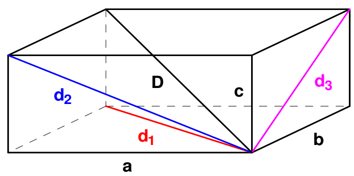
Zadatak 041 (Marko, gimnazija)

Dijagonale strana kvadra imaju duljine $2 \cdot \sqrt{13}, 3 \cdot \sqrt{5}, 5$. Kolika je duljina prostorne dijagonale?

Rješenje 041

$$d_1 = 2 \cdot \sqrt{13}, \quad d_2 = 3 \cdot \sqrt{5}, \quad d_3 = 5$$



$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = d_1^2 \\ a^2 + c^2 = d_2^2 \\ b^2 + c^2 = d_3^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 \right) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prostorna dijagonala} \\ D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot D^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2} \; / \sqrt{} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{\left(2 \cdot \sqrt{13}\right)^2 + \left(3 \cdot \sqrt{5}\right)^2 + 5^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{52 + 45 + 25}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{122}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{61}.$$

Vježba 041

Dijagonale strana kvadra imaju duljine $2 \cdot \sqrt{3}, 3 \cdot \sqrt{5}, 5$. Kolika je duljina prostorne dijagonale?

Rezultat: $\sqrt{41}.$

Zadatak 042 (Sany, srednja škola)

Obujam kvadra je 900 cm^3, njegova visina iznosi 15 cm. Osnovne stranice odnose se kao 3 : 5. Izračunajte duljine osnovnih stranica.

Rješenje 042

$V = 900 \text{ cm}^3$, $\quad c = 15$ cm, $\quad a : b = 3 : 5$, $\quad a = ?$, $\quad b = ?\, |VN| = v \quad , \quad |VN_1| = v_1$

1.inačica

$$\left. \begin{array}{l} V = a \cdot b \cdot c \\ a : b = 3 : 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot b \cdot 15 = 900 \\ 5 \cdot a = 3 \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15 \cdot a \cdot b = 900 \; /:15 \\ 5 \cdot a = 3 \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot b = 60 \\ a = \frac{3 \cdot b}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3 \cdot b}{5} \cdot b = 60 \; / \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 60 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow b^2 = 100 \; / \sqrt{} \Rightarrow b = 10 \; cm \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{3 \cdot b}{5} \\ b = 10 \; cm \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 10 \; cm}{5} \Rightarrow a = 6 \; cm.$$

2.inačica

$$\left. \begin{array}{l} V = a \cdot b \cdot c \\ a : b = 3 : 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot b \cdot 15 = 900 \\ a = 3 \cdot k \;\; , \;\; b = 5 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot k \cdot 5 \cdot k \cdot 15 = 900 \Rightarrow 225 \cdot k^2 = 900 \; /:225 \Rightarrow k^2 = 4 \; / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot k = 3 \cdot 2 = 6 \; cm \\ b = 5 \cdot k = 5 \cdot 2 = 10 \; cm \end{array} \right\}.$$

Vježba 042

Obujam kvadra je 900 cm^3, njegova visina iznosi 15 cm. Osnovne stranice odnose se kao 5 : 3. Izračunajte duljine osnovnih stranica.

Rezultat: a = 10 cm , b = 6 cm.

Zadatak 043 (2A, TUPŠ)

Kvadar ima bazu površine 24 cm^2, omotač 352 cm^2, prostorna dijagonala dugačka je $\sqrt{329}$ cm. Izračunajte duljine stranica kvadra.

Rješenje 043

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 .$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ 2\cdot a\cdot c + 2\cdot b\cdot c = 352 \\ D = \sqrt{329} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ 2\cdot a\cdot c + 2\cdot b\cdot c = 352 \;/:2 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{329} \;/^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ a\cdot c + b\cdot c = 176 \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ c\cdot(a+b) = 176 \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ a+b = \dfrac{176}{c} \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{drugu} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ a+b = \dfrac{176}{c} \;/^2 \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 = \dfrac{30976}{c^2} \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prvu jednadžbu} \\ \text{množimo brojem 2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b = 24 \;/\cdot 2 \\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 = \dfrac{30976}{c^2} \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a\cdot b = 48 \\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 = \dfrac{30976}{c^2} \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+48+b^2 = \dfrac{30976}{c^2} \\ a^2+b^2+c^2 = 329 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2 = \dfrac{30976}{c^2} - 48 \\ a^2+b^2 = 329 - c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30976}{c^2} - 48 = 329 - c^2 \Rightarrow \frac{30976}{c^2} - 48 - 329 + c^2 = 0 \Rightarrow c^2 - 377 + \frac{30976}{c^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija} \\ t = c^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t - 377 + \frac{30976}{t} = 0 \;/\cdot t \Rightarrow t^2 - 377\cdot t + 30976 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-377 \;,\; c=30976 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{377\pm\sqrt{142129-4\cdot 1\cdot 30976}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{377\pm\sqrt{142129-123904}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{377\pm\sqrt{18225}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{377\pm 135}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{377+135}{2} \\ t_2 = \dfrac{377-135}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{512}{2} \\ t_2 = \dfrac{242}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 256 \\ t_2 = 121 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji.

- $\left.\begin{matrix} t = 256 \\ t = c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c^2 = 256 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = 16 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ a + b = \dfrac{176}{16} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ a + b = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ b = 11 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ b = 11 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot (11 - a) = 24 \Rightarrow 11 \cdot a - a^2 = 24 \Rightarrow -a^2 + 11 \cdot a - 24 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 11 \cdot a + 24 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -11 \;,\; c = 24 \\ a_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = \dfrac{11 + 5}{2} \\ a_2 = \dfrac{11 - 5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = \dfrac{16}{2} \\ a_2 = \dfrac{6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 8 \\ a_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 8 \;,\; b_1 = 11 - a_1 \\ a_2 = 3 \;,\; b_2 = 11 - a_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 = 11 - 8 \\ b_2 = 11 - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = 8 \end{matrix}\right\}.$$

Dobili smo dva rješenja za duljine stranica a i b. Uobičajno je da je duljina stranice a veća od duljine stranice b. Duljine stranice kvadra su: a = 8 cm, b = 3 cm, c = 16 cm.

- $\left.\begin{matrix} t = 121 \\ t = c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c^2 = 121 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = 11 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ a + b = \dfrac{176}{11} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ a + b = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ b = 16 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot b = 24 \\ b = 16 - a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot (16 - a) = 24 \Rightarrow 16 \cdot a - a^2 = 24 \Rightarrow -a^2 + 16 \cdot a - 24 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 16 \cdot a + 24 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -16 \;,\; c = 24 \\ a_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 96}}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{160}}{2}$$ dobiju se iracionalni brojevi.

Vježba 043

Kvadar ima bazu površine 24 cm^2, omotač 352 cm^2, prostorna dijagonala dugačka je $\sqrt{329}$ cm. Izračunajte obujam kvadra.

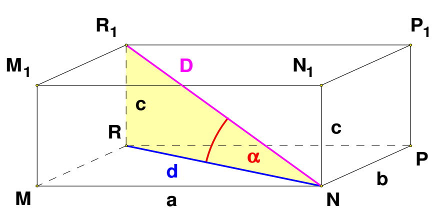
Rezultat: 384 cm^3.

