Zadatak 061 (Maturanti, HTT)

Pravilna četverostrana piramida ima sve bridove jednake duljine a = 4 cm. Nađi njezino oplošje.

Rješenje 061

Ponovimo!

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine. Njegova površina računa se formulom

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice međusobno jednake. Njegova površina računa se formulom

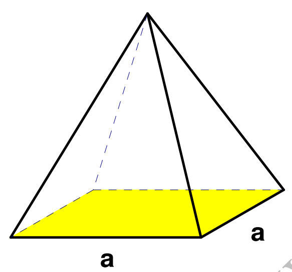
$$P=a^2.$$

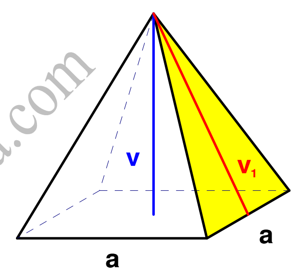
Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Oplošje piramide računa se po formuli

$$O=B+P,$$

gdje je B površina baze, a P površina plašta.

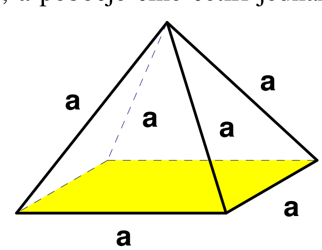
Baza pravilne četverostrane piramide je kvadrat, pobočke su četiri trokuta sa zajedničkim vrhom, a visina piramide prolazi kroz središte kvadrata. Svi su pobočni bridovi pravilne četverostrane piramide jednake duljine.





$$\left.\begin{array}{l} B=a^2 \text{ površina baze, kvadrata} \\ P=4\cdot\frac{a\cdot v_1}{2} \text{ površina četiri trokuta} \\ O=B+P \end{array}\right\} \Rightarrow O=a^2+4\cdot\frac{a\cdot v_1}{2} \Rightarrow O=a^2+2\cdot a\cdot v_1.$$

Budući da je baza piramide kvadrat, a pobočje čine četiri jednakostranična trokuta, oplošje piramide iznosi:



$$\left.\begin{array}{l} B=a^2 \\ P=4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \\ O=B+P \end{array}\right\} \Rightarrow O=a^2+4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow O=a^2+4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow O=a^2+a^2\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=a^2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow O=(4\ cm)^2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow O=16\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\ cm^2.$$

Vježba 061

Pravilna četverostrana piramida ima sve bridove jednake duljine a = 5 cm. Nađi njezino oplošje.

Rezultat: $O = 25 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \ cm^2.$

Zadatak 062 (Maturanti, HTT)

Kocka duljine brida 3 cm i uspravna četverostrana piramida imaju zajedničku osnovku i jednake volumene. Koliki je volumen dijela piramide koji se nalazi izvan kocke?

Rješenje 062

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

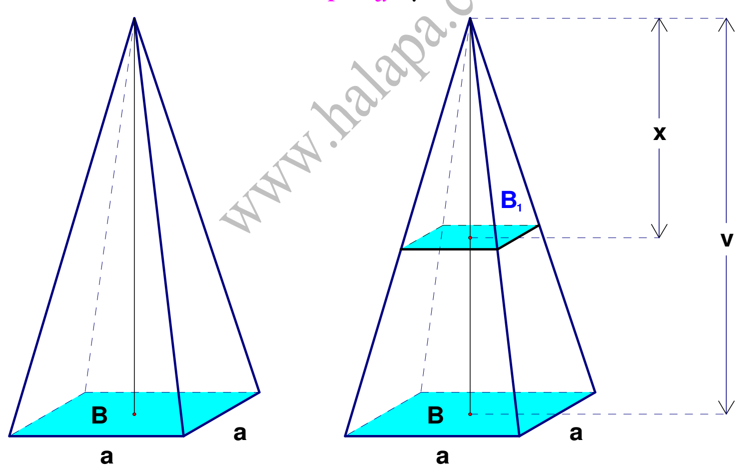
$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

Kocka (heksaedar) pravilan je poliedar. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati. Obujam kocke brida a iznosi

$$V = a^3.$$

Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice međusobno jednake. Njegova površina računa se formulom

$$P = a^2.$$



Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutima – osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Pobočke spajaju vrh piramide s bridom osnovke. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Baza je četverostrane pravilne piramide kvadrat, a visina prolazi kroz središte kvadrata. Svi su pobočni bridovi pravilne četverostrane piramide jednake duljine. Obujam pravilne četverostrane piramide računa se po formuli

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v,$$

gdje je v njezina visina.

Krnja piramida

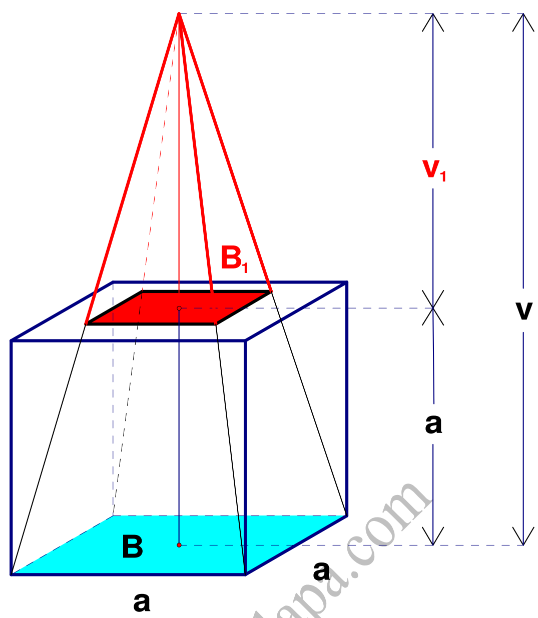
Presiječemo li piramidu ravninom paralelnom s ravninom baze, dobit ćemo dva tijela, manju piramidu s bazom B_1 i ostatak koji nazivamo krnja piramida. Baze B i B_1 slični su likovi s koeficijentom sličnosti $\frac{v}{x}$ pa vrijedi razmjer:

$$B : B_1 = v^2 : x^2.$$

Najprije izračunamo obujam kocke:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ V_k = a^3 \end{array}\right\} \Rightarrow V_k = 3^3 \Rightarrow V_k = 27.$$

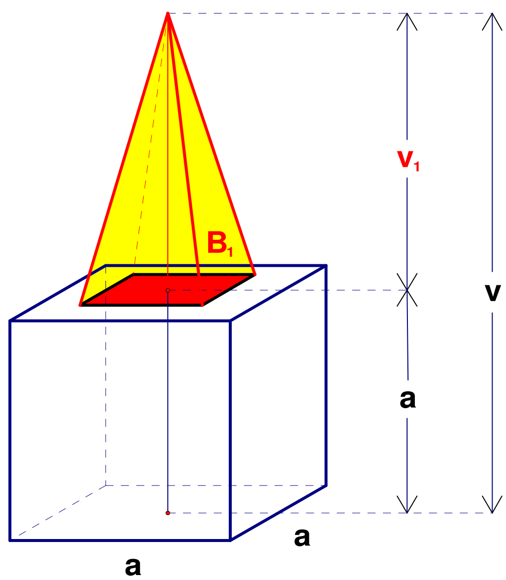
Budući da kocka i uspravna četverostrana piramida imaju jednake volumene, slijedi:

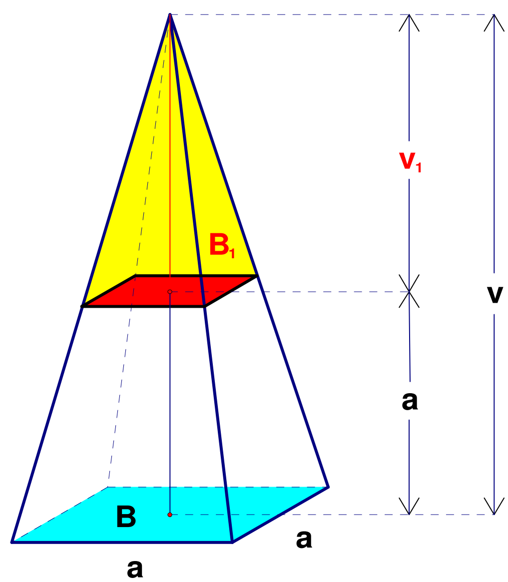


$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ V_p = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left[V_p = V_k = 27\right] \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = 27 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = 27 \;/ \cdot \frac{3}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 27 \cdot \frac{3}{a^2} \Rightarrow v = 27 \cdot \frac{3}{3^2} \Rightarrow v = 9.$$

Izračunali smo visinu v uspravne četverostrane piramide.





Sa slika vidi se da visina v_1 dijela piramide (male piramide) koja je izvan kocke iznosi:

$$\left.\begin{matrix} v = 9 \;\;,\;\; a = 3 \\ v_1 = v - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = 9 - 3 \Rightarrow v_1 = 6.$$

Uočimo krnju piramidu kojoj su B donja baza, a B_1 gornja baza. Iz poznatog razmjera dobije se površina gornje baze B_1:

$$B : B_1 = v^2 : v_1^2 \Rightarrow B_1 \cdot v^2 = B \cdot v_1^2 \Rightarrow B_1 \cdot v^2 = B \cdot v_1^2 \; / \cdot \frac{1}{v^2} \Rightarrow B_1 = B \cdot \frac{v_1^2}{v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[B = a^2 \right] \Rightarrow B_1 = a^2 \cdot \frac{v_1^2}{v^2} \Rightarrow B_1 = 3^2 \cdot \frac{6^2}{9^2} \Rightarrow B_1 = 9 \cdot \frac{36}{81} \Rightarrow B_1 = 4.$$

Konačno, obujam V_1 dijela piramide (male piramide) koji se nalazi izvan kocke ima vrijednost:

$$\left.\begin{matrix} B_1 = 4 \;\;,\;\; v_1 = 6 \\ V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot v_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow V_1 = 8 \; cm^3.$$

Vježba 062

Kocka duljine brida 3 dm i uspravna četverostrana piramida imaju zajedničku osnovku i jednake volumene. Koliki je volumen dijela piramide koji se nalazi izvan kocke?

Rezultat: 8 dm^3.

Zadatak 063 (Maturanti, HTT)

Polovište visine pravilnog tetraedra spojeno je s dva vrha osnovke. Koliko iznosi kut između tih spojnica?

