Zadatak 081 (Katarina, srednja škola)

Ako se brid kocke uveća za 0.8 cm oplošje se uveća za 24.96 cm^2. Koliki je brid manje kocke?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je oplošje:

$$O = 6 \cdot a^2.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a - n = b \quad , \quad a = b + n \quad , \quad a - b = n.$$

Neka je a duljina brida manje kocke. Ako se njezin brid uveća za 0.8 duljina brida veće kocke bit će

$$a + 0.8.$$

Tada oplošja iznose:

- manja kocka $O = 6 \cdot a^2$
- veća kocka $O_1 = 6 \cdot (a + 0.8)^2$.

Budući da je oplošje veće kocke za 24.96 cm^2 veće od oplošja manje kocke, vrijedi:

$$O_1 = O + 24.96 \Rightarrow 6 \cdot (a + 0.8)^2 = 6 \cdot a^2 + 24.96 \Rightarrow 6 \cdot (a + 0.8)^2 = 6 \cdot a^2 + 24.96 \; /:6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + 0.8)^2 = a^2 + 4.16 \Rightarrow a^2 + 1.6 \cdot a + 0.64 = a^2 + 4.16 \Rightarrow a^2 + 1.6 \cdot a + 0.64 = a^2 + 4.16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.6 \cdot a + 0.64 = 4.16 \Rightarrow 1.6 \cdot a = 4.16 - 0.64 \Rightarrow 1.6 \cdot a = 3.52 \Rightarrow 1.6 \cdot a = 3.52 \; /:1.6 \Rightarrow a = 2.2.$$

Duljina brida manje kocke je 2.2 cm.

Vježba 081

Ako se brid kocke umanji za 0.8 cm oplošje se umanji za 24.96 cm^2. Koliki je brid veće kocke?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 082 (Tony, srednja škola)

Blok debljine 6.5 mm sastoji se od 100 listova papira dimenzija 21.5 cm x 29.7 cm. Gustoća papira ρ je 1.20 g/cm^3. Kolika je masa jednoga lista papira u tome bloku?

(Napomena: $\rho = \frac{m}{V}$, $\rho -$ *gustoća* , $m -$ *masa* , $V -$ *obujam, volumen.*)

$$A.\ 3.46\ g \qquad B.\ 4.98\ g \qquad C.\ 5.32\ g \qquad D.\ 6.39\ g$$

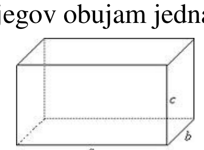
Rješenje 082

Ponovimo!

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra. Obujam kvadra izračunava se po formuli:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Budući da blok papira ima oblik kvadra njegov obujam jednak je:



$$\left.\begin{array}{l} a = 6.5\ mm \\ b = 21.5\ cm \\ c = 29.7\ cm \\ V = a \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0.65\ cm \\ b = 21.5\ cm \\ c = 29.7\ cm \\ V = a \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow V = 0.65\ cm \cdot 21.5\ cm \cdot 29.7\ cm \Rightarrow V = 415.1\ cm^3.$$

Masa bloka papira iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \rho = 1.20\ \frac{g}{cm^3} \\ V = 415.1\ cm^3 \\ \rho = \frac{m}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \rho = 1.20\ \frac{g}{cm^3} \\ V = 415.1\ cm^3 \\ \rho = \frac{m}{V}\ \ / \cdot V \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \rho = 1.20\ \frac{g}{cm^3} \\ V = 415.1\ cm^3 \\ m = \rho \cdot V \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 1.20\ \frac{g}{cm^3} \cdot 415.1\ cm^3 \Rightarrow m = 498.1\ g.$$

Blok se sastoji od 100 listova papira pa jedan list ima masu 100 puta manju:

$$m_1 = \frac{m}{100} \Rightarrow m_1 = \frac{498.1}{100} \Rightarrow m_1 \approx 4.98\ g.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 082

Blok debljine 6.5 mm sastoji se od 100 listova papira dimenzija 2.15 dm x 2.97 dm. Gustoća papira ρ je 1.20 g/cm^3. Kolika je masa jednog lista papira u tome bloku?

(Napomena: $\rho = \frac{m}{V}$, $\rho - gusto\acute{c}a$, $m - masa$, $V - obujam,\ volumen.$)

$A.\ 3.46\ g$ $\quad B.\ 4.98\ g$ $\quad C.\ 5.32\ g$ $\quad D.\ 6.39\ g$

Rezultat: B.

Zadatak 083 (Deborah, gimnazija)

Osnovka prizme je pravokutan trokut s katetama duljina 6 cm i 8 cm. Pobočka nad hipotenuzom okomita je na ravninu osnovke i ima ploštinu 200 cm^2. Koliki je obujam prizme?

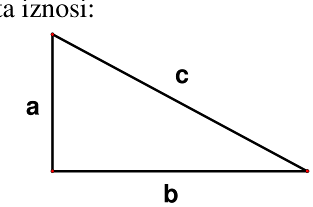
Rješenje 083

Ponovimo!

Pitagorin poučak

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

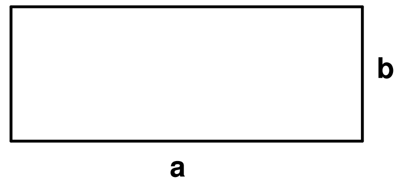
Ploština pravokutnog trokuta iznosi:



$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik.

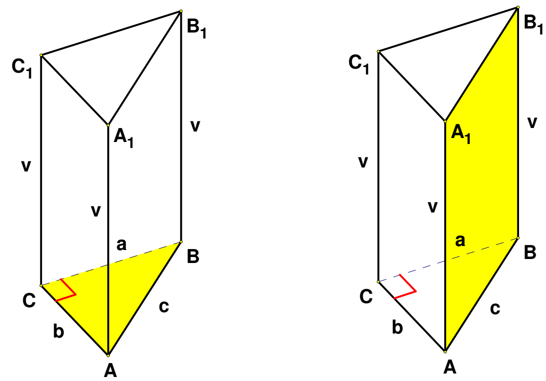
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



$P = a \cdot b$

Obujam (volumen) prizme s bazom (osnovkom) ploštine B i visinom v iznosi:

$$V = B \cdot v.$$



Sa slika vidi se:

$$|AB| = c \ , \ |BC| = a = 8 \ , \ |CA| = b = 6 \ , \ |AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = v$$

Budući da je osnovka prizme $ABCA_1B_1C_1$ pravokutan trokut ABC s katetama duljina a = 8 i b = 6, njegovu hipotenuzu izračunat ćemo pomoću Pitagorina poučka.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow c^2 = 64 + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c^2 = 100 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10.$$

Pobočka nad hipotenuzom c je pravokutnik ABB_1A_1 pa za njegovu ploštinu vrijedi:

$$\left. \begin{matrix} P = 200 \ , \ c = 10 \\ P = c \cdot v \end{matrix} \right\} \Rightarrow 200 = 10 \cdot v \Rightarrow 10 \cdot v = 200 \Rightarrow 10 \cdot v = 200 \ /:10 \Rightarrow v = 20.$$

Osnovka prizme $ABCA_1B_1C_1$ je pravokutan trokut ABC pa njezin obujam iznosi:

$$\left. \begin{matrix} B = \dfrac{a \cdot b}{2} \\ V = B \cdot v \end{matrix} \right\} \Rightarrow V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot v \Rightarrow V = \frac{8 \ cm \cdot 6 \ cm}{2} \cdot 20 \ cm \Rightarrow V = 480 \ cm^3.$$

Vježba 083

Osnovka prizme je pravokutan trokut s katetama duljina 6 cm i 8 cm. Pobočka nad hipotenuzom okomita je na ravninu osnovke i ima ploštinu 400 cm^2. Koliki je obujam prizme?

Rezultat: 960 cm^3.

Zadatak 084 (Ines, gimnazija)

Koliko je oplošje pravilne uspravne trostrane piramide (tetraedra) kojoj su svi bridovi duljine 3 cm?

$A. \ \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2} \ cm^2 \qquad B. \ 9 \cdot \sqrt{3} \ cm^2 \qquad C. \ \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{4} \ cm^2 \qquad D. \ 27 \cdot \sqrt{3} \ cm^2$

Rješenje 084

Ponovimo!

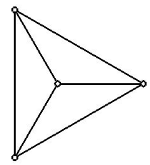
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine. Njegova ploština računa se formulom

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Oplošje piramide računa se po formuli

$$O=B+P,$$

gdje je B ploština baze, a P ploština plašta.



Pravilna uspravna trostrana piramida (tetraedar) je geometrijsko tijelo koje se sastoji od četiri jednakostranična trokuta pa se njezino oplošje računa formulom

$$O=4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow O=a^2\cdot\sqrt{3},$$

gdje je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta.
Računamo oplošje tetraedra:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ cm \\ O=a^2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow O=(3\ cm)^2\cdot\sqrt{3} \Rightarrow O=9\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 084

Koliko je oplošje pravilne uspravne trostrane piramide (tetraedra) kojoj su svi bridovi duljine 5 cm?