Zadatak 044 (2A, TUPŠ)

Stranice baze kvadra su a = 12 cm, b = 5 cm. Prostorna dijagonala kvadra zatvara sa ravninom baze kut α = 60°. Izračunaj površinu omotača (pobočja) kvadra.

Rješenje 044

Pomoću Pitagorina poučka izračunamo d duljinu dijagonale baze kvadra:



$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 169 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow d = 13 \; cm.$$

Uočimo pravokutan trokut RNR_1.

$$tg\,\alpha = \frac{c}{d} \Rightarrow c = d \cdot tg\,\alpha \Rightarrow c = 13 \cdot tg\,60^0 \Rightarrow c = 13 \cdot \sqrt{3} \; cm.$$

Površina omotača (pobočja) iznosi:

$$P=2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c \Rightarrow P=2\cdot c\cdot(a+b) \Rightarrow P=2\cdot 13\cdot\sqrt{3}\cdot(12+5) \Rightarrow P=26\cdot\sqrt{3}\cdot 17 \Rightarrow P=442\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

Vježba 044

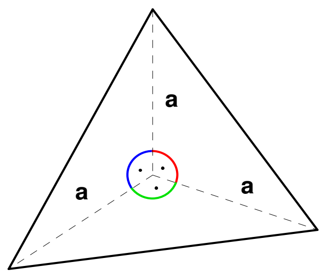
Stranice baze kvadra su a = 12 cm, b = 5 cm. Prostorna dijagonala kvadra zatvara sa ravninom baze kut α = 60°. Izračunaj obujam (volumen) kvadra.

Rezultat: $780\cdot\sqrt{3}\ cm^3.$

Zadatak 045 (Ivan, elektrotehnička škola)

Duljina bočnog brida uspravne trostrane piramide je a. Svaka dva bočna brida su okomita. Nađite obujam.

Rješenje 045



Pobočke uspravne trostrane piramide su pravokutni jednakokračni trokuti. Neka je jedna od pobočaka osnovka piramide. Tada je površina osnovke (baze):

$$B=\frac{a\cdot a}{2} \Rightarrow B=\frac{a^2}{2}.$$

Budući da je i visina (treći brid) jednaka a, v = a, slijedi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot v \Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a \Rightarrow V=\frac{a^3}{6}.$$

Vježba 045

Duljina bočnog brida uspravne trostrane piramide je 6 cm. Svaka dva bočna brida su okomita. Nađite obujam.

Rezultat: 36 cm^3.

Zadatak 046 (Anamarija, maturantica)

Nađite obujam uspravnog kvadra kojemu su površine pobočki 2 m^2, 3 m^2 i 6 m^2.

Rješenje 046

Ponovimo!

$$\text{Obujam kvadra}: V=a\cdot b\cdot c \quad , \quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b=6 \\ a\cdot c=3 \\ b\cdot c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow a\cdot b\cdot a\cdot c\cdot b\cdot c=6\cdot 3\cdot 2 \Rightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2=36 \Rightarrow (a\cdot b\cdot c)^2=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2=36\ /\sqrt{\ } \Rightarrow V=\sqrt{36} \Rightarrow V=6\ m^3.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b=6 \\ a\cdot c=3 \\ b\cdot c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz prve jednakosti izračunamo b} \\ \text{iz druge jednakosti izračunamo } c \\ \text{rezultate uvrstimo u treću jednakost} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\frac{6}{a} \\ c=\frac{3}{a} \\ b\cdot c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{a}\cdot\frac{3}{a}=2 \Rightarrow \frac{18}{a^2}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2=18\ /:2 \Rightarrow a^2=9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=\sqrt{9} \Rightarrow a=3\ m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3 \\ b=\frac{6}{a} \\ c=\frac{3}{a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=\frac{6}{3} \\ c=\frac{3}{3}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=2\ m \\ c=1\ m\end{matrix}\right\}.$$

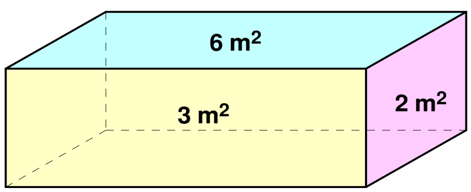
Obujam kvadra iznosi:

$$V=a\cdot b\cdot c \Rightarrow V=3\ m\cdot 2\ m\cdot 1\ m \Rightarrow V=6\ m^3.$$

3.inačica

$$\left.\begin{matrix} a\cdot b=6 \\ a\cdot c=3 \\ b\cdot c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{iz prve i druge} \\ \text{jednakosti izračunamo a}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=\frac{6}{b} \\ a=\frac{3}{c} \\ b\cdot c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{pomnožimo prvu} \\ \text{i drugu jednakost}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot a=\frac{6}{b}\cdot\frac{3}{c} \\ b\cdot c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a^2=\frac{18}{b\cdot c} \\ b\cdot c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2=\frac{18}{2} \Rightarrow a^2=9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=\sqrt{9} \Rightarrow a=3\ m \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3 \\ a=\frac{6}{b} \\ a=\frac{3}{c}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3=\frac{6}{b} \\ 3=\frac{3}{c}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=\frac{6}{3} \\ c=\frac{3}{3}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=2\ m \\ c=1\ m\end{matrix}\right\}.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$V=a\cdot b\cdot c \Rightarrow V=3\ m\cdot 2\ m\cdot 1\ m \Rightarrow V=6\ m^3.$$

Vježba 046

Nađite obujam uspravnog kvadra kojemu su površine pobočki 10 m^2, 20 m^2 i 50 m^2.

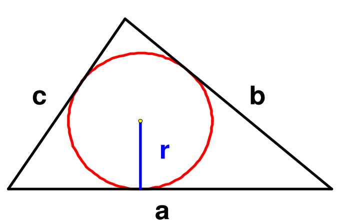
Rezultat: 100 m^3.

Zadatak 047 (Jan, Luka, Zoran, maturanti gimnazije)

Osnovka trostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice 6 cm i kraka 5 cm. Ako pobočke piramide s bazom zatvaraju kut od 45°, nađite visinu piramide.

Rješenje 047

Ponovimo!



Poluopseg trokuta: $s=\frac{a+b+c}{2}.$

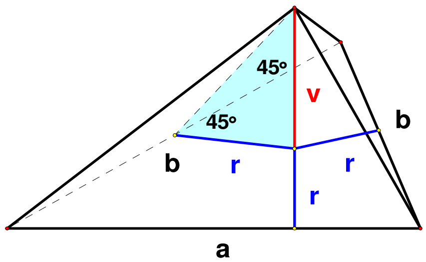
Površina trokuta pomoću Heronove formule:

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$

Površina trokuta kojemu je upisana kružnica polumjera r:

$$P=r\cdot s.$$

Budući da pobočke piramide s bazom zatvaraju kut od 45°, osjenčani trokut na slici je pravokutan jednakokračan trokut. Znači da je duljina visine v piramide jednaka duljini polumjera r upisane kružnice bazi piramide. Poluopseg osnovke je:



$$\left.\begin{array}{l} a=6\ cm\ ,\ b=5\ cm \\ s=\dfrac{a+b+b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s=\frac{a+2\cdot b}{2} \Rightarrow s=\frac{6+2\cdot 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=\frac{16}{2} \Rightarrow s=8\ cm.$$

Površina osnovke (baze) iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} s=8\ cm\ ,\ a=6\ cm\ ,\ b=5\ cm \\ P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-b)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{8\cdot(8-6)\cdot(8-5)\cdot(8-5)} \Rightarrow P=\sqrt{8\cdot 2\cdot 3\cdot 3} \Rightarrow P=\sqrt{16\cdot 9} \Rightarrow P=4\cdot 3 \Rightarrow P=12\ cm^2.$$

Visina piramide ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} v=r \\ P=r\cdot s \end{array}\right\} \Rightarrow P=v\cdot s \Rightarrow v=\frac{P}{s} \Rightarrow v=\frac{12\ cm^2}{8\ cm} \Rightarrow v=\frac{3}{2}\ cm \Rightarrow v=1.5\ cm.$$

Vježba 047

Osnovka trostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice 6 cm i kraka 5 cm. Ako pobočke piramide s bazom zatvaraju kut od 45°, nađite obujam piramide.