Rješenje 063

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$\sqrt{a^2} = a \;\;,\;\; a \ge 0.$$

Pitagorin poučak

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

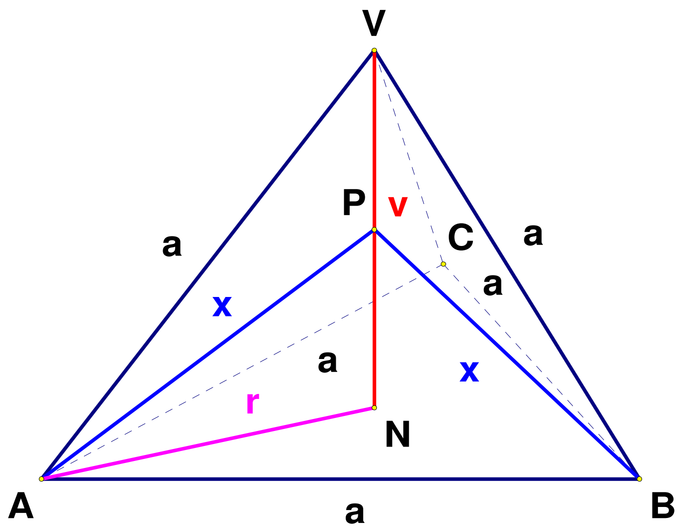
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine. Za jednakostraničan trokut simetrale kutova i stranica se poklapaju, a radijus opisane kružnice računa se po formuli

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3},$$

gdje je a duljina stranice jednakostraničnog trokuta.

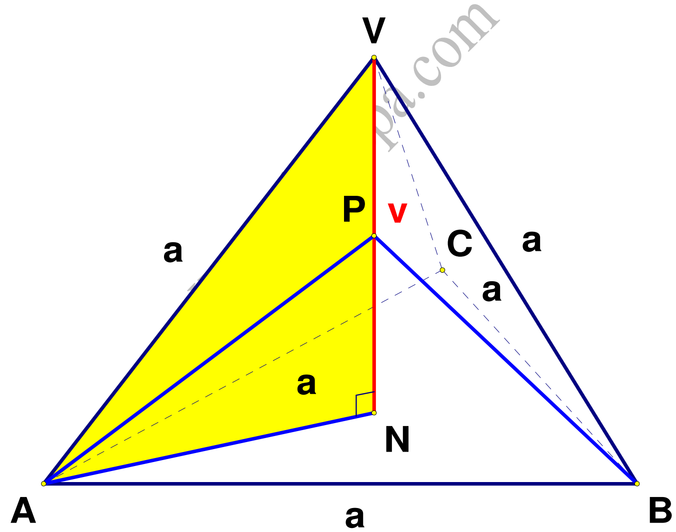
Tetraedar je geometrijsko tijelo koje ima 4 vrha, 6 bridova i 4 strane koje čine jednakostranični trokuti. Pravilni tetraedar je uspravna trostrana piramida čiji su svi bridovi jednake duljine. Nožište visine tetraedra je središte opisane kružnice bazi (jednakostraničnom trokutu).



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = |AV| = |BV| = |CV| = a.$$

$$r = |AN| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \quad , \quad x = |AP| = |BP| \quad , \quad |VN| = v \quad , \quad |NP| = \frac{1}{2} \cdot |VN| = \frac{1}{2} \cdot v$$

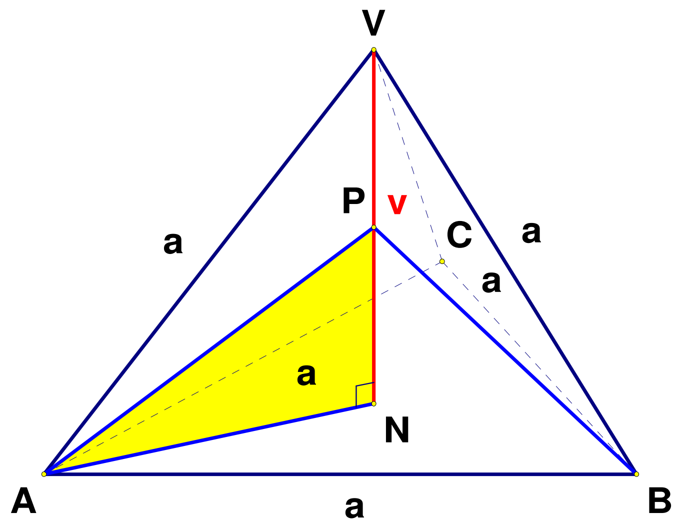


Uočimo pravokutan trokut ANV i pomoću Pitagorina poučka izračunamo visinu v tetraedra.

$$|NV|^2 = |AV|^2 - |AN|^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{3^2} \Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} \Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{3 \cdot a^2}{9} \Rightarrow v^2 = \frac{6 \cdot a^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{6 \cdot a^2}{9} \; / \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6 \cdot a^2}{9}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt{9}} \Rightarrow v = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}.$$

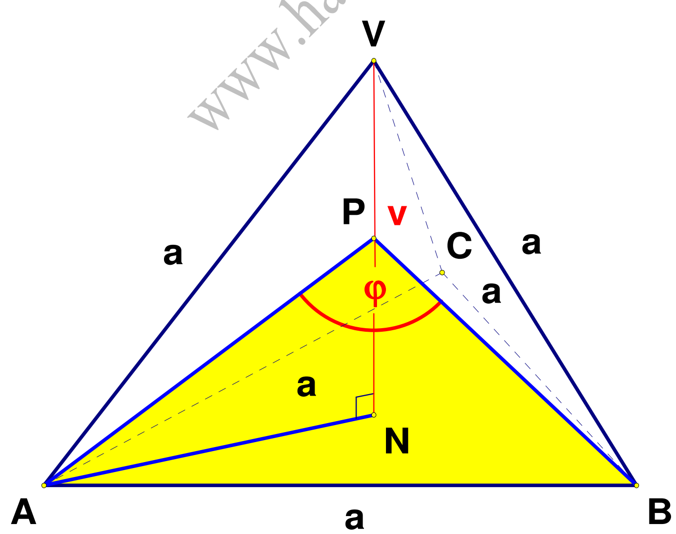


Uočimo pravokutan trokut ANP i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu x = |AP|.

$$|AP|^{2}=|AN|^{2}+|NP|^{2}\ \Rightarrow\ x^{2}=\left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^{2}+\left(\frac{a\cdot\sqrt{6}}{6}\right)^{2}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2}}{3^{2}}+\frac{a^{2}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^{2}}{6^{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}\cdot 3}{9}+\frac{a^{2}\cdot 6}{36}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}\cdot 3}{9}+\frac{a^{2}\cdot 6}{36}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}}{3}+\frac{a^{2}}{6}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{2\cdot a^{2}+a^{2}}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^{2}=\frac{3\cdot a^{2}}{6}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{3\cdot a^{2}}{6}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}}{2}\ \Rightarrow\ x^{2}=\frac{a^{2}}{2}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{a^{2}}{2}}\ \Rightarrow\ x=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Uočimo trokut ABP i pomoću kosinusovog poučka izračunamo kut φ između spojnica |AP| i |BP|.

$$|AB|^{2}=|AP|^{2}+|BP|^{2}-2\cdot|AP|\cdot|BP|\cdot\cos\varphi\ \Rightarrow\ a^{2}=x^{2}+x^{2}-2\cdot x\cdot x\cdot\cos\varphi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^{2}=2\cdot x^{2}-2\cdot x^{2}\cdot\cos\varphi\ \Rightarrow\ 2\cdot x^{2}\cdot\cos\varphi=2\cdot x^{2}-a^{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot x^{2}\cdot\cos\varphi=2\cdot x^{2}-a^{2}\ /\cdot\frac{1}{2\cdot x^{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\cdot x^2 - a^2}{2\cdot x^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2}{2\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\cdot\frac{a^2}{2} - a^2}{2\cdot\frac{a^2}{2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{a^2}{\cancel{2}} - a^2}{\cancel{2}\cdot\frac{a^2}{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{0}{a^2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ili } \varphi = 90^0.$$

Vježba 063

Izračunaj oplošje i obujam (volumen) tetraedra s bridom duljine a.

Rezultat: $O = a^2\cdot\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{12}\cdot a^3\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 064 (Ivana, gimnazija)

Duljine bridova kvadra iznose 15 cm, 12 cm i 10 cm. Koliki je kut što ga prostorna dijagonala kvadra zatvara s njegovom najmanjom stranom?

Rješenje 064

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

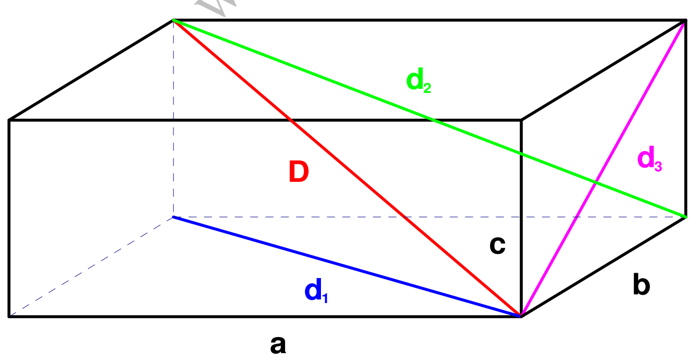
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2\cdot c\cdot a\cdot\cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\cdot c\cdot a} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cdot a\cdot b\cdot}.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.



Duljine plošnih dijagonala kvadra

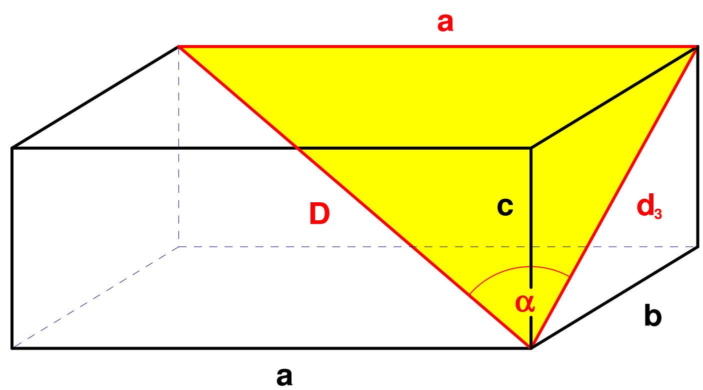
$$d_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad d_2^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

$$d_3^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Duljina prostorne dijagonale kvadra

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Računamo kut α što ga prostorna dijagonala kvadra zatvara s njegovom najmanjom stranom.