$A.\ \frac{25\cdot\sqrt{3}}{2}\ cm^2 \qquad B.\ 20\cdot\sqrt{3}\ cm^2 \qquad C.\ \frac{25\cdot\sqrt{3}}{4}\ cm^2 \qquad D.\ 25\cdot\sqrt{3}\ cm^2$

Rezultat: D.

Zadatak 085 (Marija, srednja škola)

Osnovni bridovi trostrane prizme su 13 cm, 14 cm i 15 cm. Volumen prizme je 840 cm^3. Izračunaj oplošje prizme.

Rješenje 085

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^{2\cdot n}}=a^n \ , \ a\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke.
Obujam (volumen) prizme s bazom (osnovkom) ploštine B i visinom v iznosi:

$$V=B\cdot v.$$

Oplošje prizme izračunava se po formuli

$$O=2\cdot B+P,$$

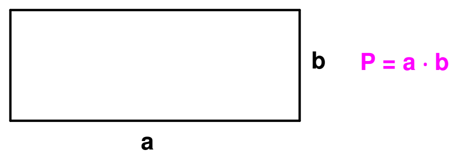
gdje je B ploština osnovke, a P ploština pobočja.
Heronova formula
Ploština trokuta ABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c glasi

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

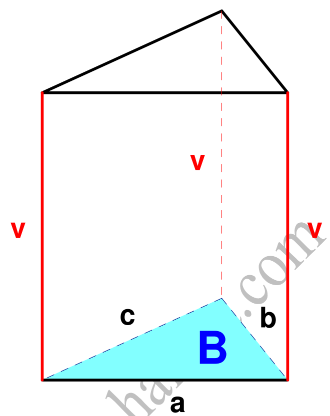
gdje je s poluopseg trokuta

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



Ploštinu osnovke trostrane prizme izračunat ćemo pomoću Heronove formule.



$$\left.\begin{array}{l} a=13\ cm\ ,\ b=14\ cm\ ,\ c=15\ cm \\ s=\dfrac{a+b+c}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=\dfrac{13\ cm+14\ cm+15\ cm}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=\dfrac{42\ cm}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=21\ cm \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{21\ cm\cdot(21\ cm-13\ cm)\cdot(21\ cm-14\ cm)\cdot(21\ cm-15\ cm)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{21\ cm\cdot 8\ cm\cdot 7\ cm\cdot 6\ cm}\Rightarrow B=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\ cm^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{3^1\cdot 7^1\cdot 2^3\cdot 7^1\cdot 2^1\cdot 3^1\ cm^4}\Rightarrow B=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2\ cm^4}\Rightarrow B=2^2\cdot 3\cdot 7\ cm^2\Rightarrow B=84\ cm^2.$$

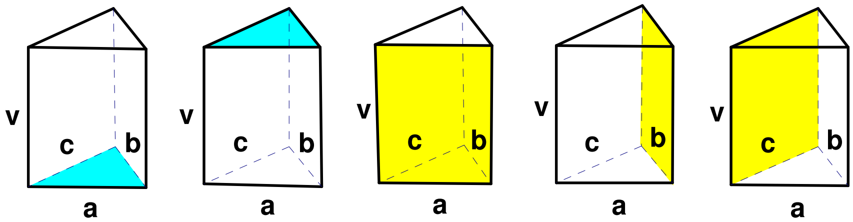
Iz obujma izračunamo visinu v prizme.

$$V=B\cdot v\Rightarrow V=B\cdot v\ /\cdot\frac{1}{B}\Rightarrow v=\frac{V}{B}\Rightarrow v=\frac{840\ cm^3}{84\ cm^2}\Rightarrow v=10\ cm.$$

Budući da su osnovke dva sukladna trokuta, a pobočje se sastoji od tri pravokutnika, oplošje prizme iznosi:

$$O=2\cdot B+P\Rightarrow O=2\cdot B+a\cdot v+b\cdot v+c\cdot v\Rightarrow O=2\cdot B+(a+b+c)\cdot v\Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot 84\ cm^2 + (13\ cm + 14\ cm + 15\ cm) \cdot 10\ cm \Rightarrow O = 168\ cm^2 + 420\ cm^2 \Rightarrow O = 588\ cm^2.$$



Vježba 085

Osnovni bridovi trostrane prizme su 1.3 dm, 1.4 dm i 1.5 dm. Volumen prizme je 840 cm^3. Izračunaj oplošje prizme.

Rezultat: 588 cm^2.

Zadatak 086 (Capo, tehnička škola)

Koliko puta će se povećati oplošje kocke ako se duljina njezinog brida poveća x puta?

Rješenje 086

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je oplošje:

$$O = 6 \cdot a^2.$$

Kako zapisati da je broj b "n puta veći" od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

1.inačica

Iz formule za oplošje kocke

$$O = 6 \cdot a^2$$

vidi se da je oplošje razmjerno (proporcionalno) s kvadratom duljine brida kocke.

$$O = 6 \cdot a^2 \Rightarrow O = 6 \cdot a^2 \Rightarrow O \sim a^2.$$

Ako se duljina brida kocke poveća x puta, oplošje će se povećati x^2 puta.

2.inačica

Neka je a duljina brida manje kocke. Ako se njezin brid poveća x puta, duljina brida veće kocke bit će

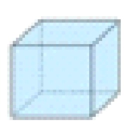
$$b = x \cdot a.$$

Tada oplošja iznose:

- manje kocke $O = 6 \cdot a^2$
- veće kocke $O_1 = 6 \cdot b^2 \Rightarrow O_1 = 6 \cdot (x \cdot a)^2 \Rightarrow O_1 = 6 \cdot x^2 \cdot a^2.$

Računamo omjer oplošja veće i manje kocke.

$$\frac{O_1}{O} = \frac{6 \cdot x^2 \cdot a^2}{6 \cdot a^2} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{6 \cdot x^2 \cdot a^2}{6 \cdot a^2} \Rightarrow \frac{O_1}{O} = x^2 \Rightarrow \frac{O_1}{O} = x^2 \ / \cdot O \Rightarrow O_1 = x^2 \cdot O.$$



n

$$O_1 = n^2 \cdot O$$

1

Vježba 086

Koliko puta će se povećati oplošje kocke ako se duljina njezinog brida poveća 5 puta?

Rezultat: 25 puta.

Zadatak 087 (Mario, elektrotehnička škola)

Osnovnim bridom kocke položena je ravnina koja kocku dijeli na dijelove čiji su obujmovi u omjeru 1 : 2. Kolika je ploština presjeka kocke tom ravninom, ako je duljina brida kocke jednaka a?

Rješenje 087

Ponovimo!

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0 \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

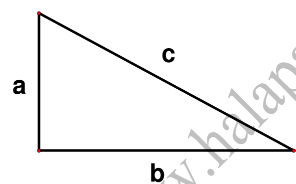
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je obujam:

$$V = a^3.$$

Pitagorin poučak

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

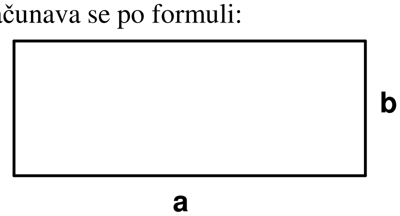
Ploština pravokutnog trokuta iznosi:



$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik.

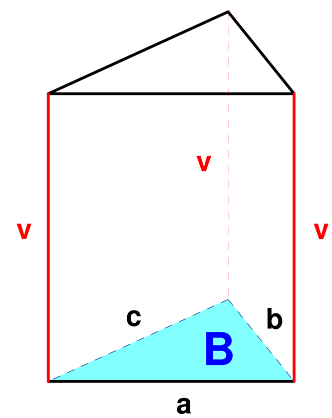
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



$$P = a \cdot b$$

Obujam (volumen) prizme s bazom (osnovkom) ploštine B i visinom v iznosi:

$$V = B \cdot v.$$



Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

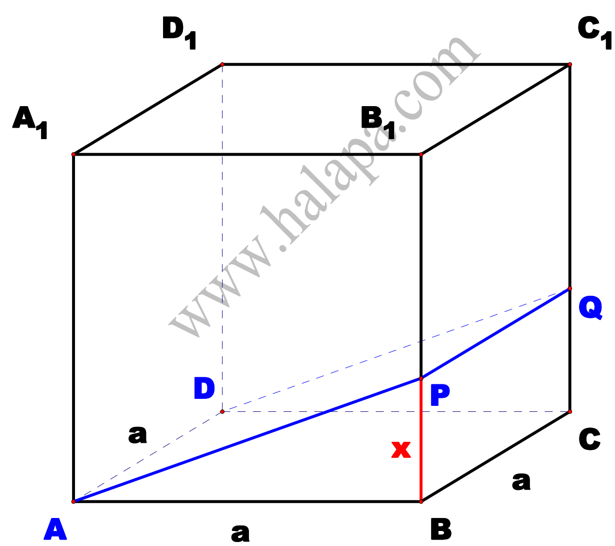
$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