Rezultat: $6\ \text{m}^3$.

Zadatak 048 (Jan, Luka, Zoran, gimnazija)

Baza piramide je kvadrat stranice $a=\sqrt{2}$, a pobočke piramide su jednakostranični trokuti. Piramidu presiječemo ravninom koja prolazi vrhom piramide i dijagonalom baze. Nađite površinu presjeka.

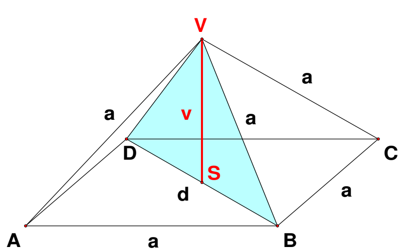
Rješenje 048

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Ako su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, njegova površina glasi (Heronova formula):

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\quad,\quad s=\frac{a+b+c}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a=\sqrt{2},$$

$$|AV|=|BV|=|CV|=|DV|=a=\sqrt{2},$$

$$|BD|=d=a\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4}=2,$$

$$|BS|=\frac{1}{2}\cdot|BD|=\frac{1}{2}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2=1\quad,\quad |SV|=v.$$

1.inačica

Budući da je piramida ABCDV presječena ravninom koja prolazi njezinim vrhom i dijagonalom baze, presjek je jednakokračan trokut DBV (ili ACV). Visina v = $|SV|$ trokuta DBV ujedno je kateta pravokutnog trokuta SBV, pa se uporabom Pitagorina poučka dobije:

$$|SV|^2=|BV|^2-|BS|^2 \Rightarrow v^2=a^2-\left(\frac{1}{2}\cdot d\right)^2 \Rightarrow v^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2=2-1 \Rightarrow v^2=1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow v=1.$$

Površina trokuta DBV je:

$$P=\frac{|DB|\cdot|SV|}{2} \Rightarrow P=\frac{d\cdot v}{2} \Rightarrow P=\frac{2\cdot 1}{2} \Rightarrow P=1.$$

2.inačica

Poluopseg trokuta DBV iznosi:

$$s=\frac{|DB|+|BV|+|DV|}{2} \Rightarrow s=\frac{d+a+a}{2} \Rightarrow s=\frac{d+2\cdot a}{2} \Rightarrow s=\frac{2+2\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow s=1+\sqrt{2} \Rightarrow s=\sqrt{2}+1.$$

Površinu trokuta DBV izračunamo Heronovom formulom:

$$\left.\begin{array}{l} s=\sqrt{2}+1\ ,\ d=2\ ,\ a=\sqrt{2} \\ P=\sqrt{s\cdot(s-d)\cdot(s-a)\cdot(s-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 1\cdot 1} \Rightarrow P=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} \Rightarrow P=\sqrt{2-1} \Rightarrow P=\sqrt{1} \Rightarrow P=1.$$

Vježba 048

Baza piramide je kvadrat stranice $a=\sqrt{2}$, a pobočke piramide su jednakostranični trokuti. Piramidu presiječemo ravninom koja prolazi vrhom piramide i dijagonalom baze. Nađite opseg presjeka.

Rezultat: $2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Zadatak 049 (Vila, maturantica gimnazije)

Za koliko će se postotaka povećati obujam kocke ako se njezino oplošje poveća za 125%?

Rješenje 049

Ponovimo!

Ako je a duljina brida kocke, tada je:

- oplošje: $O=6\cdot a^2$
- obujam: $V=a^3$.

Iz povećanja oplošja kocke nađemo duljinu novog brida a_1:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{O_1}{O}=\frac{O+\frac{125}{100}\cdot O}{O} \\ \frac{O_1}{O}=\frac{6\cdot a_1^2}{6\cdot a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{O_1}{O}=\frac{O+1.25\cdot O}{O} \\ \frac{O_1}{O}=\frac{6\cdot a_1^2}{6\cdot a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{O_1}{O}=\frac{2.25\cdot O}{O} \\ \frac{O_1}{O}=\frac{a_1^2}{a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{O_1}{O}=2.25 \\ \frac{O_1}{O}=\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a}\right)^2=2.25\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \frac{a_1}{a}=\sqrt{2.25} \Rightarrow \frac{a_1}{a}=1.5 \Rightarrow a_1=1.5\cdot a.$$

Postotak povećanja obujma kocke iznosi:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{a_1^3}{a^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{(1.5\cdot a)^3}{a^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{3.375\cdot a^3}{a^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=3.375 \Rightarrow V_1=3.375\cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1=V+2.375\cdot V \Rightarrow V_1=V+\frac{237.5}{100}\cdot V.$$

Povećanje je 237.5%.

Vježba 049

Za koliko će se postotaka povećati oplošje kocke ako se njezin obujam poveća za 237.5%?

Rezultat: 125%.

Zadatak 050 (Tanja, srednja škola)

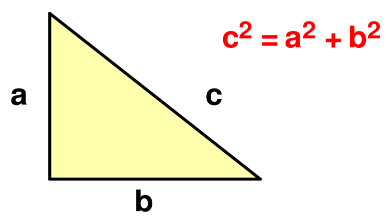
Prostorna dijagonala pravilne četverostrane prizme (osnovka je kvadrat) duga je 14 cm, duljina dijagonale jedne pobočke iznosi 10 cm. Koliki je volumen ove prizme?

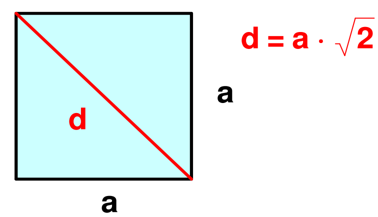
Rješenje 050

Ponovimo!

Pitagorin poučak: Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

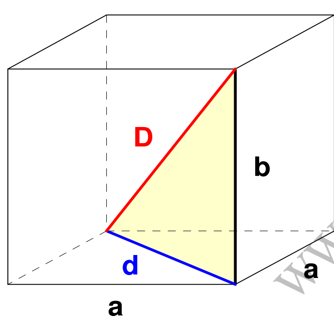
Duljina dijagonale kvadrata stranice a iznosi: $d = a \cdot \sqrt{2}$.