Sa slike vidi se:

$$a = 15\ cm \quad , \quad b = 12\ cm \quad , \quad c = 10\ cm \quad , \quad D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad , \quad d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Uočimo trokut čije su stranice a, D i d_3. Pomoću kosinusovog poučka dobije se kut α.

$$\cos\alpha = \frac{D^2 + d_3^2 - a^2}{2 \cdot D \cdot d_3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2 \cdot \left(b^2 + c^2\right)}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2 \cdot \left(b^2 + c^2\right)}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{12^2 + 10^2}{15^2 + 12^2 + 10^2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{144 + 100}{225 + 144 + 100}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{244}{469}} \Rightarrow \alpha = 43^0 50'21''.$$

Vježba 064

Duljine bridova kvadra iznose 1.5 dm, 1.2 dm i 1 dm. Koliki je kut što ga prostorna dijagonala kvadra zatvara s njegovom najmanjom stranom?

Rezultat: 43° 50' 21".

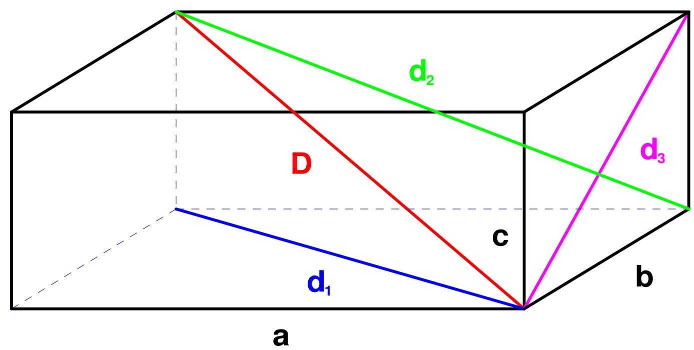
Zadatak 065 (Ivana, gimnazija)

Duljine bridova kvadra iznose 15 cm, 12 cm i 10 cm. Koliki je kut što ga najveći dijagonalni presjek kvadra zatvara s njegovom najvećom stranom?

Rješenje 065

Ponovimo!

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.



Duljine plošnih dijagonala kvadra

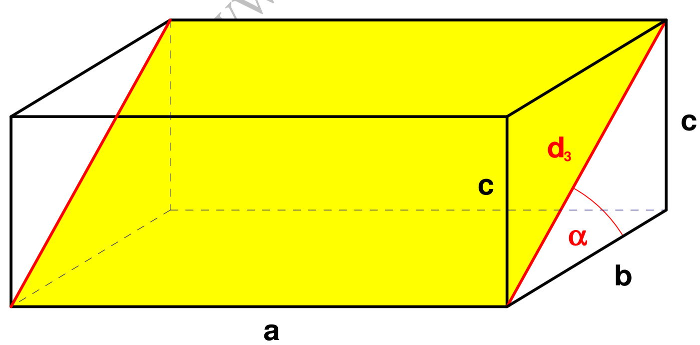
$$d_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad d_2^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

$$d_3^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Duljina prostorne dijagonale kvadra

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Računamo kut α što ga najveći dijagonalni presjek kvadra zatvara s njegovom najvećom stranom.



Sa slike vidi se:

$$a = 15\ cm \quad , \quad b = 12\ cm \quad , \quad c = 10\ cm \quad , \quad d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Uočimo pravokutan trokut čije su katete stranice b i c, a hipotenuza plošna dijagonala d_3 i izračunamo kut α.

1.inačica

$$\sin\alpha = \frac{c}{d_3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{10}{\sqrt{12^2 + 10^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{10}{\sqrt{144 + 100}} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{10}{\sqrt{244}} \Rightarrow \alpha = 39^0\, 48'20''.$$

2.inačica

$$\cos\alpha=\frac{b}{d_3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{12^2+10^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{144+100}}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{244}}\Rightarrow\alpha=39^0\,48'20''.$$

3.inačica

$$tg\,\alpha=\frac{c}{b}\Rightarrow\alpha=tg^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)\Rightarrow\alpha=tg^{-1}\left(\frac{10}{12}\right)\Rightarrow\alpha=39^0\,48'20''.$$

Vježba 065

Duljine bridova kvadra iznose 1.5 dm, 120 mm i 0.1 m. Koliki je kut što ga najveći dijagonalni presjek kvadra zatvara s njegovom najvećom stranom?

Rezultat: 39° 48' 20".

Zadatak 066 (Ivana, gimnazija)

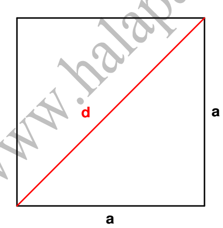
Presjek pravilne četverostrane piramide ravninom koja prolazi dijagonalom osnovke i polovištem bočnog brida jednakostraničan je trokut površine $2\cdot\sqrt{3}\ cm^2$. Koliki je obujam te piramide?

Rješenje 066

Ponovimo!

Pitagorin poučak:

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

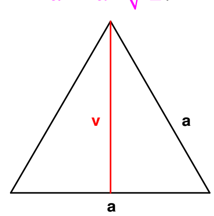


Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Ploština kvadrata izračunava se po formuli:

$$P=a^2.$$

Dijagonala d izračunava se po formuli:

$$d=a\cdot\sqrt{2}.$$



Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine. Ploština jednakostraničnog trokuta izračunava se po formuli

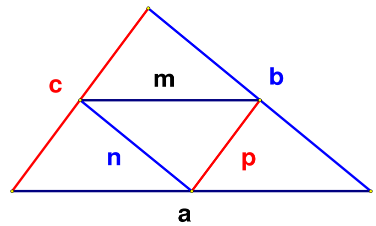
$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

Visina jednakostraničnog trokuta računa se po formuli:

$$v=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

Srednjice trokuta

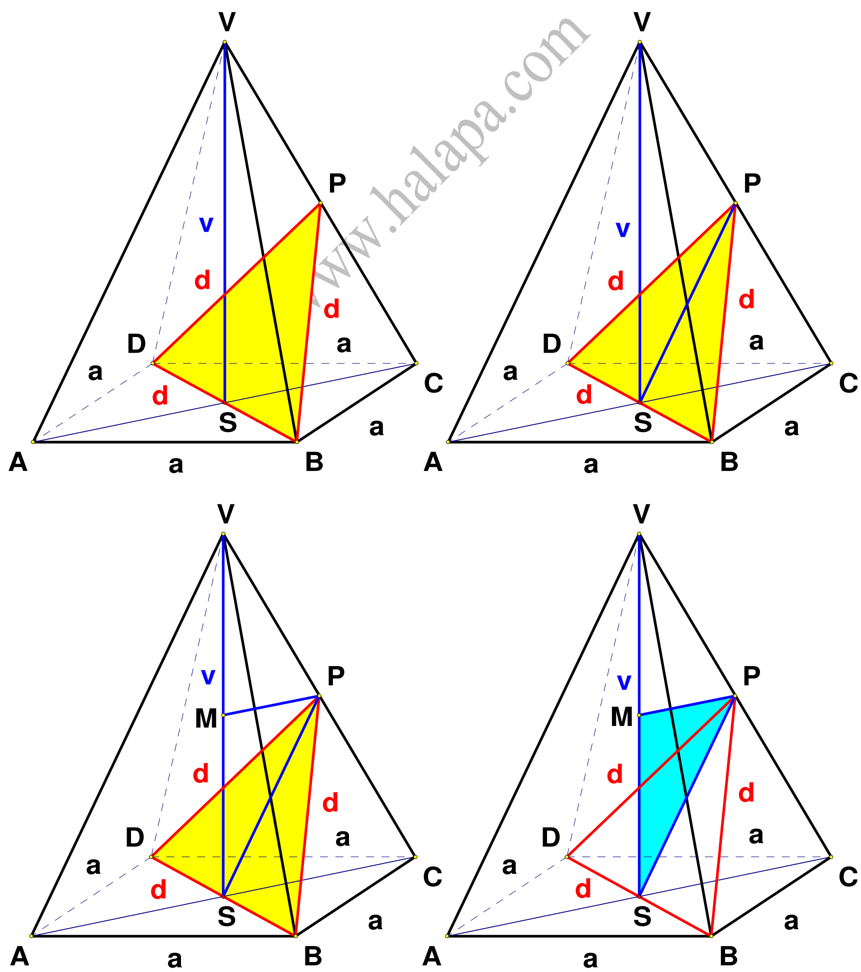
Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a \,||\, m \;,\; a = 2 \cdot m \quad , \quad b \,||\, n \;,\; b = 2 \cdot n \quad , \quad c \,||\, p \;,\; c = 2 \cdot p.$$

Četverostrana je piramida pravilna ako je baza kvadrat, a visina prolazi kroz središte kvadrata. Svi su pobočni bridovi pravilne četverostrane piramide jednake duljine. Obujam se računa po formuli:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v.$$



Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \quad , \quad |AC| = |BD| = |BP| = |DP| = d = a \cdot \sqrt{2}$$

$$|SC| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \quad , \quad |SV| = v \quad , \quad |SM| = \frac{1}{2} \cdot |SV| = \frac{1}{2} \cdot v$$

$$|SP| = \frac{d \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

Budući da je presjek pravilne četverostrane piramide ravninom koja prolazi dijagonalom osnovke i polovištem bočnog brida jednakostraničan trokut ΔDBP, iz njegove površine dobije se duljina stranice osnovke piramide.

$$\left.\begin{array}{l} P_{DBP} = \frac{d^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ d = a \cdot \sqrt{2} \\ P_{DBP} = 2 \cdot \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \; / \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \; / \sqrt{} \Rightarrow a = \sqrt{4} \Rightarrow a = 2.$$

Duljina stranice osnovke piramide je a = 2 cm.