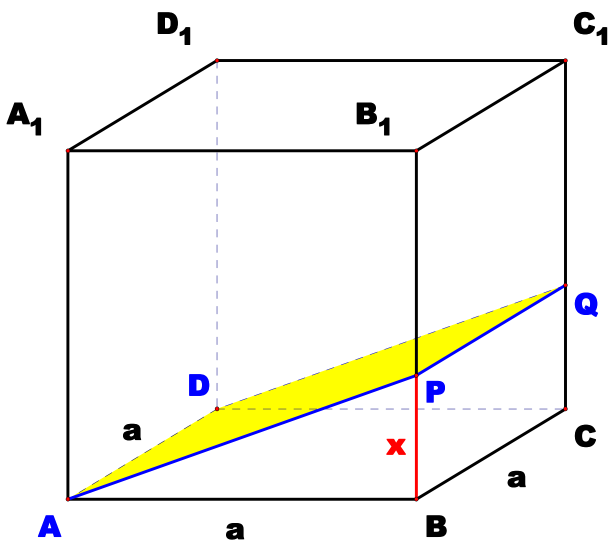
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$|AD| = |AB| = |BC| = |AA_1| = a \;\;,\;\; |BP| = x$$



Neka je ravnina položena, na primjer, bridom $\overline{AD}$ osnovke kocke i neka siječe bridove $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ respektivno u točkama P i Q ($P \in \overline{BB_1}$, $Q \in \overline{CC_1}$). Na slici vidi se da je presjek ravnine s kockom pravokutnik APQD. Uočimo pravokutan trokut ABP čija je ploština jednaka:

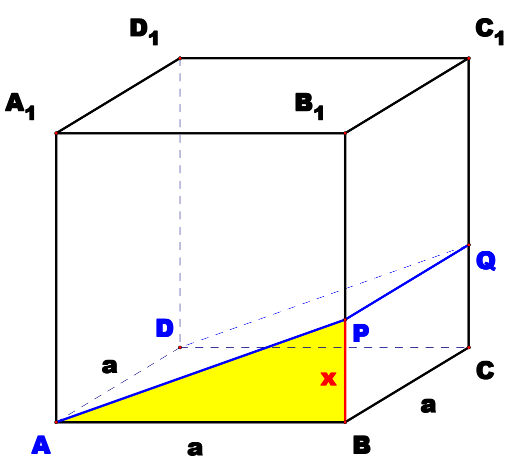
$$P_{ABP} = \frac{|AB| \cdot |BP|}{2} \Rightarrow P_{ABP} = \frac{a \cdot x}{2}.$$

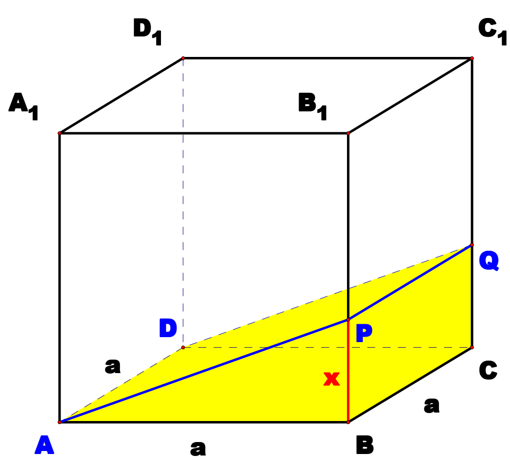
Pravokutan trokut ABP je baza trostrane prizme ABPDCQ kojoj obujam V_1 iznosi:

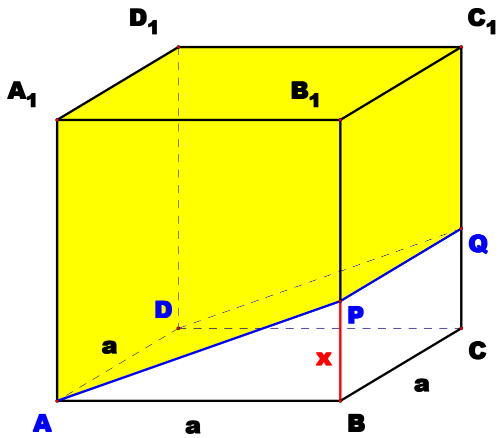
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= P_{ABP} \cdot |AD| \\ P_{ABP} &= \frac{a \cdot x}{2} \\ |AD| &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 = \frac{a \cdot x}{2} \cdot a \Rightarrow V_1 = \frac{a^2 \cdot x}{2}.$$

Volumen V_2 većeg dijela kocke dobijemo kao razliku volumena cijele kocke V i volumena manjeg dijela kocke V_1.

$$V_2 = V - V_1 \Rightarrow V_2 = a^3 - \frac{a^2 \cdot x}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{a^3}{1} - \frac{a^2 \cdot x}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x}{2}.$$







Budući da su obujmovi V_1 i V_2 u omjeru 1 : 2, slijedi:

$$V_1 : V_2 = 1 : 2 \Rightarrow V_2 = 2 \cdot V_1 \Rightarrow \frac{2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x}{2} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot x}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x}{2} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x}{2} = a^2 \cdot x \Rightarrow \frac{2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x}{2} = a^2 \cdot x \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot a^3 - a^2 \cdot x = 2 \cdot a^2 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^3 = 2 \cdot a^2 \cdot x + a^2 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot a^3 = 3 \cdot a^2 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot a^3 = 3 \cdot a^2 \cdot x \; / \cdot \frac{1}{3 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \cdot a}{3} \Rightarrow |BP| = x = \frac{2 \cdot a}{3}.$$

Sada iz pravokutnog trokuta ABP Pitagorinim poučkom dobivamo:

$$\left. \begin{array}{l} |AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 \\ |AB| = a \\ |BP| = \frac{2 \cdot a}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow |AP|^2 = a^2 + \left(\frac{2 \cdot a}{3}\right)^2 \Rightarrow |AP|^2 = a^2 + \frac{4 \cdot a^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AP|^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{4 \cdot a^2}{9} \Rightarrow |AP|^2 = \frac{9 \cdot a^2 + 4 \cdot a^2}{9} \Rightarrow |AP|^2 = \frac{13 \cdot a^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AP|^2 = \frac{13 \cdot a^2}{9} \; / \sqrt{} \Rightarrow |AP| = \sqrt{\frac{13 \cdot a^2}{9}} \Rightarrow |AP| = \frac{a \cdot \sqrt{13}}{3}.$$

Presjek kocke zadanom ravninom je pravokutnik APQD čija ploština iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} P_{APQD} = |AD| \cdot |AP| \\ |AD| = a \\ |AP| = \frac{a \cdot \sqrt{13}}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow P_{APQD} = a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{13}}{3} \Rightarrow P_{APQD} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{13}}{3}.$$

Vježba 087

Osnovnim bridom kocke položena je ravnina koja kocku dijeli na dijelove čiji su obujmovi u omjeru 1 : 3. Kolika je ploština presjeka kocke tom ravninom, ako je duljina brida kocke jednaka a?

Rezultat: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{5}}{2}.$

Zadatak 088 (Mario, elektrotehnička škola)

Duljina dijagonale kvadra veća je od duljina njegovih bridova za 1, 2, odnosno 3 cm. Kolika je duljina dijagonale?

Rješenje 088

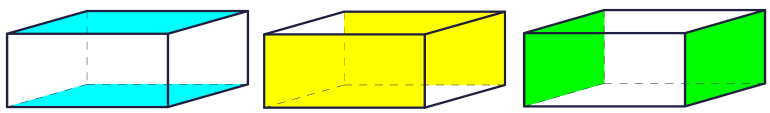
Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

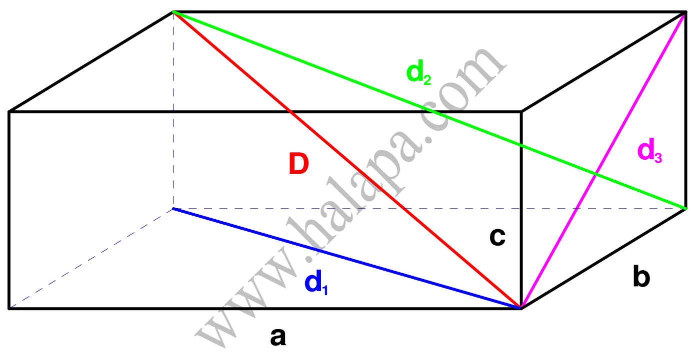
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar je omeđen s 6 pravokutnika, od kojih su dva po dva sukladna.



Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.



Duljina prostorne dijagonale kvadra izračunava se po formuli:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a - n = b \quad , \quad a = b + n \quad , \quad a - b = n.$$

Budući da je duljina dijagonale D kvadra veća od duljina njegovih bridova a, b i c za 1, 2 i 3 cm, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} D-1=a \\ D-2=b \\ D-3=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=D-1 \\ b=D-2 \\ c=D-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D^2 = a^2 + b^2 + c^2\right] \Rightarrow D^2 = (D-1)^2 + (D-2)^2 + (D-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2 = D^2 - 2 \cdot D + 1 + D^2 - 4 \cdot D + 4 + D^2 - 6 \cdot D + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2 = D^2 - 2 \cdot D + 1 + D^2 - 4 \cdot D + 4 + D^2 - 6 \cdot D + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -2 \cdot D + 1 + D^2 - 4 \cdot D + 4 + D^2 - 6 \cdot D + 9 \Rightarrow 0 = 2 \cdot D^2 - 12 \cdot D + 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot D^2 - 12 \cdot D + 14 = 0 \Rightarrow 2 \cdot D^2 - 12 \cdot D + 14 = 0 \; /:2 \Rightarrow D^2 - 6 \cdot D + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} D^2 - 6 \cdot D + 7 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -6 \;,\; c = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -6 \;,\; c = 7 \\ D_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \Rightarrow D_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} \Rightarrow D_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} \Rightarrow D_{1,2} = \frac{6 \pm 2 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow D_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(3 \pm \sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow D_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(3 \pm \sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_1 = 3 + \sqrt{2} \\ D_2 = 3 - \sqrt{2} \text{ nema smisla jer bi b i c bili negativni} \end{array}\right\} \Rightarrow D = \left(3 + \sqrt{2}\right) cm.$$

Vježba 088

Duljine bridova kvadra manje su za 1, 2, odnosno 3 cm od duljine dijagonale kvadra. Kolika je duljina dijagonale?

Rezultat: $D = \left(3 + \sqrt{2}\right) cm.$

Zadatak 089 (Tin, srednja škola)

Površine strana kvadra odnose se kao 12 : 15 : 20. Koliki je obujam kvadra, ako mu je oplošje 94 dm^2?

Rješenje 089

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

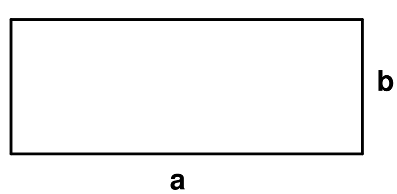
Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar je omeđen s 6 pravokutnika, od kojih su dva po dva sukladna.
Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Oplošje kvadra računa se formulom

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Obujam kvadra računa se formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik.
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



P = a · b

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

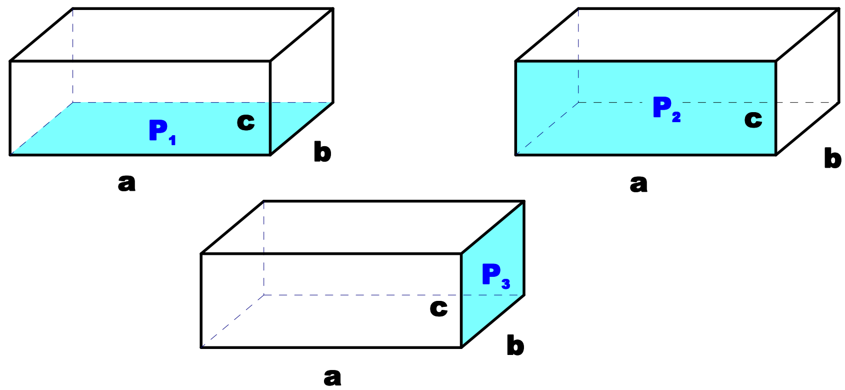
Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$

$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$



Uočimo da su ploštine strana kvadra:

$$P_1 = a \cdot b \quad , \quad P_2 = a \cdot c \quad , \quad P_3 = b \cdot c.$$

Tada vrijedi:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 12 : 15 : 20 \Rightarrow (a \cdot b) : (a \cdot c) : (b \cdot c) = 12 : 15 : 20 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 12 \cdot k \\ a \cdot c = 15 \cdot k \\ b \cdot c = 20 \cdot k \end{array}\right\}.$$

Budući da je zadano oplošje kvadra, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} O = 94 \\ a \cdot b = 12 \cdot k \\ a \cdot c = 15 \cdot k \\ b \cdot c = 20 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \right] \Rightarrow 94 = 2 \cdot (12 \cdot k + 15 \cdot k + 20 \cdot k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94 = 2 \cdot 47 \cdot k \Rightarrow 94 = 94 \cdot k \Rightarrow 94 \cdot k = 94 \Rightarrow 94 \cdot k = 94 \;/ : 94 \Rightarrow k = 1.$$

Sada je obujam kvadra jednak:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 12 \cdot k \\ a \cdot c = 15 \cdot k \\ b \cdot c = 20 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow [k = 1] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 12 \cdot 1 \\ a \cdot c = 15 \cdot 1 \\ b \cdot c = 20 \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 12 \\ a \cdot c = 15 \\ b \cdot c = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot b \cdot c = 12 \cdot 15 \cdot 20 \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 3600 \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = 3600 \;/ \sqrt{} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = \sqrt{3600} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 60 \Rightarrow V = 60 \; dm^3.$$

Vježba 089

Površine strana kvadra odnose se kao 24 : 30 : 40. Koliki je obujam kvadra, ako mu je oplošje 94 dm^2?

Rezultat: 60 dm^3.

Zadatak 090 (Tin, srednja škola)

U pravilnoj četverostranoj prizmi brid baze dva puta je veći od bočnog brida. Koliki je kut α koji prostorna dijagonala zatvara sa ravninom baze?

Rješenje 090

Ponovimo!

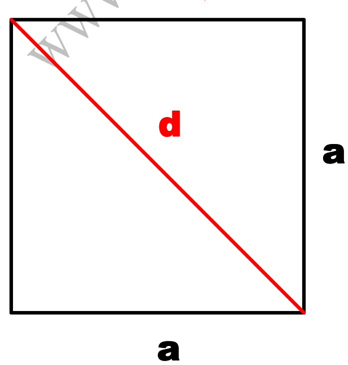
$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

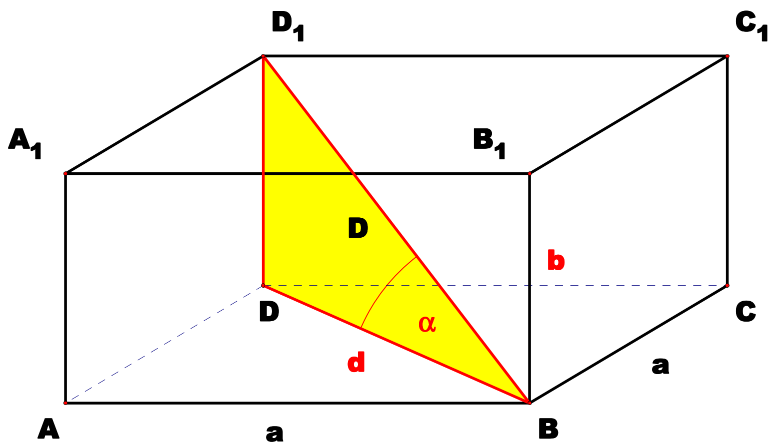
Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine katete uz taj kut.
Kvadrat je četverokut s četiri prava kuta i četiri sukladne stranice. Stranice su jednake duljine, a nasuprotne stranice su paralelne. Dijagonale su jednake, raspolavljaju se i sijeku pod pravim kutom. Dijagonala kvadrata d izračunava se po formuli

$$d = a \cdot \sqrt{2}.$$



Kako zapisati da je broj a n puta (en puta) veći od broja b?

$$\frac{a}{n} = b \quad , \quad a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$



Budući da je u pravilnoj četverostranoj prizmi brid baze dva puta veći od bočnog brida, vrijedi:

$$a = 2 \cdot b \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{2} \cdot a.$$

Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \;,\; |AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1| = b = \frac{1}{2} \cdot a$$

$$|BD| = d = a \cdot \sqrt{2}$$

Uočimo pravokutan trokut DBD_1 i pomoću funkcije tangens izračunamo kut α.

$$tg\,\alpha = \frac{|DD_1|}{|DB|} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{a \cdot \sqrt{2}} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{a \cdot \sqrt{2}} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{1}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 19^{0}\, 28'16''.$$

Vježba 090

U pravilnoj četverostranoj prizmi bočni brid dva puta je manji od brida baze. Koliki je kut α koji prostorna dijagonala zatvara sa ravninom baze?

Rezultat: 19° 28' 16".