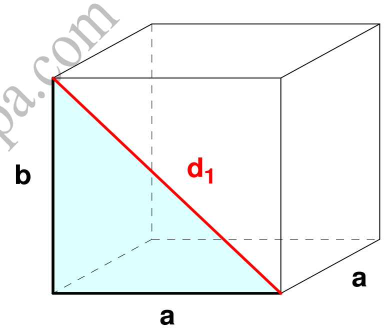




Volumen prizme s bazom (osnovkom) površine B i visinom v iznosi:

$$V = B \cdot v.$$





Sa slika vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} D^2 = d^2 + b^2 \\ d_1^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D^2 = \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 + b^2 \\ d_1^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D^2 = 2 \cdot a^2 + b^2 \\ d_1^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se a i b:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot a^2 + b^2 = D^2 \ , \ D = 14 \\ a^2 + b^2 = d_1^2 \ , \ d_1 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a^2 + b^2 = 14^2 \\ a^2 + b^2 = 10^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a^2 + b^2 = 196 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a^2 + b^2 = 196 \\ a^2 + b^2 = 100 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a^2 + b^2 = 196 \\ -a^2 - b^2 = -100 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 96 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 96 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow 96 + b^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 100 - 96 \Rightarrow b^2 = 4 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow b = 2.$$

Volumen prizme iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 96 \ , \ b = 2 \\ V = a^2 \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow V = 96 \cdot 2 \Rightarrow V = 192 \ cm^3.$$

Vježba 050

Prostorna dijagonala pravilne četverostrane prizme (osnovka je kvadrat) duga je 14 cm, duljina dijagonale jedne pobočke iznosi 10 cm. Koliko je oplošje ove prizme?

Rezultat: $O = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 96 + 4 \cdot \sqrt{96} \cdot 2 = \ldots = \left(192 + 32 \cdot \sqrt{6}\right) cm^2.$

Zadatak 051 (Miad, srednja škola)

Uspravna prizma ima za osnovicu jednakokračan trokut čiji je opseg 18 cm, a razlika između osnovice i kraka je 3 cm. Izračunaj oplošje i obujam ako je visina v prizme jednaka kraku tog trokuta koji čini njezinu bazu.

Rješenje 051

Ponovimo!

Obujam prizme s bazom površine B i visinom v iznosi:

$$V = B \cdot v.$$

Oplošje prizme sastoji se od dviju baza, i pobočja koji čini n paralelograma:

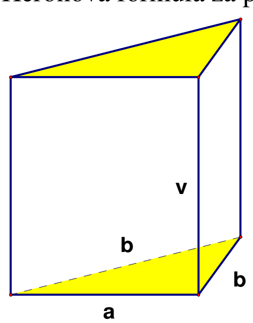
$$O = 2 \cdot B + P.$$

B računamo po formulama za površinu mnogokuta.

Za trokut ABC kažemo da je jednakokračan ako bilo koje dvije stranice trokuta imaju jednaku duljinu. Takve dvije stranice zovu se kraci tog trokuta, a preostala stranica osnovica ili baza. Opseg jednakokračnog trokuta je:

$$O = a + 2 \cdot b.$$

Heronova formula za površinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica a, b i c iznosi:



$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \;,\; s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Najprije izračunamo duljine stranica jednakokračnog trokuta:

$$\left.\begin{array}{l} O = a + 2 \cdot b \\ a - b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + 2 \cdot b = 18 \\ a = 3 + b \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + b + 2 \cdot b = 18 \Rightarrow b + 2 \cdot b = 18 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot b = 15 \;/ : 3 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 5 \\ a = 3 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 5 \\ a = 3 + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 5 \; cm \\ a = 8 \; cm \end{array}\right\}.$$

Površina baze prizme (jednakokračnog trokuta) dobije se pomoću Heronove formule:

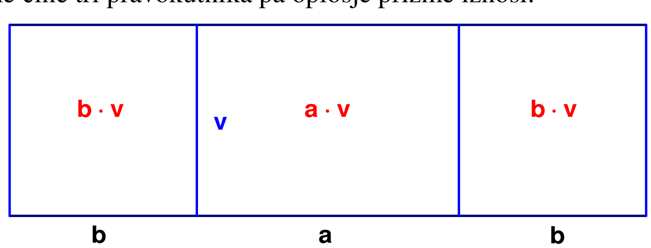
$$\left.\begin{array}{l} a = 8 \;,\; b = 5 \;,\; s = \dfrac{a + 2 \cdot b}{2} \\ B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 8 \;,\; b = 5 \;,\; s = 9 \\ B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{9 \cdot (9-8) \cdot (9-5) \cdot (9-5)} \Rightarrow B = \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4} \Rightarrow B = \sqrt{144} \Rightarrow B = 12 \; cm^2.$$

Budući da je duljina visine v prizme jednaka duljini kraka b baze, obujam prizme iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} v = b \;,\; b = 5 \;,\; B = 12 \\ V = B \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = 12 \cdot 5 \Rightarrow V = 60 \; cm^3.$$

Pobočje zadane prizme čine tri pravokutnika pa oplošje prizme iznosi:



$$O = 2 \cdot B + P \;\Rightarrow\; O = 2 \cdot B + a \cdot v + b \cdot v + b \cdot v \;\Rightarrow\; O = 2 \cdot B + a \cdot v + 2 \cdot b \cdot v \;\Rightarrow\; O = 2 \cdot B + v \cdot (a + 2 \cdot b).$$

$$\left.\begin{array}{l} B = 12 \;,\; a = 8 \;,\; b = 5 \;,\; v = 5 \\ O = 2 \cdot B + v \cdot (a + 2 \cdot b) \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot 12 + 5 \cdot (8 + 2 \cdot 5) \;\Rightarrow\; O = 114 \; cm^2.$$

Vježba 051

Bridovi baze uspravne trostrane prizme imaju duljine a = 13 cm, b = 4 cm i c = 15 cm, a njezina visina je v = 8 cm. Koliki su obujam i oplošje prizme?

Rezultat: $V = 192 \; cm^3$, $O = 304 \; cm^2$.

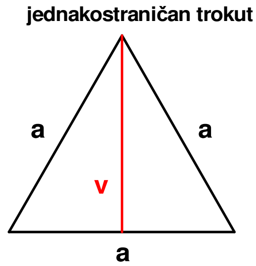
Zadatak 052 (Ico, gimnazija)

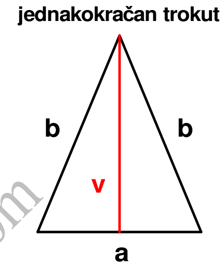
Bridom osnovke pravilne trostrane prizme položena je ravnina koja prizmu siječe u trokutu kojem je opseg 2 puta veći od opsega osnovke prizme. Koliko iznosi prikloni kut ravnine presjeka prema osnovki?

Rješenje 052

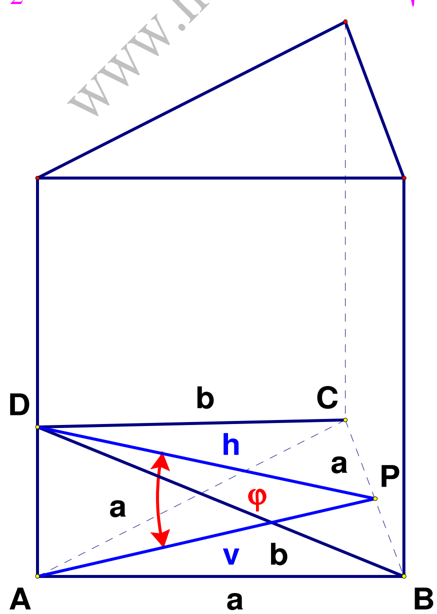
Ponovimo!