U jednakostraničnom trokutu ΔDBP duljina visine $\overline{SP}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} |SP| = \frac{d \cdot \sqrt{3}}{2} \\ d = a \cdot \sqrt{2} \;,\; a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |SP| = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow |SP| = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2} \Rightarrow |SP| = \sqrt{6}.$$

Duljina visine $\overline{SP}$ je $|SP| = \sqrt{6}\ cm.$

Uočimo pravokutan trokut ΔSCV. Budući da je točka P polovište stranice $\overline{CV}$, slijedi da je srednjica $\overline{MP}$ po iznosu jednaka:

$$\left.\begin{array}{l} |MP| = \frac{1}{2} \cdot |SC| \\ |SC| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \;,\; a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |SP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |SP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |SP| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Duljina srednjice $\overline{MP}$ je $|MP| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\ cm.$

Uočimo pravokutan trokut ΔSPM i uporabom Pitagorina poučka izračunamo duljinu visine piramide.

$$|SM|^2 = |SP|^2 - |MP|^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot v\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot v^2 = 6 - \frac{1}{4} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot v^2 = 6 - \frac{1}{4} \cdot 2 \; / \cdot 4 \Rightarrow v^2 = 24 - 2 \Rightarrow v^2 = 22 \Rightarrow v^2 = 22 \; / \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{22}.$$

Duljina visine pravilne četverostrane piramide ABCDV je $v = \sqrt{22}\ cm.$

Obujam pravilne četverostrane piramide ABCDV iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2\ cm \;,\; v = \sqrt{22}\ cm \\ V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (2\ cm)^2 \cdot \sqrt{22}\ cm \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{22}\ cm^3.$$

Vježba 066

Presjek pravilne četverostrane piramide ravninom koja prolazi dijagonalom osnovke i polovištem bočnog brida jednakostraničan je trokut površine $\sqrt{12}\ cm^2$. Koliki je obujam te piramide?

Rezultat: $V = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{22}\ cm^3.$

Zadatak 067 (Dada, HTT)

Bazen ima oblik kvadra dimenzija 25 m x 15 m x 2.5 m. Cijev koja puni bazen propušta 750 litara vode u minuti. Za koliko će vremena bazen biti pun?

A) za 12 sati i 50 minuta
B) za 15 sati i 47.5 minuta
C) za 19 sati i 37.5 minuta
D) za 20 sati i 50 minuta

Rješenje 067

Ponovimo!

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 \quad , \quad 1\ dm^3 = 1\ l.$$

Obujam kvadra sa stranicama a, b i c dan je formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Računamo obujam bazena.

$$\left.\begin{array}{l} a = 25\ m \\ b = 15\ m \\ c = 2.5\ m \\ V = a \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow V = 25\ m \cdot 15\ m \cdot 2.5\ m \Rightarrow V = 937.5\ m^3 \Rightarrow V = 937.5 \cdot 1000\ dm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 937\,500\ dm^3 \Rightarrow V = 937\,500\ l.$$

Cijev koja puni bazen propušta 750 litara vode u minuti pa se bazen napuni za

$$t = \frac{937\,500\ l}{750\ \frac{l}{\min}} \Rightarrow t = 1250\ \min = \left[\, 1250 : 60 \,\right] = 20.83333333\ h = 20\ h + 0.83333333\ h =$$

$$= 20\ h + \left[\, 0.83333333 \cdot 60 \,\right] = 20\ h\, 50\ \min.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 067

Bazen ima oblik kvadra dimenzija 12.5 m x 30 m x 2.5 m. Cijev koja puni bazen propušta 750 litara vode u minuti. Za koliko će vremena bazen biti pun?

A) za 12 sati i 50 minuta
B) za 15 sati i 47.5 minuta
C) za 19 sati i 37.5 minuta
D) za 20 sati i 50 minuta

Rezultat: D.

Zadatak 068 (Mirna, gimnazija)

Kvadar, čija baza je kvadrat, ima obujam V = 1800 cm^3 i visinu c = 8 cm. Nađi oplošje kvadra.

Rješenje 068

Ponovimo!

Četverokut koji ima dva para usporednih stranica zove se paralelogram. Paralelogram kome su unutarnji kutovi pravi zove se pravokutnik. Pravokutnik s jednakim stranicama zove se kvadrat. Ploština kvadrata, duljine stranice a, izračunava se po formuli

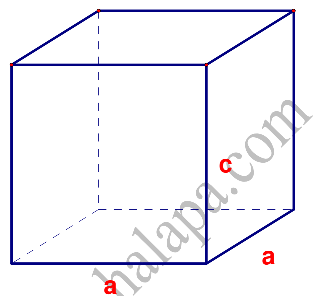
$$P = a^2.$$

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Ako su a, b, c duljine njegovih bridova, onda je:

- obujam $V = a \cdot b \cdot c$
- oplošje $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.

Ako je baza kvadra kvadrat duljine stranice a i visina kvadra je c, tada je:

- obujam $V = a^2 \cdot c$
- oplošje $O = 2 \cdot a \cdot (a + 2 \cdot c)$.



Računamo duljinu brida a baze kvadra.

$$\left. \begin{array}{l} V = a^2 \cdot c \\ V = 1800 \ , \ c = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 1800 = a^2 \cdot 8 \Rightarrow 8 \cdot a^2 = 1800 \Rightarrow 8 \cdot a^2 = 1800 \ /:8 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 225 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{225} \Rightarrow a = 15.$$

Oplošje kvadra iznosi:

$$O = 2 \cdot a \cdot (a + 2 \cdot c) \Rightarrow O = 2 \cdot 15 \cdot (15 + 2 \cdot 8) \Rightarrow O = 30 \cdot (15 + 16) \Rightarrow O = 30 \cdot 31 \Rightarrow O = 930 \ cm^2.$$

Vježba 068

Kvadar, čija baza je kvadrat, ima obujam V = 3600 cm^3 i visinu c = 16 cm. Nađi oplošje kvadra.

Rezultat: 1410 cm^2.

Zadatak 069 (Mirna, gimnazija)

Mljekara pakira mlijeko u ambalažu u obliku kvadra sa stranicama 5, 10, 20. Kolika bi bila ušteda da ga pakira u obliku kocke?

Rješenje 069

Ponovimo!

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Kocka brida a ima:

- obujam $V = a^3$
- oplošje $O = 6 \cdot a^2$.

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Ako su a, b, c duljine njegovih bridova, onda je:

- obujam $V = a \cdot b \cdot c$
- oplošje $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.
Na primjer,

$$9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547\ \% = \frac{547}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa postotak broja a od broja b? Odgovor je: $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Obujam kvadra sa zadanim stranicama iznosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \;\Rightarrow\; V = 5 \cdot 10 \cdot 20 \;\Rightarrow\; V = 1000.$$

Istu količinu mlijeka mljekara može pakirati u ambalažu u obliku kocke čija duljina brida iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} V = a^3 \\ V = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow a^3 = 1000 \Rightarrow a^3 = 1000 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000} \Rightarrow a = \sqrt[3]{10^3} \Rightarrow a = 10.$$

Računamo oplošje kvadra i kocke.

Oplošje kvadra

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \;,\; b = 10 \;,\; c = 20 \\ O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot (5 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20) \Rightarrow O = 2 \cdot (50 + 100 + 200) \Rightarrow O = 700.$$

Oplošje kocke

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ O = 6 \cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow O = 6 \cdot 10^2 \Rightarrow O = 6 \cdot 100 \Rightarrow O = 600.$$

Uočimo da je ušteda u ambalaži

$$700 - 600 = 100$$

kvadratnih jedinica. U postotku to je:

$$\frac{100}{700} \cdot 100\% = 0.143 \cdot 100\% = 14.3\%.$$

Vježba 069

Mljekara pakira mlijeko u ambalažu u obliku kvadra sa stranicama 20, 10, 5. Kolika bi bila ušteda da ga pakira u obliku kocke?

Rezultat: 14.3%.

Zadatak 070 (Željka, srednja škola)

Kolika je visina uspravne trostrane prizme obujma 192 cm^3 čija je osnovka trokut sa stranicama duljina 15 cm, 13 cm, 4 cm?

Rješenje 070

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^{2 \cdot n}} = a^n \;,\; a \ge 0.$$

Obujam (volumen) prizme s bazom (osnovkom) ploštine B i visinom v iznosi:

$$V = B \cdot v.$$

Heronova formula

Ploština trokuta ABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c glasi

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

gdje je s poluopseg trokuta

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Ploštinu osnovke izračunat ćemo pomoću Heronove formule.

$$\left.\begin{array}{l} a=15\ cm\ ,\ b=13\ cm\ ,\ c=4\ cm \\ s=\frac{a+b+c}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=\frac{15\ cm+13\ cm+4\ cm}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=\frac{32\ cm}{2} \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s=16\ cm \\ B=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

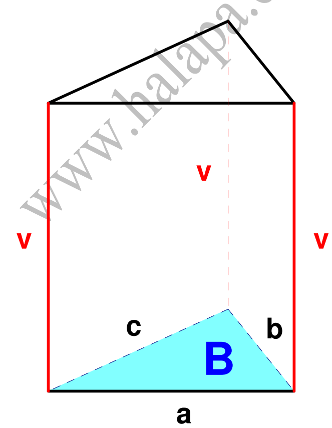
$$\Rightarrow B=\sqrt{16\ cm\cdot(16\ cm-15\ cm)\cdot(16\ cm-13\ cm)\cdot(16\ cm-4\ cm)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{16\ cm\cdot 1\ cm\cdot 3\ cm\cdot 12\ cm} \Rightarrow B=\sqrt{16\cdot 3\cdot 12\ cm^4} \Rightarrow B=\sqrt{2^4\cdot 3^1\cdot 2^2\cdot 3^1\ cm^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{2^6\cdot 3^2\ cm^4} \Rightarrow B=2^3\cdot 3\ cm^2 \Rightarrow B=24\ cm^2.$$

Iz obujma izračunamo visinu v prizme.

$$V=B\cdot v \Rightarrow V=B\cdot v\ /\cdot\frac{1}{B} \Rightarrow v=\frac{V}{B} \Rightarrow v=\frac{192\ cm^3}{24\ cm^2} \Rightarrow v=8\ cm.$$



Vježba 070

Kolika je visina uspravne trostrane prizme obujma 8640 cm^3 čija je osnovka trokut sa stranicama duljina 12 cm, 39 cm, 45 cm?

Rezultat: 40 cm.

Zadatak 071 (Jo, gimnazija)

Osnovka piramide je pravokutnik površine 100 cm^2. Dvije su pobočke okomite na osnovku piramide, a od ostalih jedna s osnovkom zatvara kut od 30º, a druga 60º. Koliko je oplošje piramide?

Rješenje 071

Ponovimo!

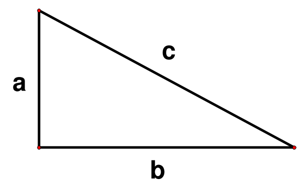
$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Pitagorin poučak:
Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine katete uz taj kut.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

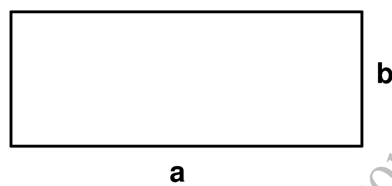
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

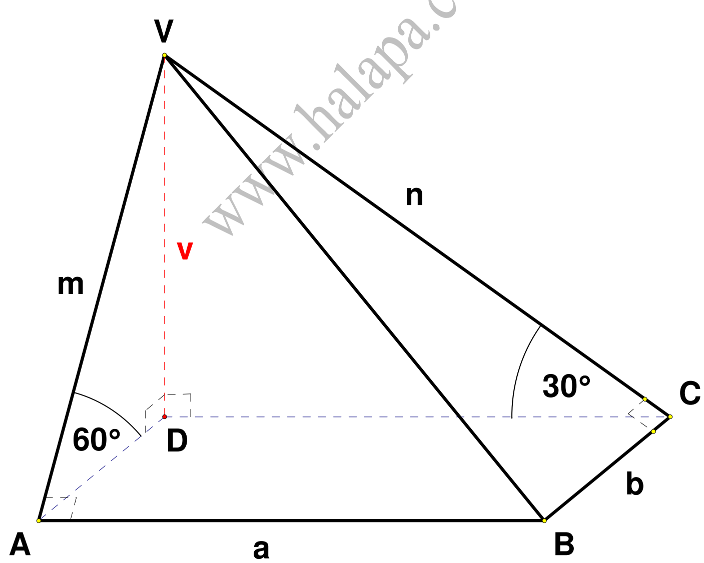


$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:



$$P = a \cdot b$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = a \ , \ |BC| = |DA| = b \ , \ |VD| = v \ , \ |VA| = m \ , \ |VC| = n \ , \ \angle VAD = 60^0 \ , \ \angle DCV = 30^0$$

Osnovka piramide je pravokutnik ABCD ploštine 100 cm^2 pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABCD} = a \cdot b \\ P_{ABCD} = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b = 100.$$

Uočimo pravokutan trokut ΔDCV i pomoću funkcije tangens dobije se:

$$tg\,30^0=\frac{|VD|}{|CD|}\Rightarrow tg\,30^0=\frac{v}{a}\Rightarrow tg\,30^0=\frac{v}{a}\ /\cdot a\Rightarrow v=a\cdot tg\,30^0\Rightarrow v=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a.$$

Uočimo pravokutan trokut ΔADV i pomoću funkcije tangens dobije se:

$$tg\,60^0=\frac{|VD|}{|DA|}\Rightarrow tg\,60^0=\frac{v}{b}\Rightarrow tg\,60^0=\frac{v}{b}\ /\cdot b\Rightarrow v=b\cdot tg\,60^0\Rightarrow v=b\cdot\sqrt{3}\Rightarrow v=\sqrt{3}\cdot b.$$

Iz sustava jednadžbi izračuna se duljina osnovnih bridova a i b.

$$\left.\begin{aligned}v&=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\\ v&=\sqrt{3}\cdot b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a=\sqrt{3}\cdot b\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a=\sqrt{3}\cdot b\ /\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow a=3\cdot b.$$

Budući da je osnovka piramide pravokutnik ABCD ploštine 100, vrijedi:

$$\left.\begin{aligned}a\cdot b&=100\\ a&=3\cdot b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix}\Rightarrow 3\cdot b\cdot b=100\Rightarrow 3\cdot b^2=100\Rightarrow 3\cdot b^2=100\ /:3\Rightarrow b^2=\frac{100}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=\frac{100}{3}\ /\sqrt{\ }\Rightarrow b=\sqrt{\frac{100}{3}}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}}\Rightarrow b=\frac{10}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{10}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow b=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\Rightarrow b=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Tada je a jednak:

$$\left.\begin{aligned}b&=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\\ a&=3\cdot b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix}\Rightarrow a=3\cdot\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=3\cdot\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=10\cdot\sqrt{3}.$$

Računamo visinu | VD | = v piramide ABCDV.

$$\left.\begin{aligned}v&=\sqrt{3}\cdot b\\ b&=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix}\Rightarrow v=\sqrt{3}\cdot\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\Rightarrow v=\frac{10\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}\Rightarrow v=\frac{10\cdot 3}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{10\cdot 3}{3}\Rightarrow v=10.$$

Računamo duljinu bočnog brida | VA | = m. Uočimo pravokutan trokut ΔADV i po Pitagorinu poučku dobije se:

$$|VA|^2=|DA|^2+|VD|^2\Rightarrow m^2=b^2+v^2\Rightarrow m^2=\left(\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2+10^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2=\frac{10^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{3^2}+100\Rightarrow m^2=\frac{100\cdot 3}{9}+100\Rightarrow m^2=\frac{100\cdot 3}{9}+100\Rightarrow m^2=\frac{100}{3}+100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2=\frac{100}{3}+\frac{100}{1}\Rightarrow m^2=\frac{100+300}{3}\Rightarrow m^2=\frac{400}{3}\Rightarrow m^2=\frac{400}{3}\ /\sqrt{\ }\Rightarrow m=\sqrt{\frac{400}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{3}}\Rightarrow m=\frac{20}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\Rightarrow m=\frac{20}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow m=\frac{20\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\Rightarrow m=\frac{20\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Računamo duljinu bočnog brida | VC | = n. Uočimo pravokutan trokut ΔDCV i po Pitagorinu poučku dobije se:

$$\left|VC\right|^2=\left|VD\right|^2+\left|CD\right|^2 \Rightarrow n^2=v^2+a^2 \Rightarrow n^2=10^2+\left(10\cdot\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow n^2=100+10^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=100+100\cdot 3 \Rightarrow n^2=100+300 \Rightarrow n^2=400 \Rightarrow n^2=400\ /\sqrt{\ } \Rightarrow n=\sqrt{400} \Rightarrow n=20.$$

Oplošje piramide ABCDV jednako je zbroju ploštine osnovke (pravokutnik ABCD) i ploština četiri pravokutna trokuta ΔADV, ΔDCV, ΔABV i ΔBCV.

$$O_{ABCDV}=P_{ABCD}+P_{ADV}+P_{DCV}+P_{ABV}+P_{BCV}=$$

$$=\left|AB\right|\cdot\left|BC\right|+\frac{\left|DA\right|\cdot\left|VD\right|}{2}+\frac{\left|CD\right|\cdot\left|VD\right|}{2}+\frac{\left|AB\right|\cdot\left|VA\right|}{2}+\frac{\left|BC\right|\cdot\left|VC\right|}{2}=a\cdot b+\frac{b\cdot v}{2}+\frac{a\cdot v}{2}+\frac{a\cdot m}{2}+\frac{b\cdot n}{2}=$$

$$=a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot\left(b\cdot v+a\cdot v+a\cdot m+b\cdot n\right)=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot 10+10\cdot\sqrt{3}\cdot 10+10\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{20\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot 20\right)=$$

$$=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{10}{1}+\frac{10\cdot\sqrt{3}\cdot 10}{1}+\frac{10\cdot\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{20\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{20}{1}\right)=$$

$$=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{100\cdot\sqrt{3}}{1}+\frac{200\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}+\frac{200\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{100\cdot\sqrt{3}}{1}+\frac{200\cdot 3}{3}+\frac{200\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{100\cdot\sqrt{3}}{1}+\frac{200\cdot 3}{3}+\frac{200\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=100+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{100\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{100\cdot\sqrt{3}}{1}+200+\frac{200\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=100+\frac{1}{2}\cdot\left(200+\frac{100\cdot\sqrt{3}+300\cdot\sqrt{3}+200\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=100+\frac{1}{2}\cdot\left(200+\frac{600\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=100+\frac{1}{2}\cdot\left(200+\frac{600\cdot\sqrt{3}}{3}\right)=100+\frac{1}{2}\cdot\left(200+200\cdot\sqrt{3}\right)=$$

$$=100+100+100\cdot\sqrt{3}=200+100\cdot\sqrt{3}=100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\ cm^2.$$

Vježba 071

Osnovka piramide je pravokutnik ploštine 1 dm^2. Dvije su pobočke okomite na osnovku piramide, a od ostalih jedna s osnovkom zatvara kut od 30º, a druga 60º. Koliko je oplošje piramide?

Rezultat: $100\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\ cm^2.$

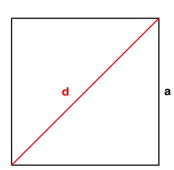
Zadatak 072 (Ema, gimnazija)

Koliki je obujam pravilne krnje četverostrane piramide ako su duljine njezinih osnovnih bridova jednake a i b (a > b), a duljina visine piramide v? (Zadatak iz "Moskovskog papirusa")

Rješenje 072

Ponovimo!

$$\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\quad,\quad\sqrt{x^2}=x\ ,\ x\geq 0.$$



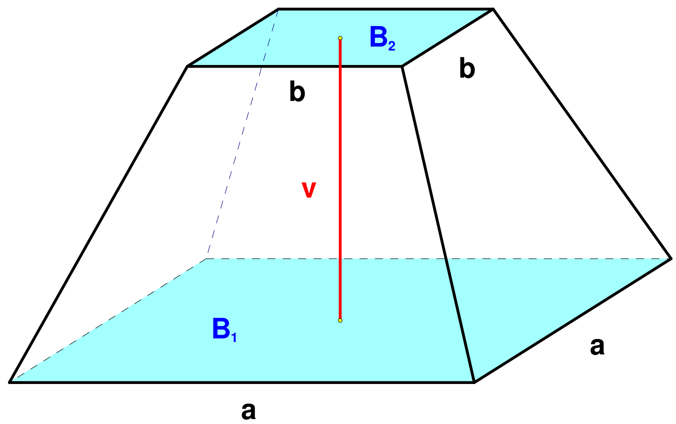
Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Ploština kvadrata izračunava se po formuli:

$$P = a^2.$$

Obujam krnje piramide

Obujam krnje piramide s bazama B_1 i B_2 i visinom v iznosi:

$$V = \frac{v}{3} \cdot \left(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2 \right).$$



Budući da su osnovke (baze) krnje piramide kvadrati duljina stranica a i b, njezin obujam iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = a^2 \quad , \quad B_2 = b^2 \\ V = \frac{v}{3} \cdot \left(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{v}{3} \cdot \left(a^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2} + b^2 \right) \Rightarrow V = \frac{v}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2 \right).$$

Vježba 072

Koliki je obujam pravilne krnje četverostrane piramide ako su duljine njezinih osnovnih bridova jednake 3 dm i 2 dm, a duljina visine piramide 6 dm?

