \cdot r.$$

Osni presjek stošca je jednakostraničan trokut (vidi sliku) pa je traženi kut $\alpha = 60°$.



Vježba 013

Kad se plašt stošca razvije u ravninu, dobije se polukrug. Koliko iznosi kut između izvodnice i promjera baze stošca?

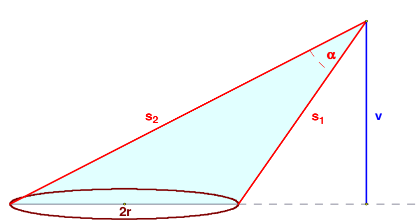
Rezultat: 60°.

Zadatak 014 (Anastazija, gimnazija)

Koliki je obujam (volumen) kosog stošca kojemu najkraća izvodnica ima duljinu 10 cm, najdulja izvodnica 20 cm, a kut između tih izvodnica 60°?

Rješenje 014

$s_1 = 10$, $s_2 = 20$, $\alpha = 60°$



Iz slike se vidi (kosinusov poučak):

$$(2r)^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos 60^0 \;\Rightarrow\; (2r)^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (2r)^2 = 100 + 400 - 200 \;\Rightarrow\; (2r)^2 = 300 \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; 2r = \sqrt{300} \;\Rightarrow\; 2r = 10 \cdot \sqrt{3} \;/:2 \;\Rightarrow\; r = 5 \cdot \sqrt{3}.$$

Visinu stošca dobijemo iz površine trokuta (osnog presjeka stošca). Površinu trokuta možemo izračunati na dva načina:

$$P=\frac{(2r)\cdot v}{2}=\frac{1}{2}\cdot s_1\cdot s_2\cdot\sin\alpha \Rightarrow \frac{\left(2\cdot 5\cdot\sqrt{3}\right)\cdot v}{2}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\cdot\sin 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot\sqrt{3}\cdot v=5\cdot 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5\cdot\sqrt{3}\cdot v=5\cdot 10\cdot\sqrt{3}\ /:5\sqrt{3} \Rightarrow v=10.$$

Obujam (volumen) stošca:

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot v=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v=\frac{1}{3}\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\pi\cdot 10=250\pi\ cm^3.$$

Vježba 014

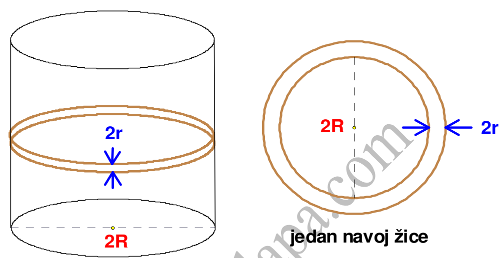
Kolika je visina kosog stošca kojemu najkraća izvodnica ima duljinu 10 cm, najdulja izvodnica 20 cm, a kut između tih izvodnica 60°?

Rezultat: 10 cm.

Zadatak 015 (Anastazija, gimnazija)

Na valjak promjera 100 cm namotano je 120 navoja bakrene žice promjera 2 mm. Kolika je masa namotane žice, ako je gustoća bakra 4.5 g/cm^3?

Rješenje 015



2R = 100 cm => R = 50 cm, 2r = 2 mm => r = 1 mm = 0.1 cm, ρ = 4.5 g/cm^3

Duljina jednog navoja žice jednaka je opsegu baze valjka: O = 2 · R · π.

Budući da je namotano 120 navoja, ukupna duljina žice je: l = 120 · O = 120 · 2 · R · π = 240 · R · π.

Volumen žice je volumen valjka čija je baza krug promjera 2r, a visina l: V = r^2 · π · l.

Masa namotane žice iznosi:

$$m=\rho\cdot V=\rho\cdot r^2\cdot\pi\cdot l=\rho\cdot r^2\cdot\pi\cdot 240\cdot R\cdot\pi=240\cdot\rho\cdot r^2\cdot R\cdot\pi^2=$$

$$=240\cdot 4.5\ \frac{g}{cm^3}\cdot(0.1\ cm)^2\cdot 50\ cm\cdot\pi^2\approx 5.33\ kg.$$

Vježba 015

Na valjak promjera 100 cm namotano je 200 navoja bakrene žice promjera 2 mm. Kolika je masa namotane žice, ako je gustoća bakra 4.5 g/cm^3?

Rezultat: 8.88 kg.