Zadatak 091 (Tin, srednja škola)

Ravnina prolazi trima vrhovima kocke i od nje odsijeca tetraedar. Kako se odnose volumeni dobivenih tijela?

Rješenje 091

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

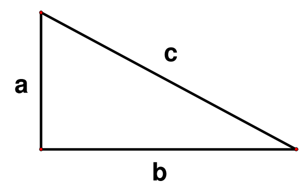
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je obujam:

$$V = a^3.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

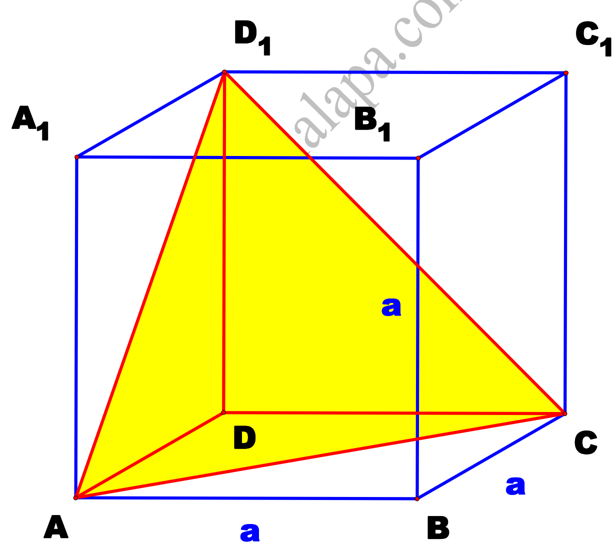


$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Obujam piramide računa se po formuli

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v,$$

gdje je B površina baze, a v visina piramide.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1| = a$$

Uočimo trostranu piramidu $ACDD_1$ čija je osnovka pravokutan trokut ACD koji ima ploštinu

$$P_{ACD} = \frac{|AD| \cdot |CD|}{2} \Rightarrow P_{ACD} = \frac{a \cdot a}{2} \Rightarrow P_{ACD} = \frac{a^2}{2}.$$

Visina piramide $ACDD_1$ je $|DD_1| = a$ pa njezin obujam iznosi:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot P_{ACD} \cdot |DD_1| \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a \Rightarrow V_1 = \frac{a^3}{6}.$$

Tada je obujam V_2 drugog dijela kocke jednak razlici obujma V kocke i obujma V_1.

$$V_2 = V - V_1 \Rightarrow V_2 = a^3 - \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_2 = \frac{a^3}{1} - \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_2 = \frac{6 \cdot a^3 - a^3}{6} \Rightarrow V_2 = \frac{5 \cdot a^3}{6}.$$

Računamo omjer obujama V_2 i V_1.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{5 \cdot a^3}{6}}{\frac{a^3}{6}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{5 \cdot a^3}{6}}{\frac{a^3}{6}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{1} \Rightarrow V_2 : V_1 = 5 : 1.$$

Ili

$$V_1 : V_2 = 1 : 5.$$

Vježba 091

Ravnina prolazi trima vrhovima kocke i od nje odsijeca tetraedar. Za koliko je obujam većeg dijela veći od obujma manjeg dijela kocke?

Rezultat: $\frac{2 \cdot a^3}{3}.$

Zadatak 092 (Tin, gimnazija)

Duljine dijagonala strana kvadra jednake su 11 cm, 19 cm i 20 cm. Kolika je duljina prostorne dijagonale kvadra?

Rješenje 092

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

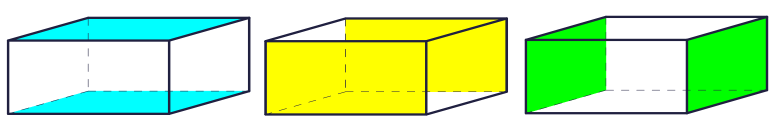
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

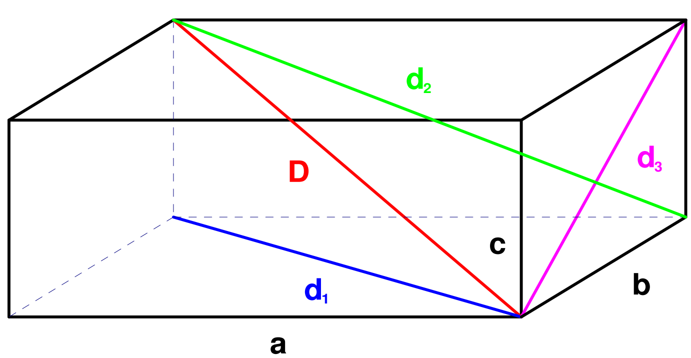
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar je omeđen s 6 pravokutnika, od kojih su dva po dva sukladna.



Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.



Duljine dijagonala strana kvadra jednake su:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad d_2^2 = a^2 + c^2 \quad , \quad d_3^2 = b^2 + c^2.$$

Duljina prostorne dijagonale kvadra izračunava se po formuli:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Računamo duljinu D prostorne dijagonale kvadra.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = d_1^2 \\ a^2 + c^2 = d_2^2 \\ b^2 + c^2 = d_3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prostorna dijagonala} \\ D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot D^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot D^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \; /:2 \Rightarrow D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2} \Rightarrow D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2} \; /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 +}{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = 20 \\ d_2 = 19 \\ d_3 = 11 \end{array}\right] \Rightarrow D = \sqrt{\frac{20^2 + 19^2 + 11^2}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{400 + 361 + 121}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{882}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{882}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{441} \Rightarrow D = 21 \; cm.$$

Vježba 092

Duljine dijagonala strana kvadra jednake su 22 cm, 38 cm i 40 cm. Kolika je duljina prostorne dijagonale kvadra?

Rezultat: 42 cm.

Zadatak 093 (Juraj, gimnazija)

Ploštine strana kvadra u međusobnom su omjeru 3 : 6 : 10. Obujam kvadra jednak je 150 cm^3. Kolike su duljine bridova kvadra?

Rješenje 093

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$a = b \Rightarrow b = a.$$

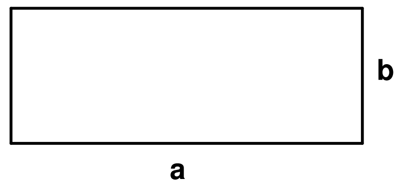
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar je omeđen s 6 pravokutnika, od kojih su dva po dva sukladna.
Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Obujam kvadra računa se formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik.
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



$$P = a \cdot b$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

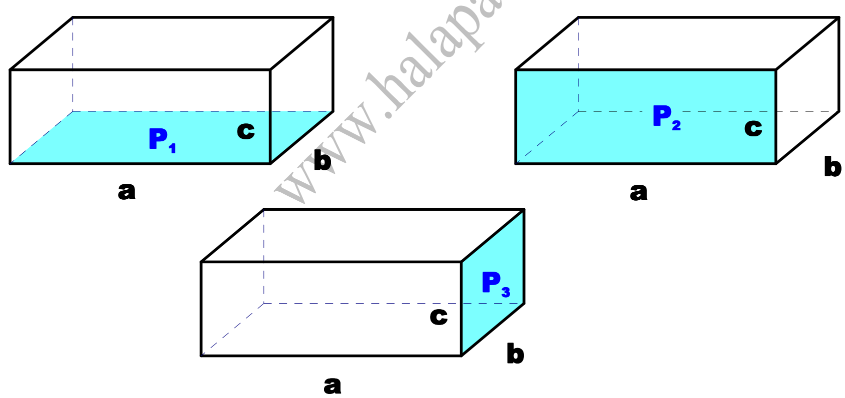
$$a : b = c : d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\dots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n.$$



Uočimo da su ploštine strana kvadra:

$$P_1 = a \cdot b \quad , \quad P_2 = a \cdot c \quad , \quad P_3 = b \cdot c.$$

Tada vrijedi:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 3 : 6 : 10 \Rightarrow (a \cdot b) : (a \cdot c) : (b \cdot c) = 3 : 6 : 10 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot b = 3 \cdot k \\ a \cdot c = 6 \cdot k \\ b \cdot c = 10 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot b \cdot c = 3 \cdot k \cdot 6 \cdot k \cdot 10 \cdot k \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 180 \cdot k^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = 180 \cdot k^3 \Rightarrow [V = a \cdot b \cdot c] \Rightarrow V^2 = 180 \cdot k^3 \Rightarrow [V = 150] \Rightarrow 150^2 = 180 \cdot k^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22500 = 180 \cdot k^3 \Rightarrow 180 \cdot k^3 = 22500 \Rightarrow 180 \cdot k^3 = 22500 \;/ : 180 \Rightarrow k^3 = 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^3 = 125 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow k = \sqrt[3]{125} \Rightarrow k = 5.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 3 \cdot k \\ a \cdot c = 6 \cdot k \\ b \cdot c = 10 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = 5 \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 3 \cdot 5 \\ a \cdot c = 6 \cdot 5 \\ b \cdot c = 10 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b = 15 \\ a \cdot c = 30 \\ b \cdot c = 50 \end{array}\right\}.$$

Budući da je zadan obujam kvadra V = 150 cm^3:

- računamo duljinu brida a

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b \cdot c = 150 \\ b \cdot c = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot c} = \frac{150}{50} \Rightarrow \frac{a \cdot \cancel{b \cdot c}}{\cancel{b \cdot c}} = \frac{150}{50} \Rightarrow a = 3$$

- računamo duljinu brida b

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 15 \\ a = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot b = 15 \Rightarrow 3 \cdot b = 15 \; /:3 \Rightarrow b = 5$$

- računamo duljinu brida c

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot c = 30 \\ a = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot c = 30 \Rightarrow 3 \cdot c = 30 \; /:3 \Rightarrow c = 10.$$

Duljine bridova kvadra su: a = 3 cm, b = 5 cm, c = 10 cm.