Visine trokuta.





$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \quad , \quad v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a \quad , \quad |BD| = |CD| = b \quad , \quad |AP| = v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \quad , \quad \varphi = \angle APD$$

$$|DP| = h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Prema uvjetu zadatka je opseg jednakokračnog trokuta BCD dva puta veći od opsega jednakostraničnog trokuta ABC pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O_{BCD}=a+2\cdot b \\ O_{ABC}=3\cdot a \\ O_{BCD}=2\cdot O_{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow a+2\cdot b=2\cdot 3\cdot a \Rightarrow a+2\cdot b=6\cdot a \Rightarrow 2\cdot b=6\cdot a-a \Rightarrow 2\cdot b=5\cdot a \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{5}{2}\cdot a.$$

Sada visina h trokuta BCD iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b=\frac{5}{2}\cdot a \\ h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow h=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\cdot a\right)^2-\frac{a^2}{4}} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{25\cdot a^2}{4}-\frac{a^2}{4}} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{24\cdot a^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{6\cdot a^2} \Rightarrow h=a\cdot\sqrt{6}.$$

Iz pravokutnog trokuta APD pomoću funkcije kosinus dobije se traženi kut φ:

$$\cos\varphi=\frac{|AP|}{|DP|} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{v}{h} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}}{a\cdot\sqrt{6}} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\cdot\sqrt{6}}{1}} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{18}}{2\cdot\sqrt{36}} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{18}}{2\cdot 6} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{18}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{9\cdot 2}}{12} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow \varphi=69^0\;17'\;42.7'' \approx 69^0\;18'.$$

Vježba 052

Bridom osnovke pravilne trostrane prizme položena je ravnina koja prizmu siječe u trokutu kojem je opseg 3 puta veći od opsega osnovke prizme. Koliko iznosi prikloni kut ravnine presjeka prema osnovki?

Rezultat: 77° 23'.

Zadatak 053 (Goran, gimnazija)

Zadani su osnovni bridovi uspravne trostrane piramide a = 13 cm, b = 14 cm, c = 15 cm i pobočni brid d = 20 cm. Odredi prikloni kut pobočnog brida prema bazi.

Rješenje 053

Ponovimo!

Kada su zadane sve tri stranice trokuta njegova površina računa se formulom

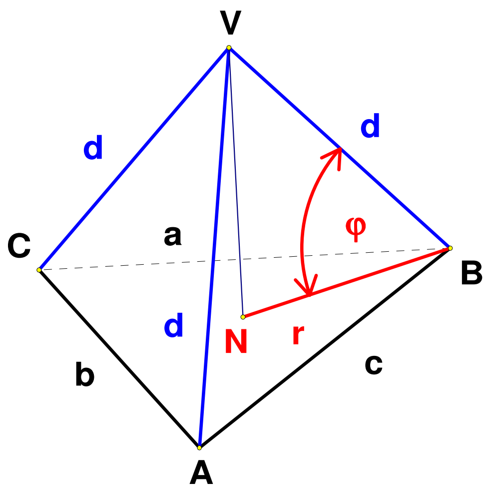
$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

gdje je s poluopseg trokuta, tj.

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Kada su zadane sve tri stranice trokuta i polumjer r opisane kružnice njegova površina računa se formulom

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |AV| = |BV| = |CV| = d \;,\; |BN| = r \;,\; \varphi = \angle NBV.$$

Pomoću Heronove formule izračuna se površina trokuta ABC (baze uspravne trostrane piramide):

$$\left.\begin{array}{l} a = 13 \;,\; b = 14 \;,\; c = 15 \\ s = \dfrac{a+b+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{13+14+15}{2} \Rightarrow s = \frac{42}{2} \Rightarrow s = 21 \; cm.$$

Površina iznosi:

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \Rightarrow P = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} \Rightarrow P = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{7056} \Rightarrow P = 84 \; cm^2.$$

Polumjer $|BN| = r$ bazi (trokutu ABC) opisane kružnice je:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot P} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 1 \cdot 15}{4 \cdot 6} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 15}{4 \cdot 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{13 \cdot 15}{4 \cdot 6} \Rightarrow r = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 2} \Rightarrow r = \frac{65}{8} \; cm.$$

Uočimo pravokutan trokut BVN pa pomoću funkcije kosinus dobijemo traženi kut φ:

$$\cos\varphi = \frac{|BN|}{|BV|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{r}{d} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{65}{8}}{20} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{65}{160} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{13}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{13}{32}\right) \Rightarrow \varphi = 66^0 1'50".$$

Vježba 053

Zadani su osnovni bridovi uspravne trostrane piramide a = 1.3 dm, b = 0.14 m, c = 150 mm i pobočni brid d = 0.20 m. Odredi prikloni kut pobočnog brida prema bazi.

Rezultat: 77° 1' 50".

Zadatak 054 (Zrinka, maturantica gimnazije)

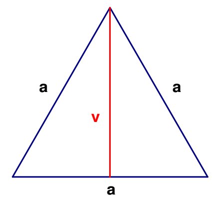
Kolika je udaljenost bridova AB i CD pravilnog tetraedra kojemu je brid 2 cm?

Rješenje 054

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

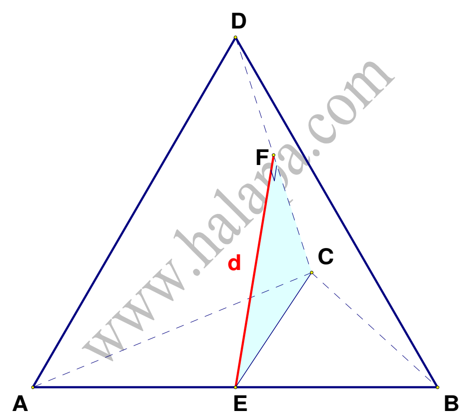
Jednakostraničan trokut



Visina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a glasi:

$$v=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

Pitagorin poučak:
Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

a = 2 cm,

$$\left|AB\right|=\left|BC\right|=\left|CA\right|=\left|AD\right|=\left|BD\right|=\left|CD\right|=a\ ,\ \left|CF\right|=\frac{1}{2}\cdot a\ ,\ \left|EC\right|=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}\ ,\ \left|EF\right|=d$$

Udaljenost bridova $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednaka je duljini okomice $\overline{EF}$ na brid $\overline{CD}$.

Uočimo pravokutan trokut ECF kojemu su katete $\overline{EF}$, $\overline{CF}$, a hipotenuza $\overline{EC}$. Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$\left|EF\right|^2=\left|EC\right|^2-\left|CF\right|^2\Rightarrow d^2=\left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\Rightarrow d^2=\frac{3\cdot a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2=\frac{3\cdot a^2-a^2}{4}\Rightarrow d^2=\frac{2\cdot a^2}{4}\Rightarrow d^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow d^2=\frac{2^2}{2}\Rightarrow d^2=2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow d=\sqrt{2}\ cm.$$

Vježba 054

Kolika je udaljenost bridova AB i CD pravilnog tetraedra kojemu je brid 4 cm?