Zadatak 016 (Sanela, ekonomska škola)

Plod tropskog voća avocado često ima oblik kugle. U sredini ploda nalazi se velika koštica oblika kugle, kojoj je promjer približno dvaput toliki, kolika je debljina sloja voćnog mesa oko nj. Iznosi li volumen više od 15% volumena čitava ploda?.

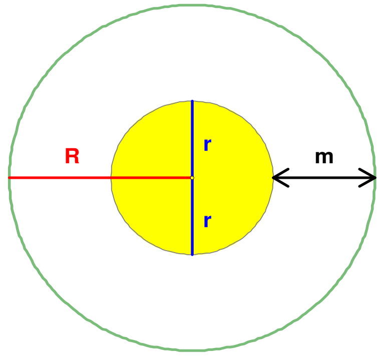
Rješenje 016

Neka je r polumjer koštice, R polumjer cijelog ploda, a m debljina sloja voćnog mesa. Budući da je promjer koštice dvaput veći od debljine sloja voćnog mesa, pišemo:

2r = 2m => r = m.

Tada je polumjer čitavog ploda jednak:

R = r + m = m + m = 2m.



Podsjetimo se formule za obujam (volumen) kugle polumjera r:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Gledamo omjer volumena koštice i volumena cijelog ploda:

$$\frac{V_{\text{koštice}}}{V_{\text{ploda}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \cdot 100\% = \frac{r^3}{R^3} \cdot 100\% = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot 100\% = \left(\frac{m}{2m}\right)^3 \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12.5\%.$$

Volumen koštice je 12.5% volumena cijelog ploda.

Vježba 016

Plod tropskog voća avocado često ima oblik kugle. U sredini ploda nalazi se velika koštica oblika kugle, kojoj je promjer približno dvaput toliki, kolika je debljina sloja voćnog mesa oko nj. U kojem su omjeru volumen koštice i volumen cijelog ploda?

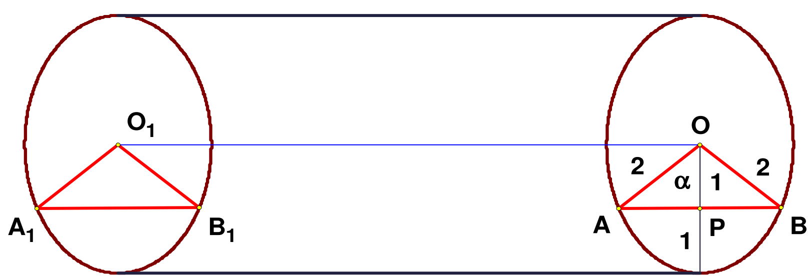
Rezultat: 1 : 8.

Zadatak 017 (2A, hotelijerska škola)

Spremnik za naftu ima oblik uspravnog kružnog valjka polumjera baze 2 m i visine 9 m koji je polegnut tako da su baze okomite, a izvodnice plašta paralelne s tlom. Visina nafte u spremniku je 1 m. Volumen nafte u spremniku iznosi

A. 22.11 m^3 B. 11.08 m^3 C. 16.52 m^3 D. 36.42 m^3 E. 26.81 m^3

Rješenje 017



$$|OA| = |OB| = 2, \; |OP| = 1, \; |OO_1| = 9$$

Iz pravokutnog trokuta APO odredimo duljinu $|AP|$:

$$|AP|^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow |AP| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Veličina kuta < POA = α je:

$$\sin\alpha = \frac{|AP|}{|AO|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^0.$$

Budući da je trokut ABO jednakokračan, vrijedi:

$$\angle BOA = 2 \cdot \angle POA = 2 \cdot 60^0 = 120^0.$$

Volumen valjka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 2 \; , \; v = 9 \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = 4\pi \cdot 9 = 36\pi.$$

Tada se volumen dijela valjka kojem je baza kružni isječak ABO dobije iz razmjera:

$$36\pi : 360^0 = V : 120^0 \Rightarrow V = \frac{36\pi \cdot 120^0}{360^0} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi.$$

Volumen nafte u spremniku dobije se ako od tog volumena V = 12π oduzmemo volumen trostrane prizme kojoj je baza jednakokračan trokut ABO, a visina v = 9:

$$\Delta V = V - \frac{|AB| \cdot |PO|}{2} \cdot v = 12\pi - \frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} \cdot 9 = 12\pi - 9\sqrt{3} = 22.11\, m^3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 017

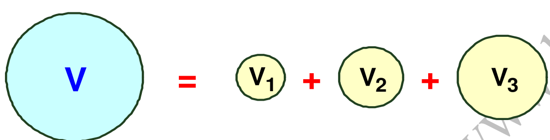
Spremnik za naftu ima oblik uspravnog kružnog valjka polumjera baze 2 m i visine 8 m koji je polegnut tako da su baze okomite, a izvodnice plašta paralelne s tlom. Visina nafte u spremniku je 1 m. Koliki je volumen nafte?