Vježba 093

Ploštine strana kvadra u međusobnom su omjeru 6 : 12 : 20. Obujam kvadra jednak je 150 cm^3. Kolike su duljine bridova kvadra?

Rezultat: Duljine bridova kvadra su: a = 3 cm, b = 5 cm, c = 10 cm.

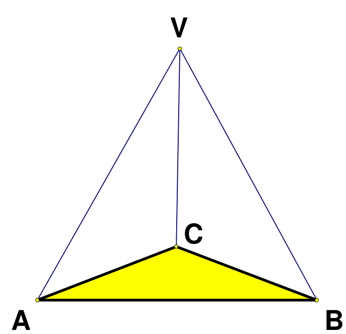
Zadatak 094 (Mona, pedagoški fakultet)

Zadani su trokut ABC i izvan ravnine u kojoj leži taj trokut čvrsta točka V. Što je unija dužina $\overline{VX}$, gdje su X pojedine točke trokuta ABC?

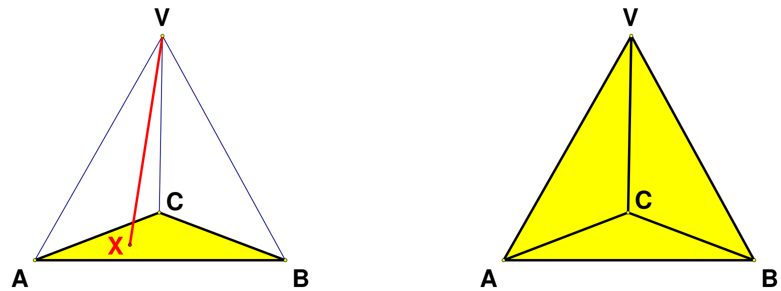
Rješenje 094

Ponovimo!

Ako zraka izlazi iz nepomične točke V i klizi po obodu ravninskog trokuta ABC opisat će u prostoru lik koji se zove trobrid. Dio prostora koji je omeđen trobridom i ravninom zadanog trokuta zove se trostrana piramida.



Ako je zadan trokut ABC i točka V izvan njega, pod trostranom piramidom se razumije unija skupa svih dužina koje spajaju točku V sa svim točkama trokuta ABC. Točka V zove se vrh piramide, a trokut ABC njezina osnovka ili baza.



Vježba 094

Zadani su četverokut ABCD i izvan ravnine u kojoj leži taj četverokut čvrsta točka V. Što je unija dužina $\overline{VX}$, gdje su X pojedine točke četverokuta ABCD?

Rezultat: Četverostrana piramida.

Zadatak 095 (Mario, tehnička škola)

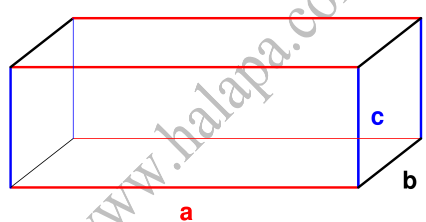
U akvarij oblika kvadra duljine 45 cm, širine 25 cm i visine 25 cm naliveno je 19 litara vode. Koliko je centimetara razina vode ispod gornjeg ruba akvarija? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$A.\ 5.6\ cm \qquad B.\ 8.1\ cm \qquad C.\ 10.3\ cm \qquad D.\ 11.9\ cm$

Rješenje 095

Ponovimo!

$$1\ L = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3.$$



Neka su a, b i c duljine bridova kvadra. Njegovi su bridovi međusobno okomiti, a obujam mu iznosi

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Formulu za obujam kvadra možemo shvatiti na još jedan način. Baza je kvadra pravokutnik sa stranicama a i b. Površina je baze

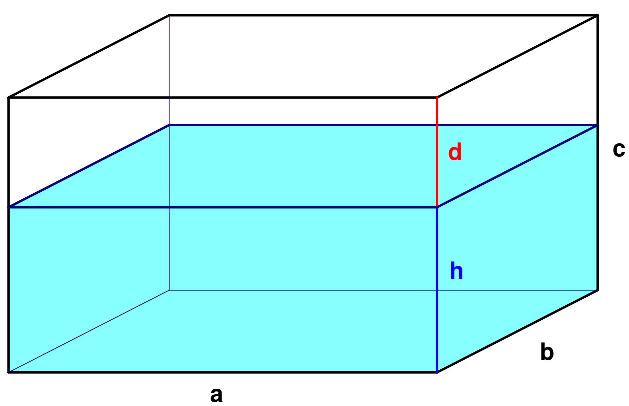
$$B = a \cdot b.$$

Obujam kvadra može se zato napisati ovako:

$$V = B \cdot c,$$

gdje je c visina kvadra.

Obujam kvadra jednak je površini baze pomnoženoj s visinom na tu bazu.



Kada je u akvarij oblika kvadra, duljine a i širine b, naliveno 19 litara vode ona će imati visinu h.

$$\left.\begin{array}{l} V = a \cdot b \cdot h \\ V = 19\ L \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b \cdot h = 19\ L \Rightarrow a \cdot b \cdot h = 19\ L \ / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow h = \frac{19\ L}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 19\ L = 19\ dm^3 = 19000\ cm^3 \\ a = 45\ cm \\ b = 25\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow h = \frac{19000\ cm^3}{45\ cm \cdot 25\ cm} \Rightarrow h = \frac{19000\ cm^3}{1125\ cm^2} \Rightarrow h = 16.9\ cm.$$

Razina vode ispod gornjeg ruba akvarija iznosi:

$$d = c - h \Rightarrow d = 25\ cm - 16.9\ cm \Rightarrow d = 8.1\ cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 095

U akvarij oblika kvadra duljine 45 cm, širine 25 cm i visine 27 cm naliveno je 19 litara vode. Koliko je centimetara razina vode ispod gornjeg ruba akvarija? (Napomena: 1 L = 1 dm^3)

$$A.\ 5.1\ cm \qquad B.\ 8.9\ cm \qquad C.\ 10.1\ cm \qquad D.\ 11.1\ cm$$

Rezultat: C.

Zadatak 096 (Mario, tehnička škola)

Ako pobočka (bočna strana) pravilne uspravne trostrane piramide s ravninom osnovke (baze) zatvara kut od 68º, koliki je kut bočnoga brida i osnovke te piramide?

$$A.\ 51^0 3'36'' \qquad B.\ 55^0 27'12'' \qquad C.\ 62^0 8'47'' \qquad D.\ 69^0 54'6''$$

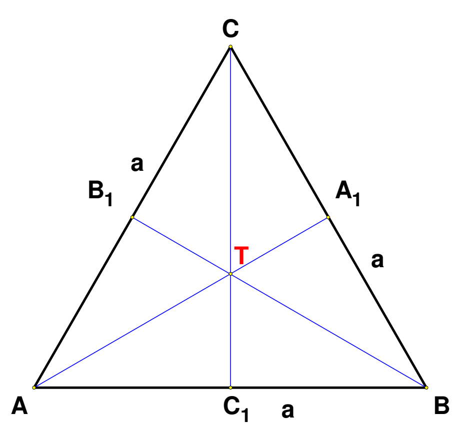
Rješenje 096

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

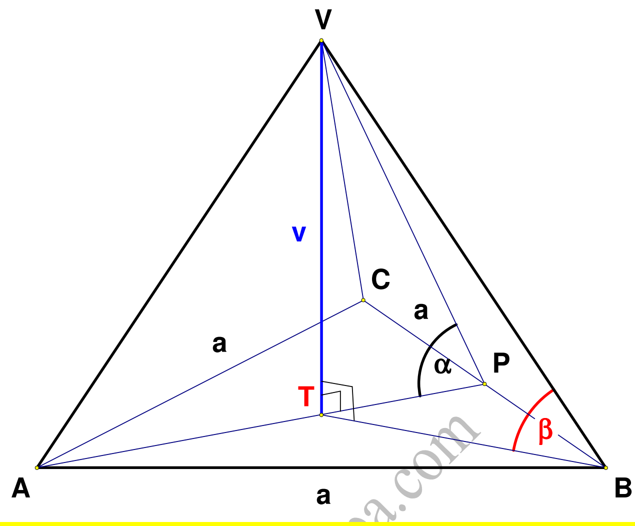
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Spojnica vrha trokuta i polovišta nasuprotne stranice zove se težišnica trokuta. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo težište trokuta. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake.