Rezultat: $2\cdot\sqrt{2}\ cm.$

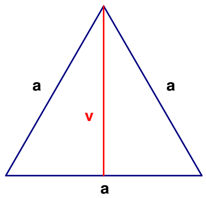
Zadatak 055 (Zrinka, maturantica gimnazije)

U pravilnom tetraedru ABCD točka E je polovište brida $\overline{BD}$, a točka F polovište brida $\overline{CD}$. Koliki je omjer volumena tetraedra AEFD i volumena četverostrane piramide EBCFA?

Rješenje 055

Ponovimo!

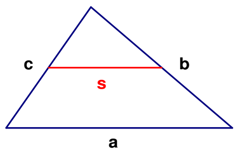
Jednakostraničan trokut



$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ – visina}$$

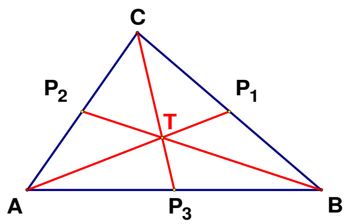
$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ – površina}$$

Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica u trokutu. Srednjica trokuta jednaka je polovini treće stranice i s njom je paralelna.



$$s = \frac{1}{2} \cdot a$$

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki koju zovemo težište. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha trokuta.



$$|CT| : |TP_3| = 2 : 1 \quad , \quad |CT| = \frac{2}{3} \cdot |CP_3| \quad , \quad |TP_3| = \frac{1}{3} \cdot |CP_3|$$

$$|BT| : |TP_2| = 2 : 1 \quad , \quad |BT| = \frac{2}{3} \cdot |BP_2| \quad , \quad |TP_2| = \frac{1}{3} \cdot |BP_2|$$

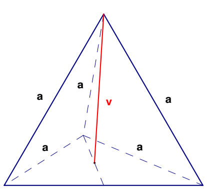
$$|AT| : |TP_1| = 2 : 1 \quad , \quad |AT| = \frac{2}{3} \cdot |AP_1| \quad , \quad |TP_1| = \frac{1}{3} \cdot |AP_1|$$

Obujam piramide

Piramida s bazom (osnovkom) B i visinom v ima obujam:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v.$$

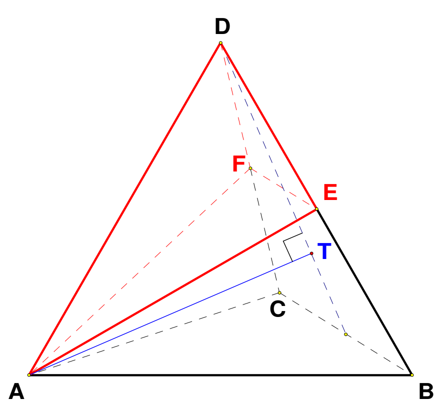
Tetraedar



Strane su sukladni jednakostranični trokuti.

Visina v i obujam V tetraedra kojemu je duljina brida a iznose:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} \quad , \quad V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = |AD| = |BD| = |CD| = a \;,\; |BE| = |ED| = |CF| = |FD| = \frac{1}{2} \cdot a$$

$$|AT| = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}$$

Obujam V tetraedra ABCD je:

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

Budući da točke E i F polove dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$, dužina $\overline{FE}$ je srednjica trokuta FED pa vrijedi:

$$|FE| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \;\Rightarrow\; |FE| = \frac{1}{2} \cdot a.$$

Površina jednakostraničnog trokuta FED iznosi:

$$P_{FED} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; P_{FED} = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; P_{FED} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16}.$$

Visina $\overline{AT}$ tetraedra ABCD ima vrijednost:

$$|AT| = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3}.$$

Ona je istodobno i visina za tetraedar AEFD i četverostranu piramidu EBCFA.
Zato je obujam V_1 tetraedra AEFD:

$$\left.\begin{array}{l} B = P_{FED} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \;,\; v = |AT| = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} \\ V_1 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{18}}{9 \cdot 16} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow V_1 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{9 \cdot 2}}{9 \cdot 16} \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{a^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{9 \cdot 16} \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 16} \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{48}.$$

Obujam V_2 četverostrane piramide EBCFA jednak je razlici obujma V tetraedra ABCD i obujma V_1 tetraedra AEFD:

$$V_2 = V - V_1 \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} - \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{48} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{4 \cdot a^3 \cdot \sqrt{2} - a^3 \cdot \sqrt{2}}{48} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{3 \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}}{48} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{16}.$$

Gledamo $V_1 : V_2$ omjer obujma tetraedra AEFD i obujma četverostrane piramide EBCFA:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{48}}{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{16}} \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{48}}{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{16}} \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \frac{16}{48} \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; V_1 : V_2 = 1 : 3.$$

Vježba 055

U pravilnom tetraedru ABCD točka E je polovište brida $\overline{BD}$, a točka F polovište brida $\overline{CD}$. Koliki je omjer volumena četverostrane piramide EBCFA i volumena tetraedra AEFD?

Rezultat: 3 : 1.

Zadatak 056 (Zrinka, maturantica gimnazije)

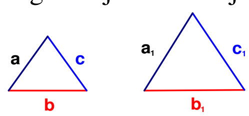
Baza uspravne trostrane piramide je jednakostraničan trokut stranice 10 cm, a visina ima duljinu 15 cm. U nju je upisana jednakobridna trostrana prizma tako da joj tri vrha leže u bazi piramide, a preostala 3 na njezinim bočnim bridovima. Nađi obujam prizme.

Rješenje 056

Ponovimo!

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.



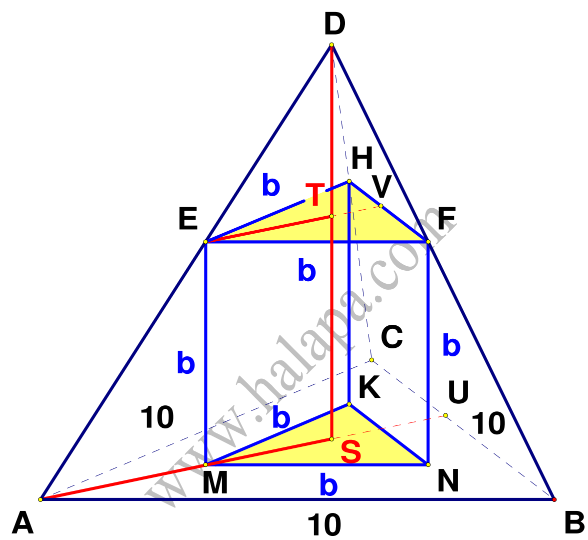
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$$