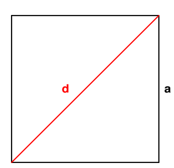
Rezultat: 38 dm^3.

Zadatak 073 (Ivica, gimnazija)

Duljina stranice osnovke pravilne četverostrane piramide je 128 cm, a duljina visine je 48 cm. Izračunajte duljinu visine pobočke, te kut kojeg čine osnovka i pobočka.

Rješenje 073

Ponovimo!



Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Ploština kvadrata izračunava se po formuli:

$$P = a^2.$$

Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutom (n – terokutom) i s n trokuta. Mnogokut koji omeđuje piramidu zovemo osnovka ili baza piramide, a svaki trokut zovemo pobočka piramide. Dužinu koja spaja vrh piramide s njegovom ortogonalnom projekcijom na ravninu osnovke zovemo visina piramide.

Pitagorin poučak:

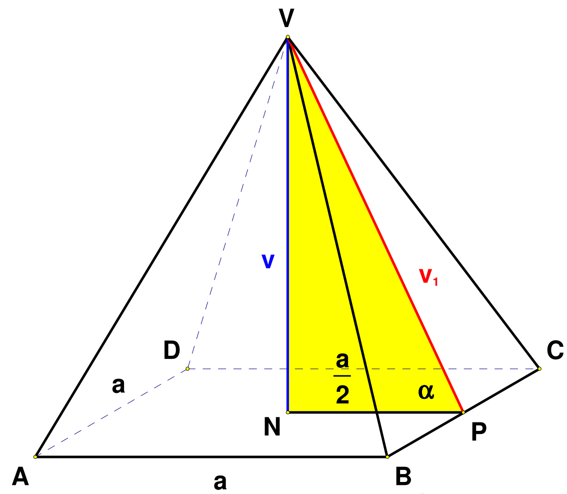
Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine katete uz taj kut.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

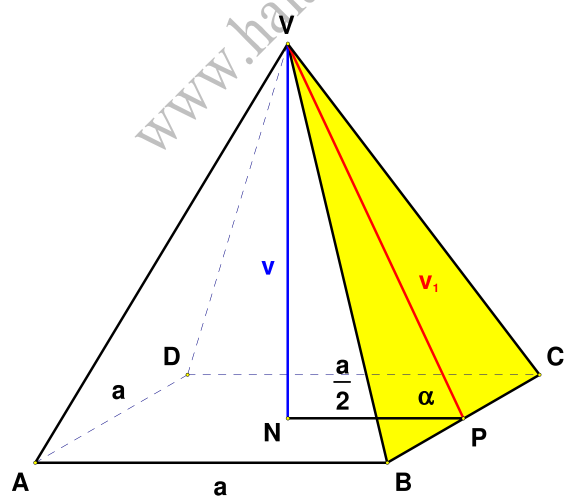
$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a=128 \ \ cm \ , \ |VN|=v=48 \ cm \ , \ |VP|=v_1 \ , \ |NP|=\frac{a}{2}$$

$$\angle NPV=\alpha$$



Budući da je pobočka VBC piramide ABCDV jednakokračan trokut, nožište je njegove visine v_1 ujedno i polovište P stranice $\overline{BC}$.

Uočimo pravokutan trokut ΔVNP kojemu su katete v i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza v_1. Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$|VP|^2=|VN|^2+|NP|^2 \Rightarrow v_1^2=v^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v_1^2=12^2+\left(\frac{32}{2}\right)^2 \Rightarrow v_1^2=12^2+16^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2=144+256 \Rightarrow v_1^2=400 \Rightarrow v_1^2=400 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow v_1=\sqrt{400} \Rightarrow v_1=20.$$

Duljina visine pobočke je 20 cm.
Traženi kut je kut α pri vrhu P promatranog pravokutnog trokuta ΔVNP. Stoga je:

$$tg\,\alpha=\frac{|VN|}{|NP|}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{v}{\frac{a}{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\frac{v}{1}}{\frac{a}{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{2\cdot v}{a}\Rightarrow \alpha=tg^{-1}\left(\frac{2\cdot v}{a}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=tg^{-1}\left(\frac{2\cdot 48}{128}\right)\Rightarrow \alpha=36^{0}\,52'12''.$$

Vježba 073

Duljina stranice osnovke pravilne četverostrane piramide je 32 cm, a duljina visine je 12 cm. Izračunajte duljinu visine pobočke, te kut kojeg čine osnovka i pobočka.

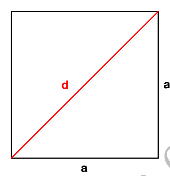
Rezultat: 20 cm, 36º 52' 12''.

Zadatak 074 (Snježana, srednja škola)

Oplošje pravilne četverostrane piramide je 96 cm^2, a duljina osnovnog brida je 6 cm. Koliki je obujam piramide?

Rješenje 074

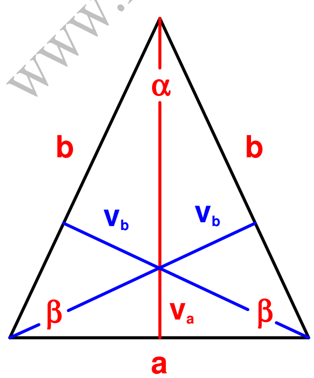
Ponovimo!



Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Ploština kvadrata izračunava se po formuli:

$$P=a^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.



Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica ili baza trokuta. Ploština jednakokračnog trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutom (n – terokutom) i s n trokuta. Mnogokut koji omeđuje piramidu zovemo osnovka ili baza piramide, a svaki trokut zovemo pobočka piramide.

Dužinu koja spaja vrh piramide s njegovom ortogonalnom projekcijom na ravninu osnovke zovemo visina piramide.
Oplošje pravilne četverostrane piramide izračunava se po formuli

$$O = B + P \;\Rightarrow\; O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} \;\Rightarrow\; O = a^2 + 2 \cdot a \cdot v_1,$$

gdje je a duljina stranice osnovke (kvadrata), a v_1 duljina visine pobočke (jednakokračnog trokuta).
Obujam pravilne četverostrane piramide izračunava se po formuli

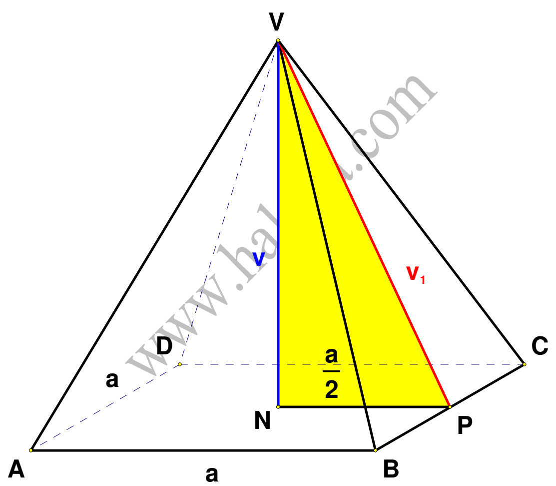
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \;\Rightarrow\; V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v,$$

gdje je a duljina stranice osnovke (kvadrata), a v duljina visine piramide.
Iz oplošja piramide izračunamo duljinu visine v_1 pobočke.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \\ O = 96 \\ O = a^2 + 2 \cdot a \cdot v_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 96 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot v_1 \;\Rightarrow\; 96 = 36 + 12 \cdot v_1 \;\Rightarrow\; 36 + 12 \cdot v_1 = 96 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 12 \cdot v_1 = 96 - 36 \;\Rightarrow\; 12 \cdot v_1 = 60 \;\Rightarrow\; 12 \cdot v_1 = 60 \;/ : 12 \;\Rightarrow\; v_1 = 5.$$

Duljina visine pobočke je v_1 = 5 cm.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a = 6 \ \ cm \ \ , \ |VN| = v \ \ , \ |VP| = v_1 = 5 \ cm \ \ , \ |NP| = \frac{a}{2} = 3 \ cm$$

Budući da je pobočka VBC piramide ABCDV jednakokračan trokut, nožište je njegove visine v_1 ujedno i polovište P stranice $\overline{BC}$.

Uočimo pravokutan trokut ΔVNP kojemu su katete v i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza v_1. Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$|VN|^2 = |VP|^2 - |NP|^2 \;\Rightarrow\; v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; v^2 = 5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; v^2 = 5^2 - 3^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v^2 = 25 - 9 \;\Rightarrow\; v^2 = 16 \;\Rightarrow\; v^2 = 16 \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; v = \sqrt{16} \;\Rightarrow\; v = 4.$$

Duljina visine piramide je v = 4 cm.
Računamo obujam piramide.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6\ cm \\ v = 4\ cm \\ V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (6\ cm)^2 \cdot 4\ cm \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36\ cm^2 \cdot 4\ cm \Rightarrow V = 48\ cm^3.$$

Vježba 074

Oplošje pravilne četverostrane piramide je 9600 mm^2, a duljina osnovnog brida je 60 mm. Koliki je obujam piramide?

Rezultat: 48000 mm^3.

Zadatak 075 (Snježana, srednja škola)

Pravilnoj četverostranoj piramidi osnovni je brid dug $9 \cdot \sqrt{2}$ m, a bočni brid dug je 15 m. Izračunaj oplošje i obujam te piramide.

Rješenje 075

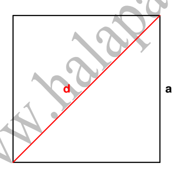
Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

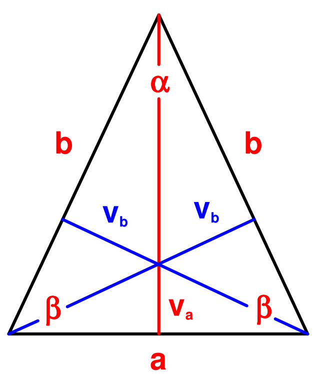
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$



Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Ploština kvadrata izračunava se po formuli:

$$P = a^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.



Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica ili baza trokuta. Ploština jednakokračnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

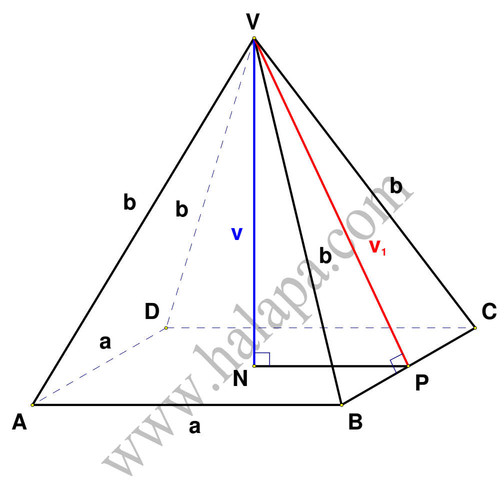
a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Piramida je geometrijsko tijelo omeđena mnogokutom (n – terokutom) i s n trokuta. Mnogokut koji omeđuje piramidu zovemo osnovka ili baza piramide, a svaki trokut zovemo pobočka piramide.
Dužinu koja spaja vrh piramide s njegovom ortogonalnom projekcijom na ravninu osnovke zovemo visina piramide.
Oplošje pravilne četverostrane piramide izračunava se po formuli

$$O = B + P \;\Rightarrow\; O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} \;\Rightarrow\; O = a^2 + 2 \cdot a \cdot v_1,$$

gdje je a duljina stranice osnovke (kvadrata), a v_1 duljina visine pobočke (jednakokračnog trokuta).
Obujam pravilne četverostrane piramide izračunava se po formuli

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \;\Rightarrow\; V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v,$$

gdje je a duljina stranice osnovke (kvadrata), a v duljina visine piramide.

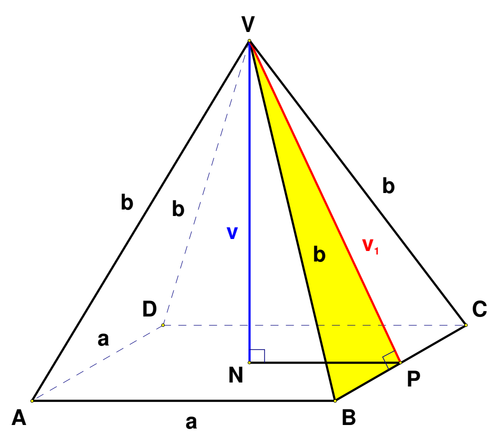


Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a = 9 \cdot \sqrt{2} \;,\; |BP| = |NP| = \frac{a}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$|VA| = |VB| = |VC| = |VD| = b = 15 \;,\; |VN| = v \;,\; |VP| = v_1$$

Budući da je pobočka VBC piramide ABCDV jednakokračan trokut, nožište je njegove visine v_1 ujedno i polovište P stranice $\overline{BC}$.
Računamo duljinu visine v_1.



Uočimo pravokutan trokut ΔVBP kojemu su katete v_1 i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza b. Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$|VP|^2 = |VB|^2 - |BP|^2 \Rightarrow v_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v_1^2 = 15^2 - \left(\frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow v_1^2 = 15^2 - \frac{\left(9\cdot\sqrt{2}\right)^2}{2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 15^2 - \frac{9^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2} \Rightarrow v_1^2 = 225 - \frac{81\cdot 2}{4} \Rightarrow v_1^2 = 225 - \frac{162}{4} \Rightarrow v_1^2 = \frac{225}{1} - \frac{162}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{900-162}{4} \Rightarrow v_1^2 = \frac{738}{4} \Rightarrow v_1^2 = \frac{738}{4} \; /\sqrt{\ } \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{738}{4}} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{738}}{\sqrt{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{738}}{2} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{matrix}\right] \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{9\cdot 82}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{82}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{3\cdot\sqrt{82}}{2}.$$

Oplošje pravilne četverostrane piramide iznosi:

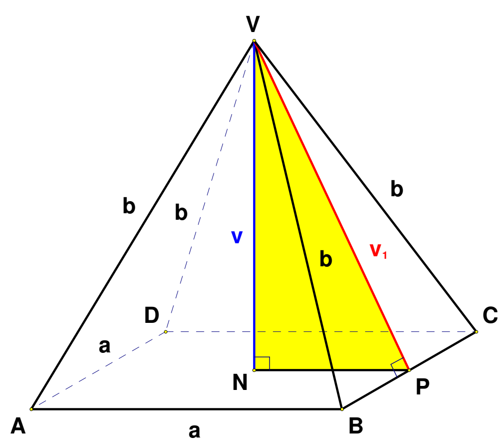
$$\left.\begin{matrix} O = a^2 + 2\cdot a\cdot v_1 \\ a = 9\cdot\sqrt{2} \\ v_1 = \frac{3\cdot\sqrt{82}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow O = \left(9\cdot\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 9\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{82}}{2} \Rightarrow O = 9^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 9\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{82}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 81\cdot 2 + 9\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{82} \Rightarrow O = 162 + 27\cdot\sqrt{2\cdot 82} \Rightarrow O = 162 + 27\cdot\sqrt{164} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 162 + 27\cdot\sqrt{4\cdot 41} \Rightarrow O = 162 + 27\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{41} \Rightarrow O = 162 + 27\cdot 2\cdot\sqrt{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 162 + 54\cdot\sqrt{41} \Rightarrow O = 54\cdot\left(3+\sqrt{41}\right)\, m^2.$$

Računamo duljinu visine v piramide ABCDV.



Uočimo pravokutan trokut ΔVNP kojemu su katete v i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza v_1. Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$|VN|^2 = |VP|^2 - |NP|^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = \left(\frac{3\cdot\sqrt{82}}{2}\right)^2 - \left(\frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{3^2 \cdot \left(\sqrt{82}\right)^2}{2^2} - \frac{9^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2} \Rightarrow v^2 = \frac{9 \cdot 82}{4} - \frac{81 \cdot 2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{738}{4} - \frac{162}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{738 - 162}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{576}{4} \Rightarrow v^2 = 144 \Rightarrow v^2 = 144 \; / \sqrt{\ } \Rightarrow v = 12.$$

Obujam pravilne četverostrane piramide iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v \\ a = 9 \cdot \sqrt{2} \;\;,\;\; v = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(9 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot 12 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 12 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 2 \cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 2 \cdot 12 \Rightarrow V = 27 \cdot 2 \cdot 12 \Rightarrow V = 648 \; m^3.$$

Vježba 075

Pravilnoj četverostranoj piramidi osnovni je brid dug $9 \cdot \sqrt{2}$ m, a bočni brid dug je 150 dm. Izračunaj obujam piramide.

Rezultat: 648 m^3.

Zadatak 076 (Vedran, maturant)

Duljine bridova kvadra u omjeru su 1 : 2 : 3. Dokažite da je površina njegova pobočja devet puta veća od površine njegove osnovke.

Rješenje 076

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Površina pravokutnika duljina stranica a i b izračunava se po formuli

$$P = a \cdot b.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \;\; \text{ili} \;\; \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$

$$a_2 : b_2 = k$$

$$a_3 : b_3 = k$$

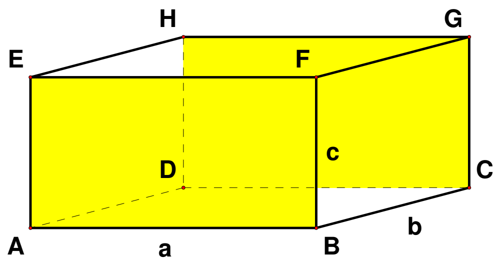
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

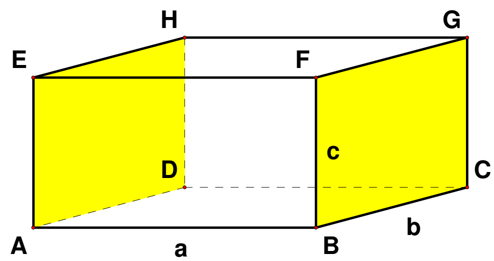
produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Iz omjera duljina bridova kvadra slijedi:

$$a : b : c = 1 : 2 : 3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = k \\ b = 2 \cdot k \\ c = 3 \cdot k \end{matrix}\right\}.$$

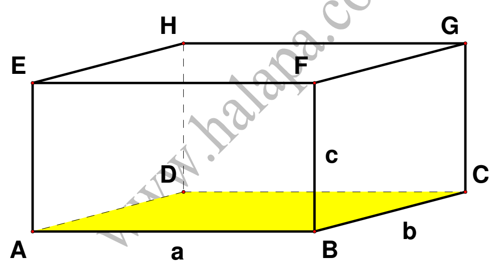




Površina pobočja kvadra jednaka je zbroju površina pravokutnika ABFE, BCGF, GHDC i HEAD.

$$P_1 = P_{ABFE} + P_{DCGH} + P_{BCGF} + P_{ADHE} \Rightarrow P_1 = a \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + b \cdot c \Rightarrow P_1 = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = 2 \cdot c \cdot (a + b) \Rightarrow P_1 = 2 \cdot 3 \cdot k \cdot (k + 2 \cdot k) \Rightarrow P_1 = 6 \cdot k \cdot 3 \cdot k \Rightarrow P_1 = 18 \cdot k^2.$$



Površina osnovke kvadra jednaka je površini pravokutnika ABCD.

$$P_2 = P_{ABCD} \Rightarrow P_2 = a \cdot b \Rightarrow P_2 = k \cdot 2 \cdot k \Rightarrow P_2 = 2 \cdot k^2.$$

Računamo omjer površine pobočja kvadra P_1 i površine osnovke kvadra P_2.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{18 \cdot k^2}{2 \cdot k^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 9.$$

Vježba 076

Duljine bridova kvadra u omjeru su 1 : 3 : 9. Dokažite da je površina njegova pobočja dvadeset i četiri puta veća od površine njegove osnovke.