Rezultat: 23.84 cm^3.

Zadatak 018 (Ivan, tehnička škola)

Polumjeri triju kugala iznose 3, 4 i 5. Odredi polumjer kugle kojoj je obujam jednak zbroju obujama tih triju kugala.

Rješenje 018



$$\frac{4}{3} R^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot 4^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot \pi \; / \cdot \frac{3}{4\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^3 = 216 \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow R = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Vježba 018

Polumjeri dviju kugala iznose 3 i 4. Odredi polumjer kugle kojoj je oplošje jednako zbroju oplošja tih dviju kugala.

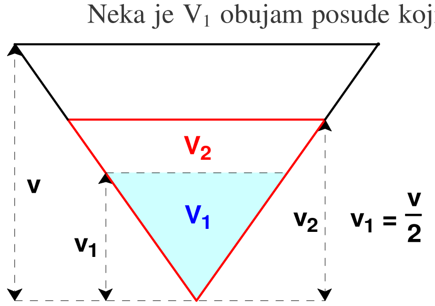
Rezultat: $4 \cdot R^2 \cdot \pi = 4 \cdot 3^2 \cdot \pi + 4 \cdot 4^2 \cdot \pi \Rightarrow R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5.$

Zadatak 019 (Ivan, tehnička škola)

Posuda ima oblik obrnutog stošca visine v. Slavina napuni posudu do polovine njezine visine za pola minute. Do koje visine slavina napuni posudu za jednu minutu?

Rješenje 019

Neka je V_1 obujam posude koji slavina napuni za pola minute. Za jednu minutu obujam će biti dva put veći:



$$V_2 : V_1 = 2 : 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{obujmovi se odnose kao} \\ \text{kubovi pripadnih visina} \end{array}\right] \Rightarrow v_2^3 : v_1^3 = 2 : 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^3 = 2 \cdot v_1^3 = 2 \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^3 = 2 \cdot \frac{v^3}{8} = \frac{v^3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^3 = \frac{v^3}{4} \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow v_2 = \frac{v}{\sqrt[3]{4}}.$$

Vježba 019

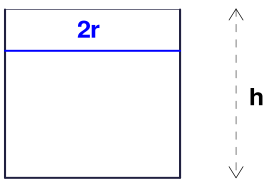
Posuda ima oblik obrnutog stošca visine v. Slavina napuni posudu do polovine njezine visine za jednu minutu. Do koje visine slavina napuni posudu za dvije minute?

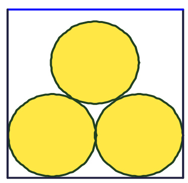
Rezultat: $v_2 = \frac{v}{\sqrt[3]{4}}.$

Zadatak 020 (Marija, gimnazija)

Posuda oblika šupljeg valjka polumjera r i visine h, sa zanemarivom debljinom stijenki napunjena je tekućinom do 80% svoje visine. Ako se u posudu urone tri metalne kugle polumjera 0.5r, posuda se napuni tekućinom do svog vrha. Nađi visinu h.

Rješenje 020





$$r^2 \cdot \pi \cdot \frac{80}{100} \cdot h + 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 \cdot \pi = r^2 \cdot \pi \cdot h \;/:\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \frac{8}{10} \cdot h + 4 \cdot \frac{r^3}{8} = r^2 \cdot h \;/:r^2 \Rightarrow \frac{8}{10} \cdot h + \frac{r}{2} = h \;/\cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot h + 5 \cdot r = 10 \cdot h \Rightarrow 10h - 8h = 5r \Rightarrow h = \frac{5}{2} r.$$

Vježba 020

Posuda oblika šupljeg valjka polumjera r i visine h, sa zanemarivom debljinom stijenki napunjena je tekućinom do 80% svoje visine. Ako se u posudu urone tri metalne kugle polumjera 0.5r, posuda se napuni tekućinom do svog vrha. Nađi polumjer r.

Rezultat: $r = \frac{2}{5} h.$