$$|AB| = |BC| = |CA| = a \quad , \quad |AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$|AT| = |BT| = |CT| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \quad , \quad |TA_1| = |TB_1| = |TC_1| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

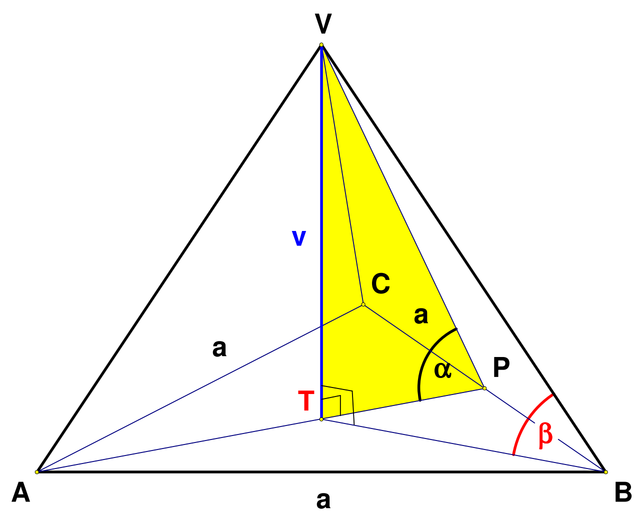
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Spojnica vrha V piramide ABCV i nožišta T okomice povučene iz tog vrha na bazu (jednakostraničan trokut ABC) zove se visina piramide ABCV. Točka T je ujedno i težište jednakostraničnog trokuta ABC.
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a \quad , \quad |VT| = v \quad , \quad |TP| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

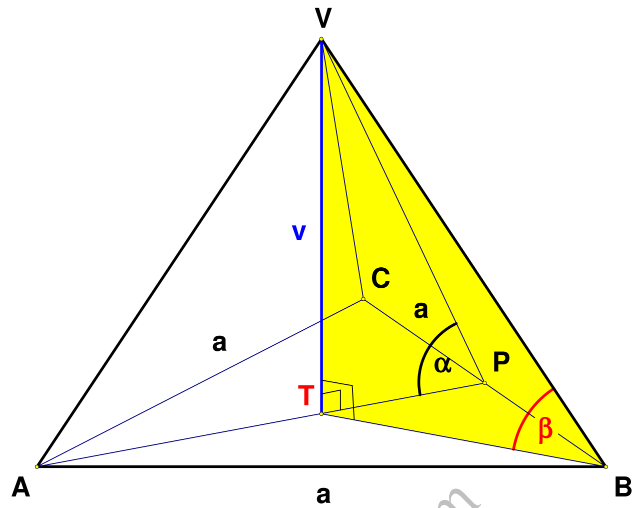
$$|TB| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \quad , \quad \angle APV = \alpha = 68^0 \quad , \quad \angle TBV = \beta$$



Uočimo pravokutan trokut VTP pa je

$$tg\,\alpha = \frac{|VT|}{|TP|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{v}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow \frac{v}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}} = tg\,\alpha \Rightarrow \frac{v}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}} = tg\,\alpha \;/\cdot \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,\alpha.$$



Uočimo pravokutan trokut VTB pa je

$$tg\,\beta = \frac{|VT|}{|TB|} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{v}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \left[\, v = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,\alpha \,\right] \Rightarrow tg\,\beta = \frac{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,\alpha}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\beta = \frac{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot tg\,\alpha}{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{2}\cdot tg\,\alpha \Rightarrow \left[\, \alpha = 68^0 \,\right] \Rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{2}\cdot tg\,68^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot tg\,68^0\right) \Rightarrow \beta = 51^0\,3'36''.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 096

Ako pobočka (bočna strana) pravilne uspravne trostrane piramide s ravninom osnovke (baze) zatvara kut od 71°, koliki je kut bočnoga brida i osnovke te piramide?

$$A.\ 52^0\,23'36'' \qquad B.\ 55^0\,26'48'' \qquad C.\ 61^0\,8'47'' \qquad D.\ 65^0\,54'6''$$

Rezultat: B.

Zadatak 097 (4A, TUPŠ)

Bazen dužine 25 m, širine 16.6 m i dubine 2 m puni se vodom brzinom od 1000 L u minuti. (Napomena: 1 dm^3 = 1 L)

1) Koliko je vremena potrebno da se bazen u potpunosti napuni?

2) Koncentracija klora u vodi je 1 mg / L. Koliko **grama** klora ima u punome bazenu?

Rješenje 097

Ponovimo!

$$1\ h = 60\ \min \quad , \quad 1\ dm^3 = 1\ L \quad , \quad 1\ m^3 = 1000\ dm^3 \quad , \quad 1\ g = 1000\ mg.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra. Obujam kvadra izračunava se po formuli:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

1) Vrijeme potrebno da se bazen u potpunosti napuni jednako je kvocijentu volumena V bazena i brzine punjenja v.

$$t = \frac{V}{v} \Rightarrow t = \frac{a \cdot b \cdot c}{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 25\ m \\ b = 16.6\ m \\ c = 2\ m \\ v = 1000\ \frac{L}{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow t = \frac{25\ m \cdot 16.6\ m \cdot 2\ m}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow t = \frac{830\ m^3}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow$$

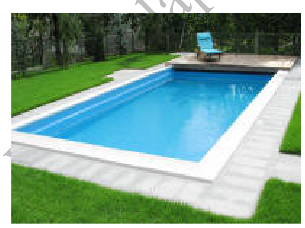
$$\Rightarrow t = \frac{830000\ dm^3}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow t = \frac{830000\ L}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow t = \frac{830000\ \frac{L}{1}}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow t = \frac{830000\ \frac{L}{1}}{1000\ \frac{L}{\min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 830\ \min \Rightarrow [830 : 60] \Rightarrow t = 13.8333333333\ h \Rightarrow t = 13\ h + 0.8333333333\ h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [0.8333333333 \cdot 60] \Rightarrow t = 13\ h + 50\ \min \Rightarrow t = 13\ h\ 50\ \min.$$

2) Koncentracija klora u vodi je 1 mg / L Znači da se u 1 L vode nalazi 1 mg klora pa će u 830000 L vode klora biti:

$$830000 \cdot 1\ mg = 830000\ mg = [830000 : 1000] = 830\ g.$$



Vježba 097

Bazen dužine 50 m, širine 8.3 m i dubine 2 m puni se vodom brzinom od 1000 L u minuti. (Napomena: 1 dm^3 = 1 L)

1) Koliko je vremena potrebno da se bazen u potpunosti napuni?

2) Koncentracija klora u vodi je 1 mg / L. Koliko **grama** klora ima u punome bazenu?

Rezultat: 13 h 50 min, 830 g.

Zadatak 098 (Vuk, srednja škola)

Izračunajte oplošje i obujam kvadra, ako su duljine bridova a = 7 cm, b = 24 cm, a duljina prostorne dijagonale $D = 5 \cdot \sqrt{26}\ cm.$

Rješenje 098

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Oplošje kvadra izračunava se po formuli:

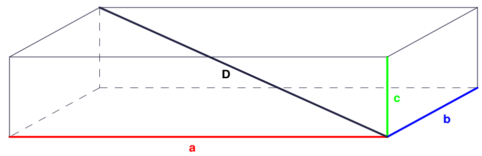
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Obujam kvadra izračunava se po formuli:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Duljina D prostorne dijagonale kvadra računa se iz formule

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



Iz formule za duljinu prostorne dijagonale kvadra izračunamo duljinu trećeg brida c.