Rezultat: $\quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot k \cdot (k + 3 \cdot k)}{k \cdot 3 \cdot k} = 24.$

Zadatak 077 (Ante, maturant)

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose a cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

$A.\ 35^0 15'52'' \qquad B.\ 45^0 27'12'' \qquad C.\ 54^0 44'08'' \qquad D.\ 60^0 12'06''$

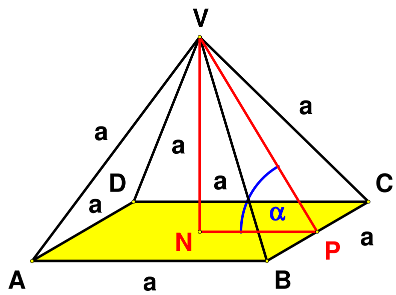
Rješenje 077

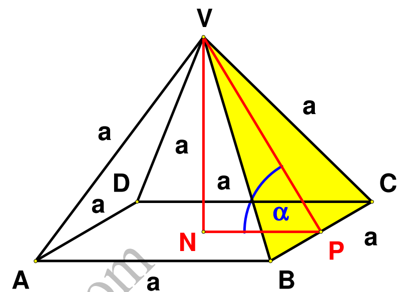
Ponovimo!

Piramida je tijelo omeđeno mnogokutima: osnovkom (bazom) i trokutima koji čine pobočke (strane) piramide. Visina piramide udaljenost je vrha piramide od ravnine njezine baze. Četverostrana je piramida pravilna ako je baza kvadrat, a visina prolazi kroz središte kvadrata.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Duljina visine jednakostraničnog trokuta čija je duljina stranice a iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



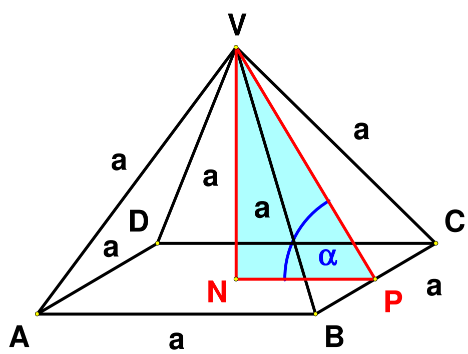


Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |VA| = |VB| = |VC| = |VD| = a \;\; , \;\; |NP| = \frac{a}{2} \;\; , \;\; |VP| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \angle(NP, VP)$$

Baza (osnovka) piramide ABCDV je kvadrat ABCD pri čemu je N njegovo središte. Strane (pobočke) piramide su jednakostranični trokuti ΔVAB, ΔVBC, ΔVCD i ΔVDA. Uočimo da je kut α između osnovke ABCD i pobočke VBC jednak kutu između pravaca NP i VP.



Traženi kut lako pronalazimo pomoću pravokutnog trokuta ΔVNP gdje je $|NP|$ duljina njegove katete, a $|VP|$ duljina hipotenuze. Mjera kuta iznosi:

$$\cos\alpha = \frac{|NP|}{|VP|} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{1}} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 54^{0}\, 44'08''.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 077

Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose 13 cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

$$A.\ 35^0 15'52'' \qquad B.\ 45^0 27'12'' \qquad C.\ 54^0 44'08'' \qquad D.\ 60^0 12'06''$$

Rezultat: C.

Zadatak 078 (Tin, srednja škola)

Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 25 cm, 20 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra = 1 dm^3)

$$A.\ 90\ litara \qquad B.\ 16.2\ litre \qquad C.\ 9\ litara \qquad D.\ 1.62\ litre$$

Rješenje 078

Ponovimo!

$$1\ dm = 10\ cm \quad , \quad 1\ litra = 1\ dm^3.$$

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik. Ako su a, b i c duljine bridova kvadra iz jednog vrha, obujam kvadra jednak je

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 25\ cm \\ b = 20\ cm \\ c = 18\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2.5\ dm \\ b = 2.0\ dm \\ c = 1.8\ dm \end{array}\right\} \Rightarrow \left[V = a \cdot b \cdot c\right] \Rightarrow V = 2.5\ dm \cdot 2.0\ dm \cdot 1.8\ dm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 9\ dm^3 \Rightarrow V = 9\ litara.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 078

Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 50 cm, 10 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra = 1 dm^3)

$$A.\ 90\ litara \qquad B.\ 16.2\ litre \qquad C.\ 9\ litara \qquad D.\ 1.62\ litre$$

Rezultat: C.

Zadatak 079 (Lana, srednja škola)

Koliki je obujam kvadra ako mu je zadana duljina jednog brida a = 4.5 cm, duljina dijagonale baze d = 7.9 cm i kut φ = 28° 38' koji prostorna dijagonala zatvara s bazom kvadra?

Rješenje 079

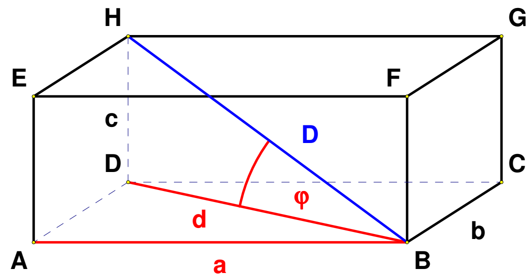
Ponovimo!

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz kut.

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar ima 8 vrhova, 12 bridova i 6 strana. Sve strane kvadra su pravokutnici. Ako su a, b i c duljine bridova kvadra iz jednog vrha, obujam kvadra jednak je.

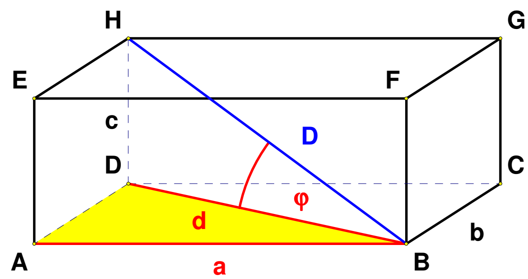
$$V = a \cdot b \cdot c.$$



Sa slike vidi se:

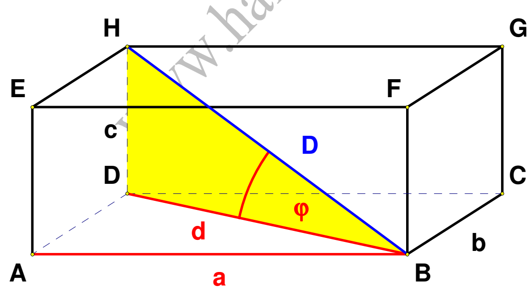
$$|AB| = |EF| = |DC| = |HG| = a \;,\; |BC| = |AD| = |FG| = |EH| = b$$

$$|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = c \;,\; |BD| = d \;,\; |BH| = D \;,\; \angle(DG,\, BH) = \varphi$$



Uočimo pravokutan trokut ΔABD kojemu su duljine kateta bridovi kvadra a i b, a duljina hipotenuze duljina dijagonale baze d. Uporabom Pitagorina poučka dobije se duljina brida b.

$$b^2 = d^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = d^2 - a^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{(7.9\ cm)^2 - (4.5\ cm)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = 6.5\ cm.$$



Uočimo pravokutan trokut ΔDBH kojemu su duljine kateta brid kvadra c i duljina dijagonale baze d. Pomoću funkcije tangens dobije se duljina brida c.

$$tg\,\varphi = \frac{|DH|}{|BD|} \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{c}{d} \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{c}{d} \;/\cdot d \Rightarrow c = d \cdot tg\,\varphi \Rightarrow c = 7.9\ cm \cdot tg\,28^0\,38' \Rightarrow c = 4.3\ cm.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4.5\ cm \\ b = 6.5\ cm \\ c = 4.3\ cm \\ V = a \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow V = 4.5\ cm \cdot 6.5\ cm \cdot 4.3\ cm \Rightarrow V = 125.8\ cm^3.$$

Vježba 079

Koliki je obujam kvadra ako mu je zadana duljina jednog brida a = 45 mm, duljina dijagonale baze d = 79 mm i kut φ = 28° 38' koji prostorna dijagonala zatvara s bazom kvadra?

Rezultat: $125800\ mm^3$.

Zadatak 080 (Ilija, srednja škola)

Oplošje pravilne trostrane prizme je $O = 20 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$, a osnovni brid je a = 4 cm. Izračunajte visinu i obujam prizme.

Rješenje 080

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

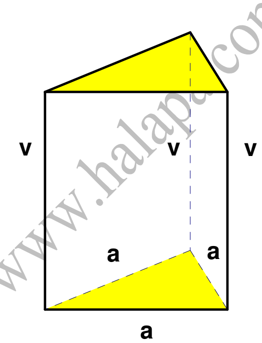
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine. Njegova ploština računa se po formuli

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice usporedne (paralelne).
Paralelogram je trapez kojemu su suprotne stanice usporedne.
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan kut pravi (90°).
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli

$$P = a \cdot b.$$

Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim poligonima (mnogokutima) i paralelogramima. Osnovke (baze) prizme su poligoni, a paralelogrami čine pobočje. Ako je osnovka pravilan poligon i ako je prizma uspravna, ona je pravilna. Prizma kojoj je pobočni brid okomit na osnovku zove se uspravna. Duljina visine prizme jednaka je udaljenosti između ravnina u kojima leže osnovke.



Oplošje prizme izračunava se po formuli

$$O = 2 \cdot B + P,$$

gdje je B ploština osnovke, a P ploština pobočja.
Za pravilnu uspravnu trostranu prizmu vrijedi:

$$O = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot v.$$

Obujam prizme izračunava se po formuli

$$V = B \cdot v,$$

gdje je B ploština osnovke, a v visina.
Za pravilnu uspravnu trostranu prizmu vrijedi:

$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot v.$$

Računamo visinu v prizme.

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot B + P \\ B = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ P = 3 \cdot a \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot v \Rightarrow \begin{bmatrix} O = 20 \cdot \sqrt{3} \\ a = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 20 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 12 \cdot v \Rightarrow 20 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot v \Rightarrow 20 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot v = 20 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 12 \cdot v = 20 \cdot \sqrt{3} - 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 12 \cdot v = 12 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot v = 12 \cdot \sqrt{3} \; / : 12 \Rightarrow v = \sqrt{3} \Rightarrow v = \sqrt{3} \; cm \Rightarrow v \approx 1.73 \; cm.$$

Obujam prizme iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} V = B \cdot v \\ B = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot v \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 4 \\ v = \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow V = 4 \cdot 3 \Rightarrow V = 12 \Rightarrow V = 12 \; cm^3.$$

Vježba 080

Oplošje pravilne trostrane prizme je $O = 20 \cdot \sqrt{3} \; cm^2$, a osnovni brid je a = 0.4 dm. Izračunajte visinu prizme.

Rezultat: 1.73 cm.