Obujam prizme

Obujam prizme s bazom površine B i visinom v iznosi:

$$V=B\cdot v.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CA|=10\ ,\ |SD|=15$$

$$|MN|=|NK|=|KM|=|ME|=|NF|=|KH|=|EF|=|FH|=|HE|=|ST|=b$$

$$|BU|=|UC|=5\ ,\ |FV|=|VH|=\frac{1}{2}\cdot b\ ,\ |TD|=|SD|-|ST|=15-b$$

Budući da je trokut ABC jednakostraničan, dužina $\overline{AU}$ je njegova težišnica, a točka S težište pa vrijedi:

$$|AS|=\frac{2}{3}\cdot|AU| \Rightarrow |AS|=\frac{2}{3}\cdot\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |AS|=\frac{2}{3}\cdot\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |AS|=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Budući da je trokut EFH jednakostraničan, dužina $\overline{EV}$ je njegova težišnica, a točka T težište pa vrijedi:

$$|ET|=\frac{2}{3}\cdot|EV| \Rightarrow |ET|=\frac{2}{3}\cdot\frac{b\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |ET|=\frac{2}{3}\cdot\frac{b\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |ET|=\frac{b\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Iz sličnosti trokuta ΔASD i ΔETD (jer imaju iste kutove) dobije se razmjer:

$$\left| ET \right| : \left| TD \right| = \left| AS \right| : \left| SD \right| \Rightarrow \left| ET \right| \cdot \left| SD \right| = \left| TD \right| \cdot \left| AS \right| \Rightarrow \frac{b \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot 15 = (15 - b) \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \; / \cdot \frac{3}{5 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot b = 2 \cdot (15 - b) \Rightarrow 3 \cdot b = 30 - 2 \cdot b \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot b = 30 \Rightarrow 5 \cdot b = 30 \; /: 5 \Rightarrow b = 6 \; cm.$$

Površina jednakostraničnog trokuta MNK je:

$$P_{MNK} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Obujam prizme MNKEFH iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} B = P_{MNK} = \dfrac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \;\;, \; v = b \\ V = B \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot b \Rightarrow V = \frac{b^3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 54 \cdot \sqrt{3} \; cm^3.$$

Vježba 056

Baza uspravne trostrane piramide je jednakostraničan trokut stranice 20 cm, a visina ima duljinu 30 cm. U nju je upisana jednakobridna trostrana prizma tako da joj tri vrha leže u bazi piramide, a preostala 3 na njezinim bočnim bridovima. Nađi obujam prizme.

Rezultat: $432 \cdot \sqrt{3} \; cm^3.$

Zadatak 057 (Mare :P, maturantica gimnazije)

Osnovka piramide je trokut sa stranicama duljine 15, 16 i 17 cm. Bočni bridovi piramide s osnovkom zatvaraju kut od 45 °. Koliki je volumen piramide?

Rješenje 057

Ponovimo!

Nasuprot jednakim kutovima trokuta nalaze se jednake stranice:

$$\alpha = \beta \Rightarrow a = b \quad , \quad \alpha = \gamma \Rightarrow a = c \quad , \quad \beta = \gamma \Rightarrow b = c.$$

Površina B trokuta kojem su zadane duljine stranica a, b, c i polumjer r opisane kružnice dana je izrazom:

$$B = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot B}.$$

Elementi piramide

Osnovka ili baza piramide mnogokut je B. Točku V nazivamo vrhom piramide. Visina piramide udaljenost je vrha V do ravnine baze. Piramida s bazom B i visinom v ima obujam:

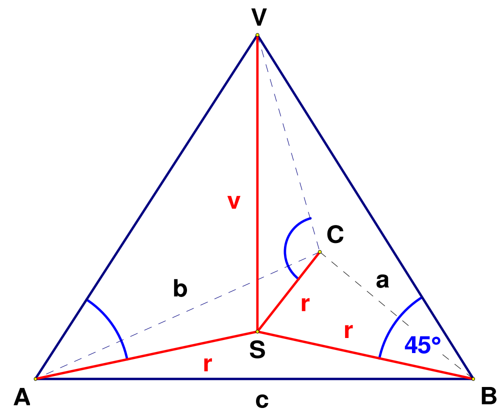
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v.$$

⚠ Ako su svi bočni bridovi neke piramide jednake duljine, onda vrijede i sljedeća međusobno ekvivalentna svojstva:

1) Svi bočni bridovi piramide s ravninom osnovke zatvaraju jednake kutove.
2) Svi bočni bridovi piramide s visinom piramide zatvaraju jednake kutove.
3) Osnovci piramide možemo opisati kružnicu, a središte te kružnice ortogonalna je projekcija vrha piramide na ravninu osnovke.

⚠ Ako sve bočne strane neke piramide s ravninom osnovke zatvaraju jednake kutove, onda vrijede i sljedeća međusobno ekvivalentna svojstva:

1) Visine svih bočnih strana imaju jednake duljine.
2) Visina piramide sa svim pobočkama zatvara jednake kutove.
3) Osnovci piramide možemo upisati kružnicu, a središte te kružnice nožište je visine piramide.



Sa slike vidi se:

$$\left|AB\right| = c = 15\ cm\ ,\ \left|BC\right| = a = 16\ cm\ ,\ \left|CA\right| = b = 17\ cm\ ,\ \angle SBV = \angle SCV = \angle SAV = 45^0$$

$$\left|AS\right| = \left|BS\right| = \left|CS\right| = r \text{ polumjer opisane kružnice}\ ,\ \left|VS\right| = v$$

Uočimo pravokutne trokute ΔASV, ΔBSV i ΔCSV. Budući da je

$$\angle SAV = \angle SVA = 45^0\ ,\ \angle SBV = \angle SVB = 45^0\ ,\ \angle SCV = \angle SVC = 45^0,$$

trokuti su pravokutni i jednakokračni pa je visina v piramide ABCV jednaka polumjeru r opisane kružnice trokutu ABC:

v = r.

Volumen piramide iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot B}\ ,\ r = v \\ V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot B} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot B} \Rightarrow V = \frac{1}{12} \cdot a \cdot b \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{12} \cdot 16\ cm \cdot 17\ cm \cdot 15\ cm \Rightarrow V = 340\ cm^3.$$

Vježba 057

Osnovka piramide je trokut sa stranicama duljine 30, 32 i 34 cm. Bočni bridovi piramide s osnovkom zatvaraju kut od 45 °. Koliki je volumen piramide?

Rezultat: $2720\ cm^3$.

Zadatak 058 (Pajo, maturant)

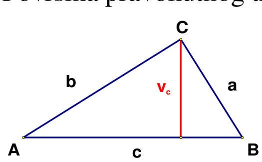
Izračunati udaljenost vrha kocke, površine $441\ cm^2$, od prostorne dijagonale.

Rješenje 058

Ponovimo!

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}\ ,\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

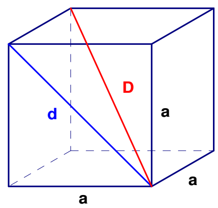
Površina pravokutnog trokuta ABC:



$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid a, tada je:

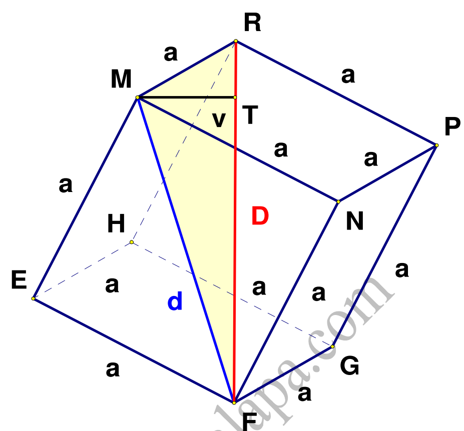


- obujam $V = a^3$
- oplošje $O = 6 \cdot a^2$
- plošna dijagonala $d = a \cdot \sqrt{2}$
- prostorna dijagonala $D = a \cdot \sqrt{3}$.