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = D^2 \Rightarrow c^2 = D^2 - \left(a^2 + b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = D^2 - \left(a^2 + b^2\right) \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{D^2 - \left(a^2 + b^2\right)} \Rightarrow \begin{bmatrix} D = 5 \cdot \sqrt{26}\ cm \\ a = 7\ cm \\ b = 24\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\left(5 \cdot \sqrt{26}\ cm\right)^2 - \left((7\ cm)^2 + (24\ cm)^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{5^2 \cdot \left(\sqrt{26}\right)^2\ cm^2 - \left(49\ cm^2 + 576\ cm^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{25 \cdot 26\ cm^2 - 625\ cm^2} \Rightarrow c = \sqrt{650\ cm^2 - 625\ cm^2} \Rightarrow c = \sqrt{25\ cm^2} \Rightarrow c = 5\ cm.$$

Oplošje kvadra iznosi:

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 7\ cm \\ b = 24\ cm \\ c = 5\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow O = 2 \cdot (7\ cm \cdot 24\ cm + 7\ cm \cdot 5\ cm + 24\ cm \cdot 5\ cm) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot \left(168\ cm^2 + 35\ cm^2 + 120\ cm^2\right) \Rightarrow O = 2 \cdot 323\ cm^2 \Rightarrow O = 646\ cm^2.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 7\ cm \\ b = 24\ cm \\ c = 5\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow V = 7\ cm \cdot 24\ cm \cdot 5\ cm \Rightarrow V = 840\ cm^3.$$

Vježba 098

Izračunajte oplošje i obujam kvadra, ako su duljine bridova a = 70 mm, b = 2.4 dm, a duljina prostorne dijagonale $D = 5 \cdot \sqrt{26}\ cm.$

Rezultat: $O = 646\ cm^2,\ V = 840\ cm^3.$

Zadatak 099 (4A, TUPŠ)

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose a cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

Rješenje 099

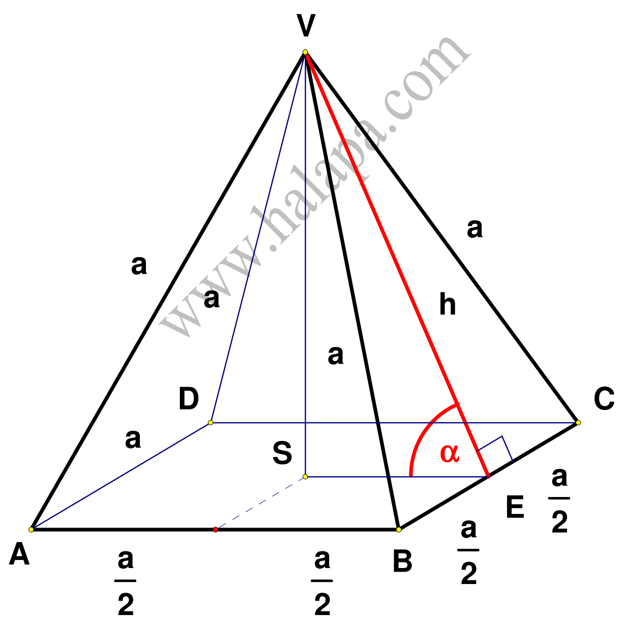
Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

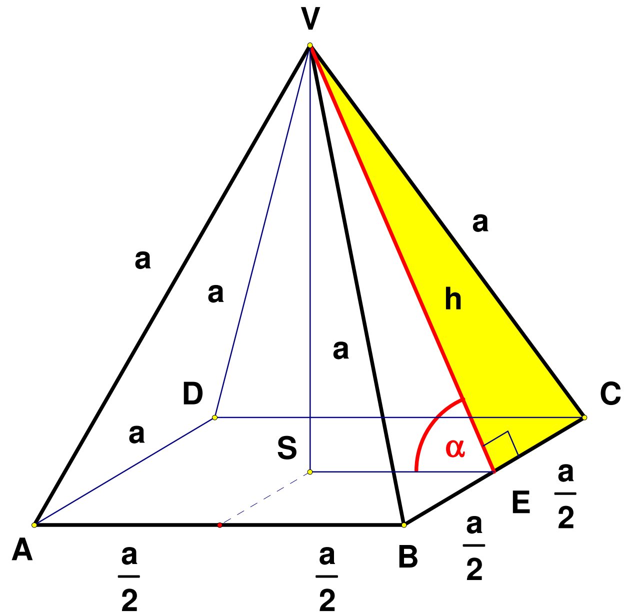
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze.
Baza pravilne četverostrane piramide je kvadrat, pobočke su četiri trokuta sa zajedničkim vrhom, a visina piramide prolazi kroz središte kvadrata. Svi su pobočni bridovi pravilne četverostrane piramide jednake duljine.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AV| = |BV| = |CV| = |DV| = a \ , \ |SE| = |EC| = \frac{a}{2}$$

$$\angle SEV = \alpha \ , \ |VE| = h$$

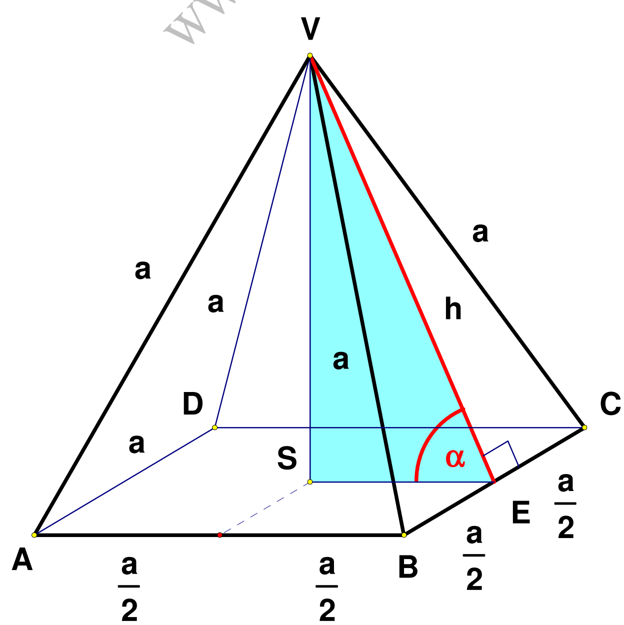


Iz pravokutnog trokuta VEC pomoću Pitagorina poučka dobije se visina h pobočke.

$$|VE|^2=|VC|^2-|EC|^2 \Rightarrow h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2=a^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2=\frac{a^2}{1}-\frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{4\cdot a^2-a^2}{4} \Rightarrow h^2=\frac{3\cdot a^2}{4} \Rightarrow h^2=\frac{3\cdot a^2}{4} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{3\cdot a^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}.$$



Uočimo pravokutan trokut VSE i uporabom funkcije kosinus izračunamo mjeru kuta α.

$$\cos\alpha = \frac{|SE|}{|VE|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 54^\circ\, 44'8''.$$

Vježba 099

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose 3 cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

Rezultat: $\alpha = 54^\circ\, 44'8''.$

Zadatak 100 (Tonka, gimnazija)

Koji se mnogokuti mogu dobiti presijecanjem kocke ravninom?

Rješenje 100

Ponovimo!

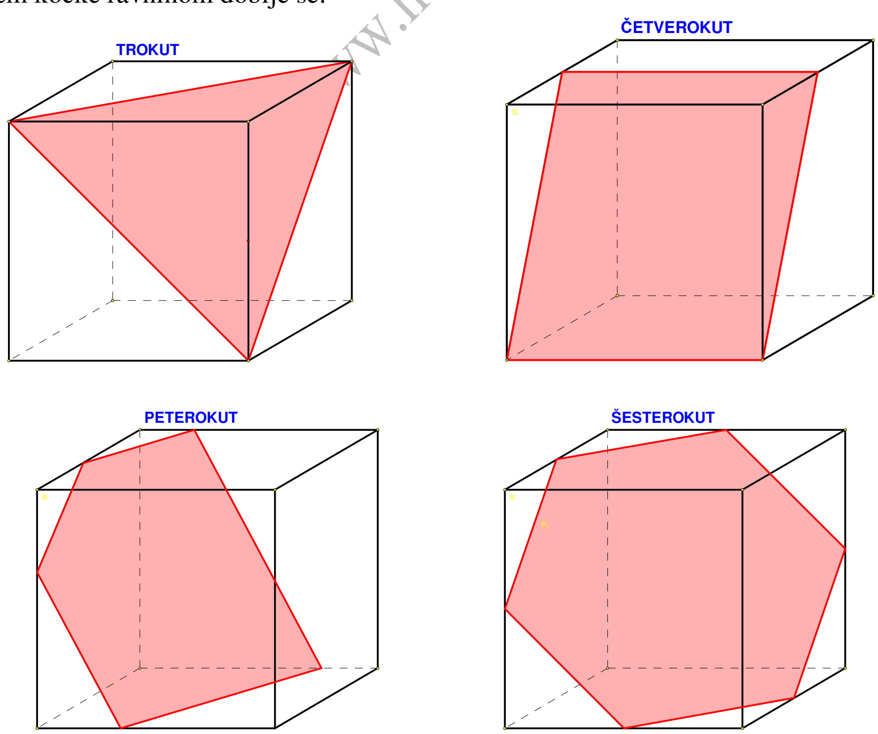
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Peterokut je dio ravnine omeđen sa pet stranica.

Šesterokut je dio ravnine omeđen sa šest stranica.

Presijecanjem kocke ravninom dobije se:



Vježba 100

Kako presijecati kocku ravninom da se dobije kvadrat?

Rezultat: