Zadatak 101 (4A, 4B, TUPŠ)

Osnovka (baza) uspravne četverostrane piramide je kvadrat duljine stranice 6 cm. Duljina visine piramide je 10 cm. Koliki je obujam (volumen) te piramide?

$$A.\ 60\ cm^3 \qquad B.\ 120\ cm^3 \qquad C.\ 360\ cm^3 \qquad D.\ 600\ cm^3$$

Rješenje 101

Ponovimo!

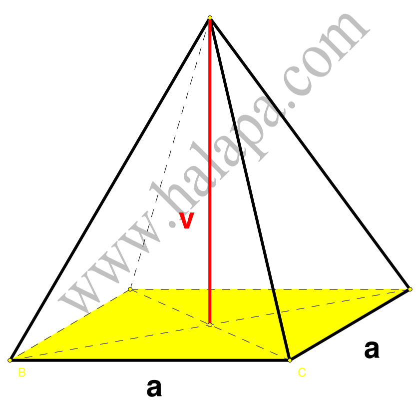
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$B = a^2.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Baza je četverostrane pravilne piramide kvadrat, a visina prolazi kroz središte kvadrata. Svi su pobočni bridovi pravilne četverostrane piramide jednake duljine. Obujam pravilne četverostrane piramide računa se po formuli

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \ \Rightarrow\ V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v,$$

gdje je a duljina brida osnovke (kvadrata), v njezina visina.



$$\left. \begin{array}{l} B = a^2 \\ V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v \ \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 6\ cm \\ v = 10\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (6\ cm)^2 \cdot v \ \Rightarrow\ V = 120\ cm^3.$$

Odgovor je pod B

Vježba 101

Osnovka (baza) uspravne četverostrane piramide je kvadrat duljine stranice 3 cm. Duljina visine piramide je 10 cm. Koliki je obujam (volumen) te piramide?

$$A.\ 30\ cm^3 \qquad B.\ 90\ cm^3 \qquad C.\ 120\ cm^3 \qquad D.\ 150\ cm^3$$

Rezultat: A.

Zadatak 102 (Miroslav, gimnazija)

Koliki je kut između dvije prostorne dijagonale kocke?

Rješenje 102

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki.
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

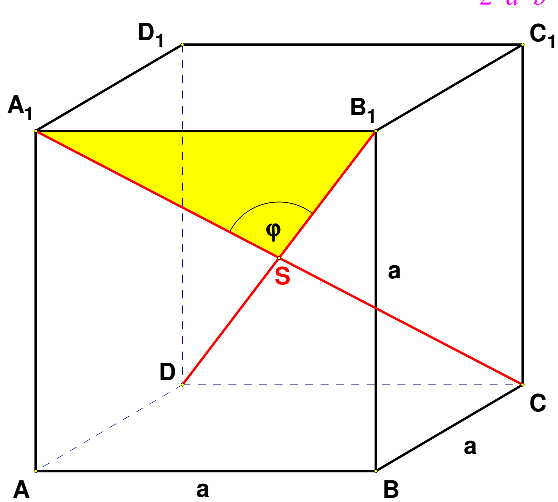
$$D=a\cdot\sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Prostorne dijagonale kocke sijeku se u jednoj točki koja ih raspolavlja.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \ \Rightarrow\ \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \ \Rightarrow\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|=|DD_1|=a$$

$$|A_1B_1|=|B_1C_1|=|C_1D_1|=|D_1A_1|=a$$

$$\left|A_1C\right| = \left|DB_1\right| = a\cdot\sqrt{3} \text{ duljina prostorne dijagonale} \quad , \quad \left|SA_1\right| = \left|SB_1\right| = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}$$

$$\angle A_1SB_1 = \varphi$$

Uočimo trokut A_1SB_1 čije su duljine stranica $|SA_1|$, $|SB_1|$ i $|A_1B_1|$. Pomoću poučka o kosinusu imamo

$$\cos\varphi = \frac{\left|SA_1\right|^2 + \left|SB_1\right|^2 - \left|A_1B_1\right|^2}{2\cdot\left|SA_1\right|\cdot\left|SB_1\right|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}\right)^2 - a^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot a^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - a^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot a^2\cdot 3 - a^2}{\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{3}{4}\cdot a^2 + \frac{3}{4}\cdot a^2 - a^2}{\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot 3} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{3}{4}\cdot a^2 + \frac{3}{4}\cdot a^2 - \frac{a^2}{1}}{\frac{3}{2}\cdot a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{3\cdot a^2 + 3\cdot a^2 - 4\cdot a^2}{4}}{\frac{3}{2}\cdot a^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{2\cdot a^2}{4}}{\frac{3}{2}\cdot a^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{2\cdot a^2}{4}}{\frac{3}{2}\cdot a^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \varphi = 70^\circ\, 31'44''.$$

Vježba 102

Koliki je veći kut između dvije prostorne dijagonale kocke?

Rezultat: 109° 28' 16".

Zadatak 103 (Miroslav, gimnazija)

Koliki kut zatvara prostorna dijagonala kocke s osnovkom?

Rješenje 103

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

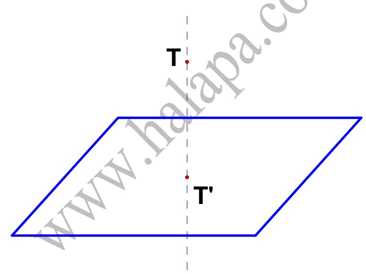
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Plošna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha strane kocke (strane kocke su kvadrati sa stranicama a).
Duljina d plošne dijagonale kocke dana je formulom

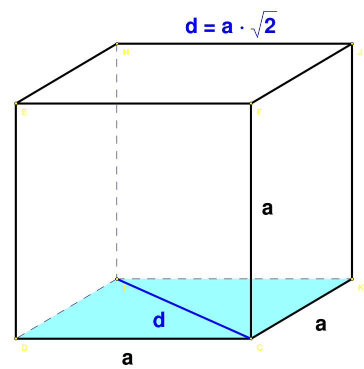
$$d = a \cdot \sqrt{2},$$

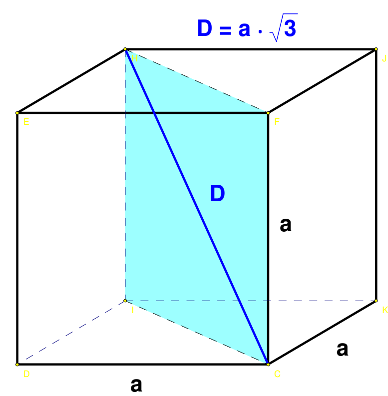
pri čemu je a duljina brida kocke.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani. Postoje četiri prostorne dijagonale i one se sve sijeku u jednoj točki.
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

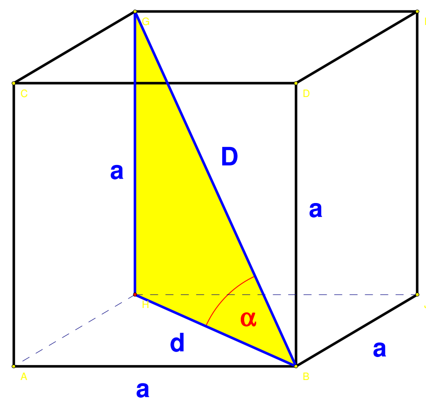
$$D = a \cdot \sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kod ortogonalne projekcije zrake projiciranja su okomite na ravninu crtanja. Svakoj točki prostora možemo pridružiti točku ravnine koja je probodište okomice povučene točkom na ravninu.
Ortogonalna projekcija dužine koja nije okomita na ravninu projekcije je dužina.
Ortogonalna projekcija dužine okomite na ravninu projekcije je točka.









Ortogonalna projekcija prostorne dijagonale D na osnovku kocke je plošna dijagonala d (dijagonala kvadrata). Traženi kut je kut između prostorne dijagonale D i njezine ortogonalne projekcije d na osnovku kocke. Uočimo u kocki pravokutan trokut čija je hipotenuza prostorna dijagonala D, a katete su brid kocke a i plošna dijagonala d. Mjeru kuta α možemo izračunati na više načina pomoću trigonometrijskih funkcija.

- $$\sin\alpha=\frac{a}{D}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a}{a\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a}{a\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow\alpha=35^\circ15'52''$$
- $$\cos\alpha=\frac{d}{D}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{a\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{a\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\Rightarrow\alpha=35^\circ15'52''$$
- $$tg\,\alpha=\frac{a}{d}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow\alpha=35^\circ15'52''.$$

Vježba 103

Koliki kut zatvara prostorna dijagonala kocke s bridom iz zajedničkog vrha?

Rezultat: 54° 44' 8".

Zadatak 104 (Bojana, gimnazija)

Dijagonalni presjek kvadra je kvadrat ploštine 1 m^2. Izračunajte oplošje i obujam kvadra, ako su duljine njegovih osnovnih bridova u omjeru a : b = 3 : 4.

Rješenje 104

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P=a^2.$$

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik.
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P=a\cdot b.$$

Dijagonala pravokutnika stranica a i b računa se po formuli:

$$d^2=a^2+b^2.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

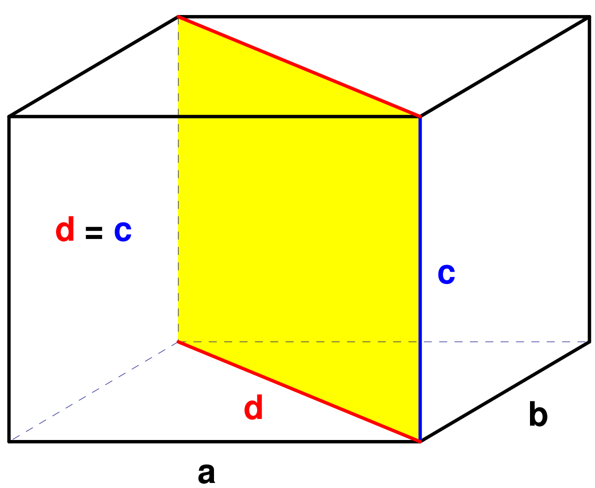
$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad a\cdot d=b\cdot c.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Oplošje kvadra izračunava se po formuli:

$$O=2\cdot\left(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c\right).$$

Obujam kvadra izračunava se po formuli:

$$V=a\cdot b\cdot c.$$



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Budući da je dijagonalni presjek kvadrat ploštine 1 m^2, vrijede jednadžbe:

$$\left. \begin{array}{l} d = c \\ d \cdot c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c \cdot c = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{1} \Rightarrow c = 1 \ m \Rightarrow d = 1 \ m.$$

Formule za plošnu dijagonalu d i razmjer čine sustav jednadžba iz kojeg izračunamo a i b.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = d^2 \\ a : b = 3 : 4 \end{array} \right\} \Rightarrow [d = 1] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ 4 \cdot a = 3 \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ 4 \cdot a = 3 \cdot b \ /: 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ a = \frac{3}{4} \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{3}{4} \cdot b \right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} \cdot b^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} \cdot b^2 + b^2 = 1 \ / \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot b^2 + 16 \cdot b^2 = 16 \Rightarrow 25 \cdot b^2 = 16 \Rightarrow 25 \cdot b^2 = 16 \ /: 25 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{16}{25} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow b = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow b = \frac{4}{5} \ m.$$

Računamo a.

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{3}{4} \cdot b \\ b = \frac{4}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{5} \ m.$$

Oplošje kvadra iznosi:

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow \begin{bmatrix} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow O = 2 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot \left(\frac{12}{25} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) \Rightarrow O = 2 \cdot \frac{12 + 15 + 20}{25} \Rightarrow O = 2 \cdot \frac{47}{25} \Rightarrow O = \frac{2}{1} \cdot \frac{47}{25} \Rightarrow O = \frac{94}{25} \ m^2.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow \begin{bmatrix} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 \Rightarrow V = \frac{12}{25} \ m^3.$$

Vježba 104

Dijagonalni presjek kvadra je kvadrat ploštine 100 dm^2. Izračunajte oplošje i obujam kvadra, ako su duljine njegovih osnovnih bridova u omjeru a : b = 3 : 4.

Rezultat: $O = \frac{94}{25}\ m^2,\ V = \frac{12}{25}\ m^3.$

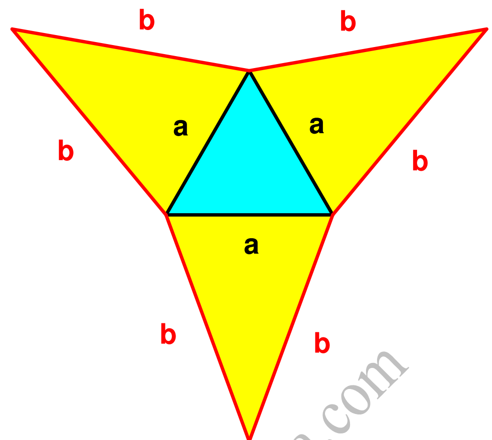
Zadatak 105 (Danijel, srednja škola)

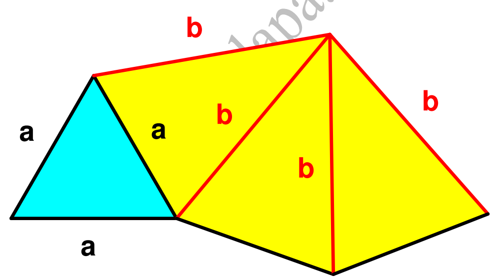
Nacrtaj mrežu trostrane piramide kojoj je osnovni brid dug a, bočni b.

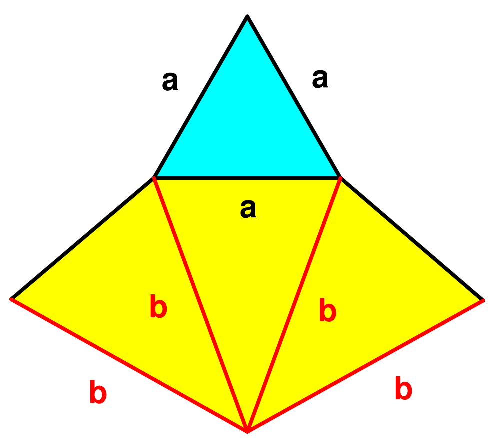
Rješenje 105

Ponovimo!

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.







Vježba 105

Nacrtaj mrežu trostrane piramide kojoj je osnovni brid dug 2 cm, bočni 3 cm.

Rezultat: Sve isto uz odgovarajuće mjere.

Zadatak 106 (2B, TUPŠ)

Dana je piramida osnovke B. Usporedno osnovki na udaljenosti v piramida je presječena ravninom, a površina tog presjeka je B_1. Kolika je duljina visine piramide, ako je $B = 400 \text{ cm}^2$, $B_1 = 100 \text{ cm}^2$, $v = 3$ cm?

Rješenje 106

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

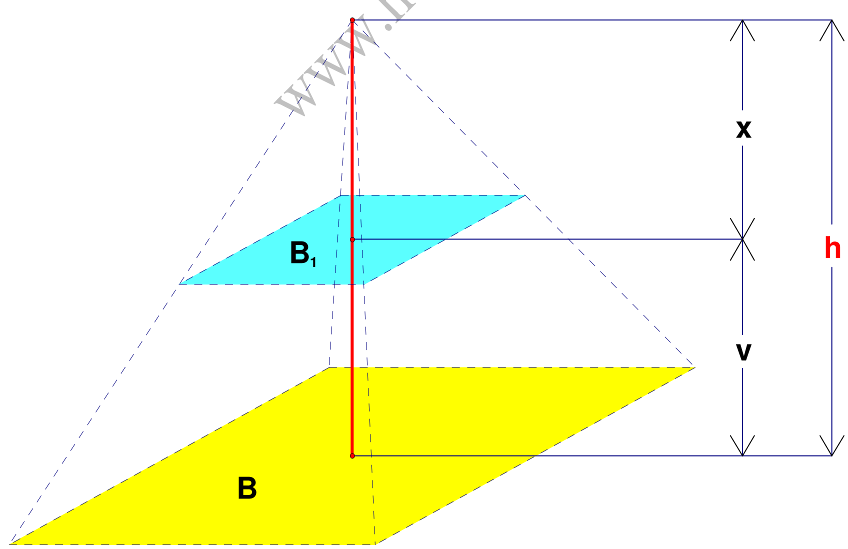
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.
Ako n – terostranu piramidu presiječemo ravninom usporednom s njezinom osnovkom dobivamo novu piramidu s istim vrhom i tijelo koje nazivamo krnjom piramidom.
Krnja je piramida omeđena dvama usporednim n – terokutima i s n trapeza. Za omjer površina osnovaka vrijedi:

$$h = v \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{B_1}{B}}},$$

gdje su B i B_1 osnovke krnje piramide, v je visina krnje piramide, h je visina piramide.



$$h = v \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{B_1}{B}}} \Rightarrow \begin{bmatrix} v = 3 \ cm \\ B_1 = 100 \ cm^2 \\ B = 400 \ cm^2 \end{bmatrix} \Rightarrow h = 3 \ cm \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{100 \ cm^2}{400 \ cm^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{100\ cm^2}{400\ cm^2}}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{\frac{2-1}{2}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow h = 3\ cm \cdot 2 \Rightarrow h = 6\ cm.$$

Vježba 106

Dana je piramida osnovke B. Usporedno osnovki na udaljenosti v piramida je presječena ravninom, a površina tog presjeka je B_1. Kolika je duljina visine piramide, ako je $B = 45\ m^2$, $B_1 = 5\ m^2$, $v = 2\ m$?

Rezultat: 3 m.

Zadatak 107 (2B, TUPŠ)

Na kojoj je visini od vrha piramida presječena usporednom ravninom ako je površina donje osnovke četverostruko veća od gornje i ako je visina piramide 12 cm?

Rješenje 107

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

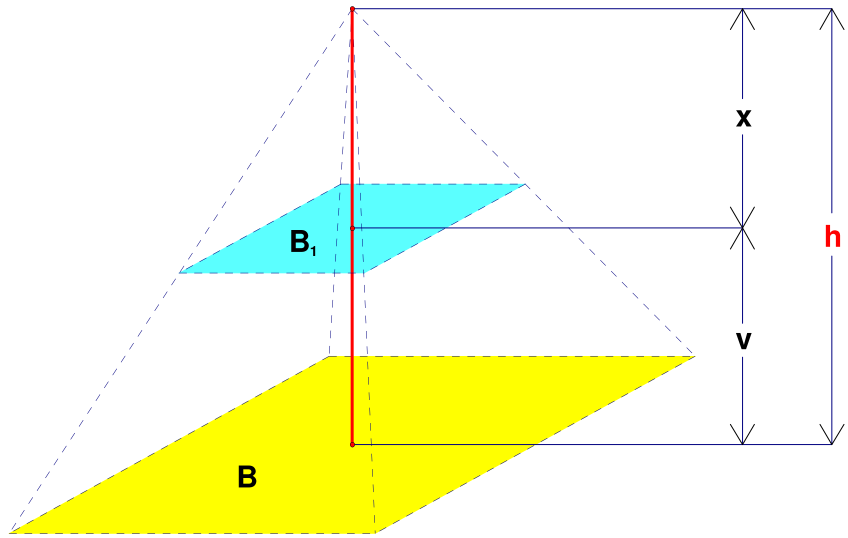
Kako zapisati da je broj b n – terostruko veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.
Ako n – terostranu piramidu presiječemo ravninom usporednom s njezinom osnovkom dobivamo novu piramidu s istim vrhom i tijelo koje nazivamo krnjom piramidom.
Krnja je piramida omeđena dvama usporednim n – terokutima i s n trapeza. Za omjer površina osnovaka vrijedi:

$$\frac{B_1}{B} = \left(\frac{x}{x+v}\right)^2 \Rightarrow \frac{B_1}{B} = \left(\frac{x}{h}\right)^2,$$

gdje su B i B_1 osnovke krnje piramide, x je visina dopunjujuće piramide, v je visina krnje piramide, h je visina piramide.



$$\frac{B_1}{B}=\left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac{B_1}{B} \Rightarrow \left(\frac{x}{h}\right)^2=\frac{B_1}{B} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \frac{x}{h}=\sqrt{\frac{B_1}{B}} \Rightarrow \frac{x}{h}=\sqrt{\frac{B_1}{B}} \;/\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=h\cdot\sqrt{\frac{B_1}{B}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h=12\ cm \\ B=4\cdot B_1 \end{array}\right] \Rightarrow x=12\ cm\cdot\sqrt{\frac{B_1}{4\cdot B_1}} \Rightarrow x=12\ cm\cdot\sqrt{\frac{B_1}{4\cdot B_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=12\ cm\cdot\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=12\ cm\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x=12\ cm\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x=6\ cm.$$

Vježba 107

Na kojoj je visini od vrha piramida presječena usporednom ravninom ako je površina donje osnovke četverostruko veća od gornje i ako je visina piramide 10 cm?

Rezultat: 5 cm.

Zadatak 108 (Luka, srednja škola)

Kocka brida a = 12 cm presječena je ravninom koja prolazi kroz tri (i samo tri) vrha kocke. Kolika je površina presjeka?

Rješenje 108

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^1=a \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Plošna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha strane kocke (strane kocke su kvadrati sa stranicama a).
Duljina d plošne dijagonale kocke dana je formulom

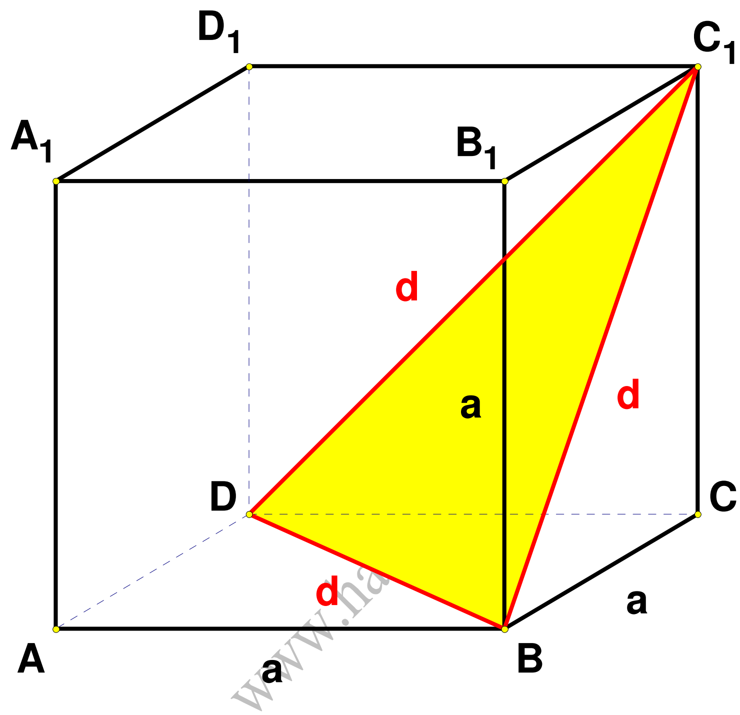
$$d=a\cdot\sqrt{2},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokute dijelimo prema odnosu među duljinama stranica

$$\begin{cases}\text{raznostraničan}\\ \text{jednakokračan}\\ \text{jednakostraničan}\end{cases}.$$

Jednakostraničan trokut ima tri jednaka kuta i tri jednake stranice.
Ploština jednakostraničnog trokuta duljine stranice a računa se po formuli:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$



Budući da je presjek jednakostraničan trokuta DBC_1 duljine stranice d, površina presjeka iznosi:

$$P=\frac{d^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left[d=a\cdot\sqrt{2}\right] \Rightarrow P=\frac{\left(a\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow P=\frac{a^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{a^2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow P=\frac{a^2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[a=12\ cm\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{(12\ cm)^2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P=\frac{144\ cm^2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P=\frac{144\ cm^2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P=72\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$$

Vježba 108

Kocka brida a = 1.2 dm presječena je ravninom koja prolazi kroz tri (i samo tri) vrha kocke. Kolika je površina presjeka?

Rezultat: $P=72\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$

Zadatak 109 (Luka, srednja škola)

Koliki kut zatvara prostorna dijagonala kocke s osnovicom?

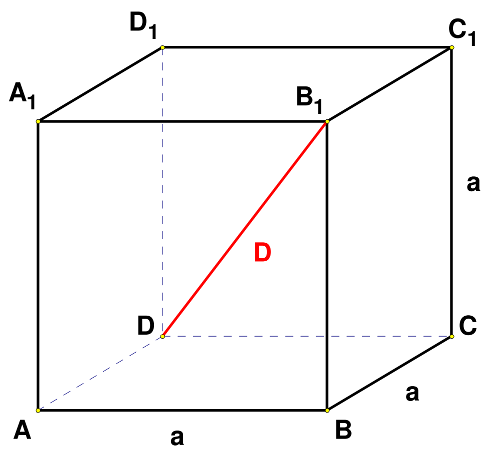
Rješenje 109

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

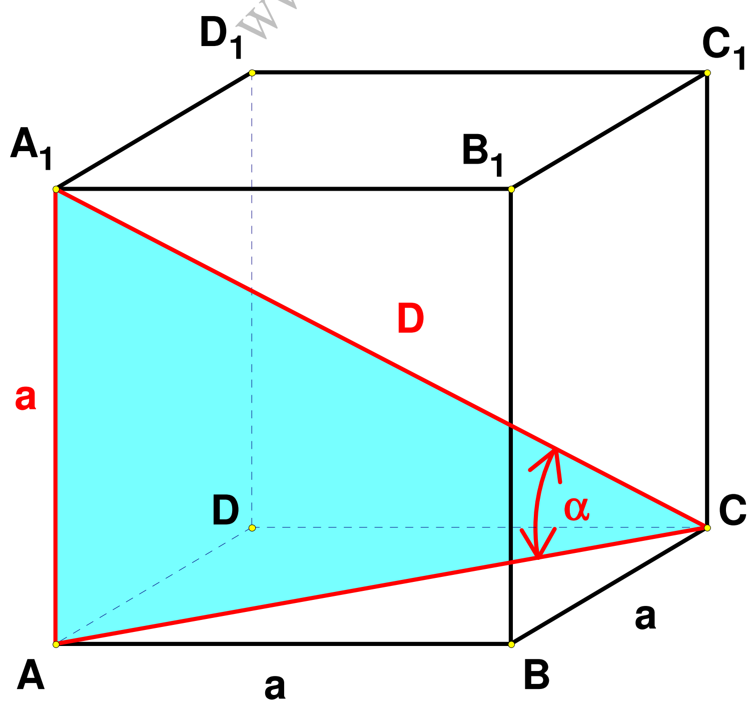
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.



Prostorna dijagonala **D** povezuje dva nasuprotna vrha koji ne leže na istoj strani.
Duljina prostorne dijagonale kocke dana je formulom

$$D = a \cdot \sqrt{3}.$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Sa slike vidi se:

$$\left|AA_1\right| = a \;,\; \left|CA_1\right| = D = a\cdot\sqrt{3} \;,\; \angle ACA_1 = \alpha$$

Uočimo pravokutan trokut ACA_1. Pomoću funkcije sinus dobije se:

$$\sin\alpha = \frac{\left|AA_1\right|}{\left|CA_1\right|} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{a\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{a\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''.$$

Vježba 109

Koliki kut zatvara prostorna dijagonala kocke s osnovicom?

Rezultat: 35° 15' 52".

Zadatak 110 (Luka, srednja škola)

Površina dijagonalnog presjeka kocke je $P = 25\cdot\sqrt{2}\ cm^2$. Koliko je oplošje kocke?

Rješenje 110

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je oplošje:

$$O = 6\cdot a^2.$$

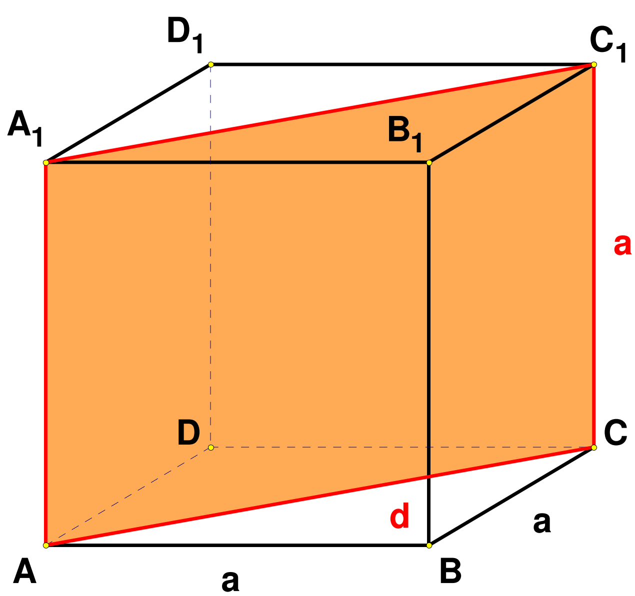
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Dijagonala d kvadrata izračunava se po formuli:

$$d = a\cdot\sqrt{2}.$$

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90°).
Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P = a\cdot b.$$



Uočimo da je dijagonalni presjek kocke pravokutnik ACC_1A_1 za čiju površinu vrijedi:

$$P = d \cdot a \Rightarrow \left[d = a \cdot \sqrt{2} \right] \Rightarrow P = a \cdot \sqrt{2} \cdot a \Rightarrow P = a^2 \cdot \sqrt{2}.$$

Računamo duljinu brida a kocke.

$$\left. \begin{array}{l} P = a^2 \cdot \sqrt{2} \\ P = 25 \cdot \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{2} = 25 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{2} = 25 \cdot \sqrt{2} \; / : \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5 \; cm.$$

Oplošje kocke iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ O = 6 \cdot a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow O = 6 \cdot 5^2 \Rightarrow O = 6 \cdot 25 \Rightarrow O = 150 \; cm^2.$$

Vježba 110

Površina dijagonalnog presjeka kocke je $P = 16 \cdot \sqrt{2} \; cm^2$. Koliko je oplošje kocke?

Rezultat: 96 cm^2.

Zadatak 111 (Leon, srednja škola)

Bazen ima oblik kvadra duljine 5 m, širine 3.5 m i visine (dubine) 1.8 m. Koliko litara vode ima u bazenu ako je napunjen do $\frac{2}{3}$ svoje visine?

Rješenje 111

Ponovimo!

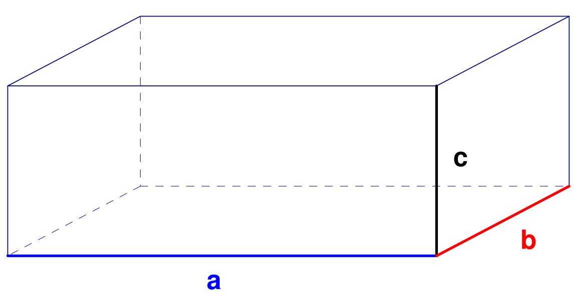
$$1 \; m^3 = 1000 \; dm^3 \quad , \quad 1 \; dm^3 = 1 \; L \quad , \quad 1 \; hl = 100 \; L.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Kvadar ili pravokutni paralelopiped je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Obujam kvadra izračunava se po formuli:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



Broj litara vode u bazenu iznosi:

$$V = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \; m \\ b = 3.5 \; m \\ c = 1.8 \; m \end{array} \right] \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot 5 \; m \cdot 3.5 \; m \cdot 1.8 \; m \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot 31.5 \; m^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 21 \; m^3 \Rightarrow V = 21000 \; dm^3 \Rightarrow V = 21000 \; L \Rightarrow V = 210 \; hl.$$

Vježba 111

Bazen ima oblik kvadra duljine 5 m, širine 3.5 m i visine (dubine) 1.8 m. Koliko litara vode ima u bazenu ako je prazan do $\frac{1}{3}$ svoje visine?

Rezultat: 210 hl.

Zadatak 112 (Leon, srednja škola)

Duljine bridova kvadra su 5 dm, 12 dm i 15 dm. Koliki je brid kocke kojoj je oplošje jednako oplošju tog kvadra?

Rješenje 112

Ponovimo!

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 \quad , \quad 1\ dm^3 = 1\ L \quad , \quad 1\ hl = 100\ L.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je oplošje:

$$O = 6 \cdot a^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kvadar ili pravokutni paralelopiped je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Oplošje kvadra izračunava se po formuli:

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Neka je x duljina brida kocke. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = 6 \cdot x^2 - \text{oplošje kocke} \\ O_2 = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) - \text{oplošje kvadra} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ O_1 = O_2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot x^2 = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow 6 \cdot x^2 = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \ / \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5\ dm \\ b = 12\ dm \\ c = 15\ dm \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot (5\ dm \cdot 12\ dm + 5\ dm \cdot 15\ dm + 12\ dm \cdot 15\ dm) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot 315\ dm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot 105\ dm^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \cdot 105\ dm^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x = \sqrt{105}\ dm \Rightarrow x = 10.25\ dm.$$

Vježba 112

Duljine bridova kvadra su 0.5 m, 120 cm i 15 dm. Koliki je brid kocke kojoj je oplošje jednako oplošju tog kvadra?

Rezultat: 10.25 *dm.*

Zadatak 113 (Asterix, gimnazija)

Puna metalna kugla polumjera 10 cm pretopljena je u kocku. Kolika je duljina brida kocke?

$A.\ 5\ cm \qquad B.\ 7.48\ cm \qquad C.\ 16.12\ cm \qquad D.\ 29\ cm$

Rješenje 113

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je obujam:

$$V = a^3.$$

Kada pretopimo kuglu volumena V_1 u kocku volumena V_2 njihovi volumeni ostaju jednaki.

$$V_2 = V_1 \Rightarrow a^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow a^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow a = \sqrt[3]{r^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = r \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi} \Rightarrow \left[\, r = 10\ cm \,\right] \Rightarrow a = 10\ cm \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \pi} \Rightarrow a = 16.12\ cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 113

Puna metalna kugla polumjera 1 dm pretopljena je u kocku. Kolika je duljina brida kocke?

$A.\ 5\ cm \qquad B.\ 7.48\ cm \qquad C.\ 16.12\ cm \qquad D.\ 29\ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 114 (Asterix, gimnazija)

Pobočke pravilne trostrane piramide s bazom zatvaraju kut mjere 52°. Duljina osnovnoga brida iznosi 7.5 cm. Kolika je visina te piramide?

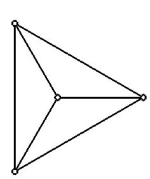
$A.\ 2.77\ cm \qquad B.\ 3.24\ cm \qquad C.\ 4.80\ cm \qquad D.\ 6.50\ cm$

Rješenje 114

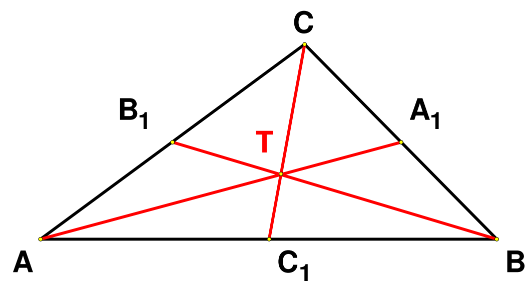
Ponovimo!

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.

Pravilna uspravna trostrana piramida (tetraedar) je geometrijsko tijelo koje se sastoji od četiri jednakostranična trokuta.



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.

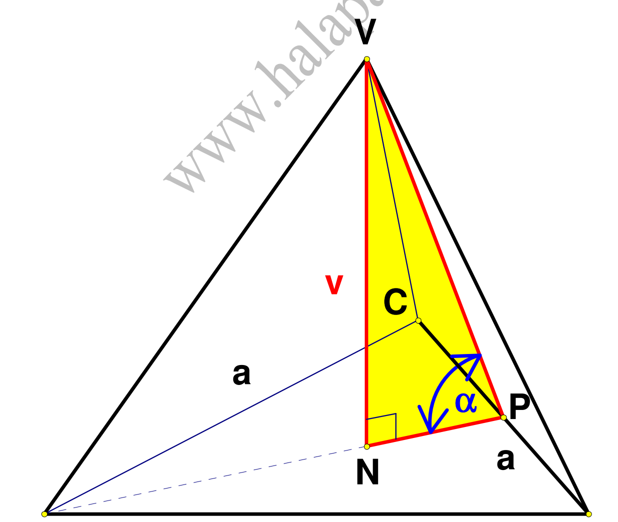


Jednakostranični trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i tri jednaka kuta.
Polumjer upisane kružnice jednakostraničnog trokuta iznosi:

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

Visina jednakostraničnog trokuta iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a = 7.5 \ cm \ , \ |NP| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} \ , \ \angle NPV = \alpha = 52^{\circ} \ , \ |NV| = v$$

$$|BP| = |PC|$$

Nožište N visine pravilne trostrane piramide je težište jednakostraničnog trokuta ABC i istodobno središte njemu upisane kružnice. Budući da je trokut VNP pravokutan, uporabom funkcije tangens izračunamo visinu v.

$$tg\,\alpha=\frac{|NV|}{|NP|}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{|NV|}{|NP|}\ /\cdot|NP|\Rightarrow|NP|\cdot tg\,\alpha=|NV|\Rightarrow|NV|=|NP|\cdot tg\,\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,\alpha\Rightarrow v=\frac{7.5\ cm\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,52^{\circ}\Rightarrow v=2.77\ cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 114

Pobočke pravilne trostrane piramide s bazom zatvaraju kut mjere 52º. Duljina osnovnoga brida iznosi 75 mm. Kolika je visina te piramide?

$A.\ 2.77\ cm \qquad B.\ 3.24\ cm \qquad C.\ 4.80\ cm \qquad D.\ 6.50\ cm$

Rezultat: A.

Zadatak 115 (4B, TUPŠ)

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju tri puta, koliko se puta poveća njegovo oplošje?

Rješenje 115

Ponovimo!

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Oplošje kvadra računa se formulom

$$O=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c).$$

Kako zapisati da je broj a n puta veći od broja b?

$$a=n\cdot b\quad,\quad\frac{a}{n}=b\quad,\quad\frac{a}{b}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je zadan kvadar duljina bridova a, b i c. Njegovo je oplošje

$$O=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c).$$

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju tri puta, slijedi:

$$a_1=3\cdot a\ ,\ b_1=3\cdot b\ ,\ c_1=3\cdot c.$$

Tada oplošje iznosi:

$$O_1=2\cdot(a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+b_1\cdot c_1).$$

Računamo koliko se puta poveća njegovo oplošje.

1.inačica

$$\frac{O_1}{O}=\frac{2\cdot(a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+b_1\cdot c_1)}{2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)}\Rightarrow\frac{O_1}{O}=\frac{2\cdot(a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+b_1\cdot c_1)}{2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{O_1}{O}=\frac{a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+b_1\cdot c_1}{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1=3\cdot a\\ b_1=3\cdot b\\ c_1=3\cdot c\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{O_1}{O}=\frac{3\cdot a\cdot 3\cdot b+3\cdot a\cdot 3\cdot c+3\cdot b\cdot 3\cdot c}{a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a \cdot c + 9 \cdot b \cdot c}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{9 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1}{O} = 9 \Rightarrow \frac{O_1}{O} = 9 \; / \cdot O \Rightarrow O_1 = 9 \cdot O.$$

2.inačica

$$O_1 = 2 \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 3 \cdot a \\ b_1 = 3 \cdot b \\ c_1 = 3 \cdot c \end{bmatrix} \Rightarrow O_1 = 2 \cdot (3 \cdot a \cdot 3 \cdot b + 3 \cdot a \cdot 3 \cdot c + 3 \cdot b \cdot 3 \cdot c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 = 2 \cdot (9 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a \cdot c + 9 \cdot b \cdot c) \Rightarrow O_1 = 2 \cdot 9 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 = 9 \cdot (2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)) \Rightarrow \left[O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \right] \Rightarrow O_1 = 9 \cdot O.$$

Vježba 115

Ako se duljine svih bridova kvadra povećaju dva puta, koliko se puta poveća njegovo oplošje?

Rezultat: $O_1 = 4 \cdot O$.

Zadatak 116 (Katarina, maturantica)

U prazan akvarij koji ima oblik kvadra duljine 50 cm, širine 30 cm i visine 40 cm uliveno je 18 litara vode. Do koje je visine voda ispunila akvarij? Napomena: 1 L = 1 dm^3.

A. do 12 *cm* *B.* do 14 *cm* *C.* do 18 *cm* *D.* do 20 *cm*

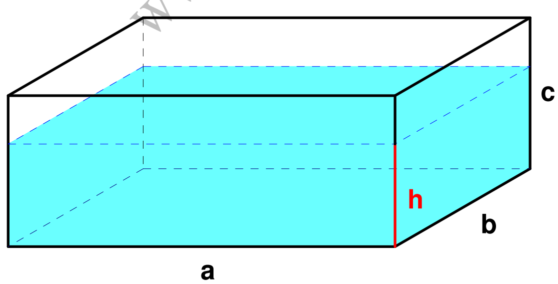
Rješenje 116

Ponovimo!

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Obujam kvadra računa se formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



Voda je ispunila akvarij do visine h pa vrijedi:

$$V = a \cdot b \cdot h \Rightarrow a \cdot b \cdot h = V \Rightarrow a \cdot b \cdot h = V \; / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow h = \frac{V}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V = 18 \; L = 18 \; dm^3 \\ a = 50 \; cm = 5 \; dm \\ b = 30 \; cm = 3 \; dm \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{18 \; dm^3}{5 \; dm \cdot 3 \; dm} \Rightarrow h = 1.2 \; dm \Rightarrow h = 12 \; cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 116

U prazan akvarij koji ima oblik kvadra duljine 0.5 m, širine 0.3 m i visine 0.4 m uliveno je 18 litara vode. Do koje je visine voda ispunila akvarij? Napomena: 1 L = 1 dm^3.

$A.$ do $12\ cm$ $\quad$ $B.$ do $14\ cm$ $\quad$ $C.$ do $18\ cm$ $\quad$ $D.$ do $20\ cm$

Rezultat: A.

Zadatak 117 (Matija, gimnazija)

Pobočna ploha pravilne uspravne četverostrane piramide ima visinu duljine m i kut prema bazi piramide veličine α. Volumen piramide je V. Tada je 3 · V jednako:

$A.\ 2 \cdot m^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ $\quad$ $B.\ 4 \cdot m^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ $\quad$ $C.\ 2 \cdot m^3 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \cos\alpha$

$D.\ 2 \cdot m^3 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \cdot \sin\alpha$ $\quad$ $E.\ 4 \cdot m^3 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \cdot \cos\alpha$

Rješenje 117

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Obujam piramide računa se po formuli

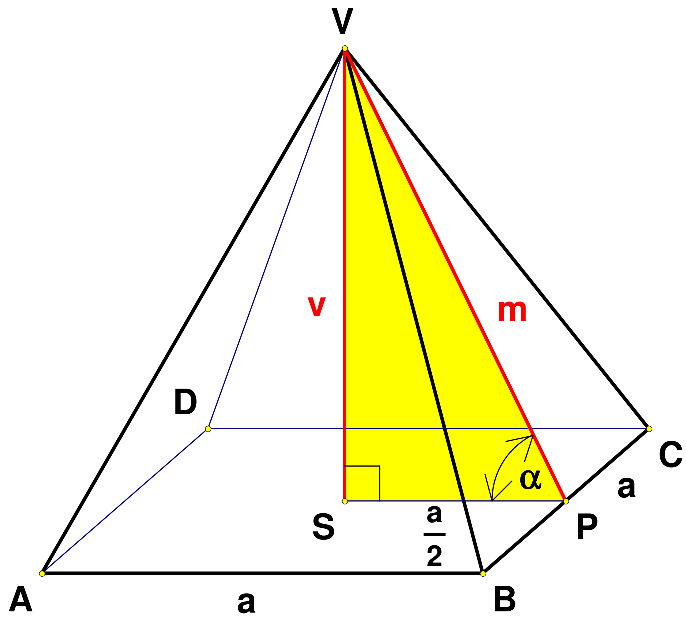
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v,$$

gdje je B ploština baze, a v visina piramide. Ako je baza piramide kvadrat duljine stranice a tada je obujam piramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \;,\; |SV| = v \;,\; |PV| = m \;,\; |SP| = \frac{a}{2}$$

Uočimo pravokutan trokut SPV. Tada je

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{|SV|}{|PV|} \\ \cos\alpha = \dfrac{|SP|}{|PV|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{v}{m} \\ \cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{v}{m} \\ \cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{m}{1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{v}{m} \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{2\cdot m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{v}{m} = \sin\alpha \\ \dfrac{a}{2\cdot m} = \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{v}{m} = \sin\alpha \;\; / \cdot m \\ \dfrac{a}{2\cdot m} = \cos\alpha \;\; / \cdot 2\cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = m\cdot\sin\alpha \\ a = 2\cdot m\cdot\cos\alpha \end{array}\right\}.$$

Dalje slijedi:

$$V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot v \;\Rightarrow\; V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot v \;/\cdot 3 \;\Rightarrow\; 3\cdot V = B\cdot v \;\Rightarrow\; \left[\, B = a^2 \,\right] \Rightarrow\; 3\cdot V = a^2\cdot v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\cdot m\cdot\cos\alpha \\ v = m\cdot\sin\alpha \end{array}\right] \Rightarrow\; 3\cdot V = (2\cdot m\cdot\cos\alpha)^2\cdot m\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; 3\cdot V = 4\cdot m^2\cdot\cos^2\alpha\cdot m\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3\cdot V = 4\cdot m^3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; 3\cdot V = 2\cdot m^3\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3\cdot V = 2\cdot m^3\cdot(2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha)\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; 3\cdot V = 2\cdot m^3\cdot\sin(2\cdot\alpha)\cdot\cos\alpha.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 117

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 118 (Krešimir, gimnazija)

Pravilna uspravna trostrana prizma čija je osnovka (baza) jednakostranični trokut duljine stranice a prerezana je ravninom neparalelnom s bazom. Bočni bridovi dobivene 'krnje' prizme imaju duljine m, n i p. Odredite ploštinu njezina plašta.

$A.\ \frac{a\cdot(m+n+p)}{2}$ $\quad B.\ \frac{a\cdot(m+n+p)}{4}$ $\quad C.\ a\cdot(m+n+p)$ $\quad D.\ \frac{m+n+p}{3\cdot a}$

Rješenje 118

Ponovimo!

Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke.

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).

Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v,$$

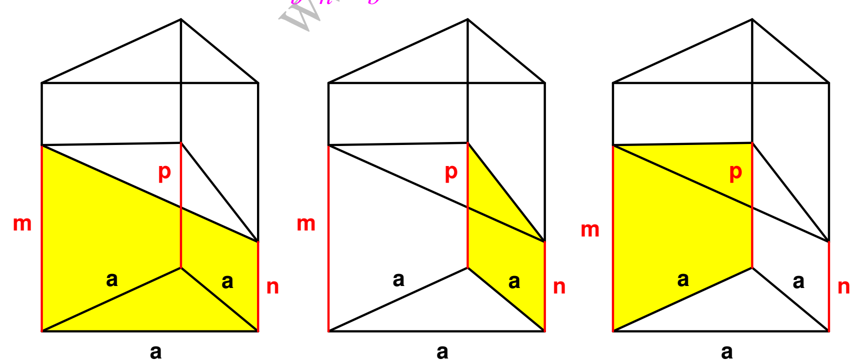
gdje je v visina trapeza, a i c su duljine osnovica.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$



Plašt čine tri trapeza pa je ukupna ploština jednaka zbroju njihovih ploština.

$$P=\frac{m+n}{2}\cdot a+\frac{n+p}{2}\cdot a+\frac{p+m}{2}\cdot a \Rightarrow P=\frac{a}{2}\cdot(m+n+n+p+p+m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{a}{2}\cdot(2\cdot m+2\cdot n+2\cdot p) \Rightarrow P=\frac{a}{2}\cdot 2\cdot(m+n+p) \Rightarrow P=\frac{a}{2}\cdot 2\cdot(m+n+p) \Rightarrow$$

$$P=a\cdot(m+n+p).$$

Odgovor je pod C.

Vježba 118

Pravilna uspravna trostrana prizma čija je osnovka (baza) jednakostranični trokut duljine stranice 1 prerezana je ravninom neparalelnom s bazom. Bočni bridovi dobivene 'krnje' prizme imaju duljine m, n i p. Odredite ploštinu njezina plašta.

$$A.\ \frac{m+n+p}{2} \qquad B.\ \frac{m+n+p}{4} \qquad C.\ m+n+p \qquad D.\ \frac{m+n+p}{3}$$

Rezultat: C.

Zadatak 119 (Luka, gimnazija)

Duljine bridova pravokutnog paralelepipeda, čija je prostorna dijagonala duga 6 cm, a oplošje je 72 cm^2, tvore geometrijski niz. Kolike su duljine bridova?

Rješenje 119

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke. Prizma kojoj su baze paralelogrami naziva se paralelepiped. Sve strane paralelepipeda (ima ih šest) su paralelogrami. Uspravni paralelepiped kojemu su baze pravokutnici naziva se pravokutni paralelepiped (kvadar). Sve strane pravokutnog paralelepipeda su pravokutnici. Pravokutni paralelepiped kojemu su svi bridovi sukladni zove se kocka.
Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Duljina prostorne dijagonale kvadra:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Oplošje kvadra:

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Neka su duljine bridova pravokutnog paralelepipeda tri uzastopna člana geometrijskog niza:

$$a = a \ , \ b = a \cdot q \ , \ c = a \cdot q^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = 6 \ , \ O = 72 \\ a = a \ , \ b = a \cdot q \ , \ c = a \cdot q^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6^2 = a^2 + (a\cdot q)^2 + \left(a\cdot q^2\right)^2 \\ 72 = 2\cdot\left(a\cdot a\cdot q + a\cdot a\cdot q^2 + a\cdot q\cdot a\cdot q^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36 = a^2 + a^2\cdot q^2 + a^2\cdot q^4 \\ 72 = 2\cdot\left(a^2\cdot q + a^2\cdot q^2 + a^2\cdot q^3\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36 = a^2\cdot\left(1 + q^2 + q^4\right) \\ 72 = 2\cdot\left(a^2\cdot q + a^2\cdot q^2 + a^2\cdot q^3\right) \; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36 = a^2\cdot\left(1 + q^2 + q^4\right) \\ 36 = a^2\cdot q + a^2\cdot q^2 + a^2\cdot q^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36 = a^2\cdot\left(1 + q^2 + q^4\right) \\ 36 = a^2\cdot\left(q + q^2 + q^3\right) \end{array}\right\} \Rightarrow a^2\cdot\left(1 + q^2 + q^4\right) = a^2\cdot\left(q + q^2 + q^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\cdot\left(1 + q^2 + q^4\right) = a^2\cdot\left(q + q^2 + q^3\right) \; /:a^2 \Rightarrow 1 + q^2 + q^4 = q + q^2 + q^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + q^2 + q^4 = q + q^2 + q^3 \Rightarrow 1 + q^4 = q + q^3 \Rightarrow 1 + q^4 - q - q^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^4 - q^3 - q + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow \left(q^4 - q^3\right) + (-q + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3\cdot(q-1) - (q-1) = 0 \Rightarrow (q-1)\cdot\left(q^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q - 1 = 0 \\ q^3 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = 1 \\ q^3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = 1 \\ q^3 = 1 \; /\sqrt[3]{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \sqrt[3]{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = 1 \\ q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow q = 1.$$

Duljine bridova su:

$$\left.\begin{array}{l} a = a \\ b = a\cdot q \\ c = a\cdot q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow [q = 1] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = a \\ b = a\cdot 1 \\ c = a\cdot 1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = a \\ b = a \\ c = a \end{array}\right\}.$$

Riječ je o kocki čija duljina brida iznosi:

$$6^2 = a^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow 36 = 3\cdot a^2 \Rightarrow 3\cdot a^2 = 36 \Rightarrow 3\cdot a^2 = 36 \; /:3 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 12 \; /\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{12} \Rightarrow a = \sqrt{4\cdot 3} \Rightarrow a = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

Vježba 119

Duljine bridova pravokutnog paralelepipeda, čija je prostorna dijagonala duga 0.6 dm, a oplošje je 72 cm^2, tvore geometrijski niz. Kolike su duljine bridova?

Rezultat: $a = 2\cdot\sqrt{3}\ cm.$

Zadatak 120 (Luka, gimnazija)

Bazen ima oblik kvadra kome je dno kvadrat. Ako je volumen bazena 32 m^3 koliko moraju biti dimenzije bazena tako da površina strana bazena bude minimalna?

Rješenje 120

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n .$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^n} = a \ , \ a \ge 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi AG – nejednakost:

$$A_n \ge G_n \quad , \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ge n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Znak jednakosti vrijedi ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \quad , \quad (f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

1.inačica

Neka je:

- a duljina brida dna bazena (kvadrata)
- b visina bazena
- P površina strana bazena, $P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b$
- V volumen bazena, $V = a^2 \cdot b$.

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} V = a^2 \cdot b \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 \cdot b = V \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 \cdot b = V \;/\cdot \frac{1}{a^2} \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = \frac{V}{a^2} \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [V = 32] \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot \frac{32}{a} \Rightarrow P = a^2 + \frac{128}{a}.$$

Primijenimo AG – nejednakost!

$$P = a^2 + \frac{128}{a} \Rightarrow P = a^2 + \frac{64}{a} + \frac{64}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{64}{a} \cdot \frac{64}{a}} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{64}{a} \cdot \frac{64}{a}} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{64 \cdot 64} = 3 \cdot \sqrt[3]{4^3 \cdot 4^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{(4 \cdot 4)^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{16^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{16^3} = 3 \cdot 16 = 48.$$

Jednakost aritmetičke i geometrijske sredine, tj. minimum vrijedi ako su svi članovi međusobno jednaki.

$$a^2 = \frac{64}{a} \Rightarrow a^2 = \frac{64}{a} \; / \cdot a \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \; / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} \Rightarrow a = 4 \; m.$$

Računamo b.

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \;\; , \;\; V = 32 \\ b = \frac{V}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow b = \frac{32}{4^2} \Rightarrow b = \frac{32}{16} \Rightarrow b = \frac{32}{16} \Rightarrow b = 2 \; m.$$

2.inačica

Neka je:

- a duljina brida dna bazena (kvadrata)
- b visina bazena
- P površina strana bazena, $P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b$
- V volumen bazena, $V = a^2 \cdot b$.

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} V = a^2 \cdot b \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 \cdot b = V \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 \cdot b = V \; / \cdot \frac{1}{a^2} \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = \frac{V}{a^2} \\ P = a^2 + 4 \cdot a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [V = 32] \Rightarrow P = a^2 + 4 \cdot \frac{32}{a} \Rightarrow P = a^2 + \frac{128}{a}.$$

Promatramo funkciju $P = a^2 + \frac{128}{a}$ i njezinu minimalnu vrijednost.

Potrebno je odrediti vrijednost od a za koji P(a) ima najmanju vrijednost. Slijedi:

$$P(a) = a^2 + \frac{128}{a} \Rightarrow P'(a) = \left(a^2 + \frac{128}{a}\right)' \Rightarrow P'(a) = \left(a^2\right)' + \left(\frac{128}{a}\right)' \Rightarrow P'(a) = 2 \cdot a - \frac{128}{a^2}.$$

Iz

$$P'(a) = 0,$$

to jest

$$2 \cdot a - \frac{128}{a^2} = 0$$

dobivamo stacionarne točke.

$$2 \cdot a - \frac{128}{a^2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot a - \frac{128}{a^2} = 0 \; / \cdot a^2 \Rightarrow 2 \cdot a^3 - 128 = 0 \Rightarrow 2 \cdot a^3 = 128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^3 = 128 \; / : 2 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} \Rightarrow a = 4 \; m.$$

Računamo $P''(a)$.

$$P''(a) = \left(2 \cdot a - \frac{128}{a^2}\right)' \Rightarrow P''(a) = (2 \cdot a)' - \left(\frac{128}{a^2}\right)' \Rightarrow P''(a) = 2 \cdot a' - \left(-\frac{256}{a^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(a) = 2 \cdot 1 + \frac{256}{a^3} \Rightarrow P''(a) = 2 + \frac{256}{a^3}.$$

Iz

$$P''(a) = 2 + \frac{256}{a^3}$$

dobije se:

$$P''(a) = 2 + \frac{256}{a^3} \Rightarrow [\, a = 4 \,] \Rightarrow P''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} \Rightarrow P''(4) = 2 + \frac{256}{64} \Rightarrow P''(4) = 2 + \frac{256}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(4) = 2 + 4 \Rightarrow P''(4) = 6 > 0.$$

Budući da je

$$P''(4) = 6 > 0,$$

znači da funkcija P (površina strana bazena) ima minimalnu vrijednost za a = 4 m.
Računamo b.

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \;\; , \;\; V = 32 \\ b = \frac{V}{a^2} \end{array} \right\} \Rightarrow b = \frac{32}{4^2} \Rightarrow b = \frac{32}{16} \Rightarrow b = \frac{32}{16} \Rightarrow b = 2 \; m.$$

Vježba 120

Odmor!

Rezultat: …