Iz zadanog oplošja kocke izračunamo brid a:

$$\left.\begin{array}{l} O = 6 \cdot a^2 \\ O = 441 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot a^2 = 441 \ /:6 \Rightarrow a^2 = \frac{441}{6} \Rightarrow a^2 = \frac{147}{2} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{\frac{147}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow a = \sqrt{\frac{49 \cdot 3}{2}} \Rightarrow a = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \ cm.$$



Sa slike vidi se:

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = |EM| = |FN| = |GP| = |HR| = |MN| = |NP| = |PR| = |RM| = a$$

$$|FM| = d = a \cdot \sqrt{2} \quad , \quad |FR| = D = a \cdot \sqrt{3} \quad , \quad |MT| = v.$$

Uočimo pravokutan trokut FRM i uporabom formula za njegovu površinu izračunamo udaljenost vrha kocke v od prostorne dijagonale.

$$\left.\begin{array}{l} P_{FRM} = \frac{|RM| \cdot |FM|}{2} \\ P_{FRM} = \frac{|FR| \cdot |MT|}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_{FRM} = \frac{a \cdot d}{2} \\ P_{FRM} = \frac{D \cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_{FRM} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{2} \\ P_{FRM} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_{FRM} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{2} \\ P_{FRM} = \frac{a \cdot v \cdot \sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a \cdot v \cdot \sqrt{3}}{2} \ / \cdot \frac{2}{a \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow v = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow v = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right] \Rightarrow v = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow v = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} \Rightarrow v = 7 \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} \Rightarrow v = 7 \cdot 1 \Rightarrow v = 7 \ cm.$$

Vježba 058

Izračunati udaljenost vrha kocke, površine 225 cm^2, od prostorne dijagonale.

Rezultat: 5 cm.

Zadatak 059 (Mirjana, srednja škola)

Oplošja dviju kocki odnose se kao 3 : 2. Ako je volumen veće kocke 27 cm^3, nađi duljinu brida manje kocke.

Rješenje 059

Ponovimo!

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y} \quad , \quad \sqrt{x^2}=x \; , \; x\geq 0 \quad , \quad \sqrt[3]{x^3}=x \quad , \quad x\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x^2\cdot x}=\sqrt{x^3}.$$

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova. Ako kocka ima brid duljine a, tada je:

- obujam (volumen) $V=a^3$
- oplošje $O=6\cdot a^2$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Za razmjer vrijedi:

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a^k:b^k=c^k:d^k \quad , \quad a:b=c:d \;\Rightarrow\; \sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{c}:\sqrt{d}.$$

1.inačica

Označimo sa O_1 oplošje veće kocke, a sa O_2 oplošje manje kocke. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{matrix} O_1=6\cdot a_1^2 \; , \; O_2=6\cdot a_2^2 \\ O_1:O_2=3:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6\cdot a_1^2:6\cdot a_2^2=3:2 \Rightarrow \left(6\cdot a_1^2:6\right):\left(6\cdot a_2^2:6\right)=3:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2:a_2^2=3:2 \Rightarrow a_1^2:a_2^2=3:2 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow \sqrt{a_1^2}:\sqrt{a_2^2}=\sqrt{3}:\sqrt{2} \Rightarrow a_1:a_2=\sqrt{3}:\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cdot a_2=\sqrt{2}\cdot a_1.$$

Budući da je zadan obujam (volumen) veće kocke, dobije se:

$$\left.\begin{matrix} V_1=27 \\ V_1=a_1^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1^3=27 \Rightarrow a_1^3=27 \; /\sqrt[3]{\;} \Rightarrow a_1=\sqrt[3]{27} \Rightarrow a_1=\sqrt[3]{3^3} \Rightarrow a_1=3.$$

Duljina brida manje kocke je:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{3}\cdot a_2=\sqrt{2}\cdot a_1 \\ a_1=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot a_2=3\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot a_2=3\cdot\sqrt{2} \; /:\sqrt{3} \Rightarrow a_2=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow a_2=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_2=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a_2=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a_2=\sqrt{6}\; cm.$$

2.inačica

Označimo sa O_1 oplošje veće kocke, a sa O_2 oplošje manje kocke. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = 6 \cdot a_1^2 \ , \ O_2 = 6 \cdot a_2^2 \\ O_1 : O_2 = 3 : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot a_1^2 : 6 \cdot a_2^2 = 3 : 2 \Rightarrow \left(6 \cdot a_1^2 : 6\right) : \left(6 \cdot a_2^2 : 6\right) = 3 : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 : a_2^2 = 3 : 2 \Rightarrow a_1^2 : a_2^2 = 3 : 2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{a_1^2} : \sqrt{a_2^2} = \sqrt{3} : \sqrt{2} \Rightarrow a_1 : a_2 = \sqrt{3} : \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 : a_2 = \sqrt{3} : \sqrt{2} \ /^3 \Rightarrow a_1^3 : a_2^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3 : \left(\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 = 27 \\ V_1 = a_1^3 \end{bmatrix} \Rightarrow 27 : a_2^3 = \sqrt{3^3} : \sqrt{2^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^3} \cdot a_2^3 = 27 \cdot \sqrt{2^3} \Rightarrow \sqrt{3^3} \cdot a_2^3 = 27 \cdot \sqrt{2^3} \ /: \sqrt{3^3} \Rightarrow a_2^3 = \frac{27 \cdot \sqrt{2^3}}{\sqrt{3^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{bmatrix} \Rightarrow a_2^3 = \frac{27 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 2}}{\sqrt{3^2 \cdot 3}} \Rightarrow a_2^3 = \frac{27 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow a_2^3 = \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2^3 = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow a_2^3 = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_2^3 = \frac{18 \cdot \sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2^3 = \frac{18 \cdot \sqrt{6}}{3} \Rightarrow a_2^3 = 6 \cdot \sqrt{6} \Rightarrow a_2^3 = \sqrt{6^2 \cdot 6} \Rightarrow a_2^3 = \sqrt{6^3} \Rightarrow a_2^3 = \left(\sqrt{6}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2^3 = \left(\sqrt{6}\right)^3 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow a_2 = \sqrt{6} \ cm.$$

Vježba 059

Oplošja dviju kocki odnose se kao 6 : 4. Ako je volumen veće kocke 27 cm³, nađi duljinu brida manje kocke.

Rezultat: $\sqrt{6}$ *cm.*

Zadatak 060 (Ivana, gimnazija)

Koliki kut zatvaraju dijagonale dviju strana kocke povučene iz istog vrha?

Rješenje 060

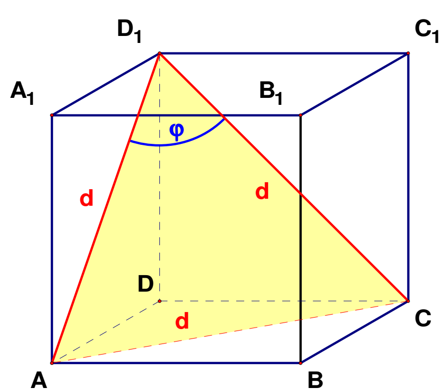
Ponovimo!

Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Svi njegovi unutarnji kutovi jednaki su, jer se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi. Budući da je zbroj sva tri kuta 180°, slijedi da svaki kut iznosi 60°.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

1.inačica



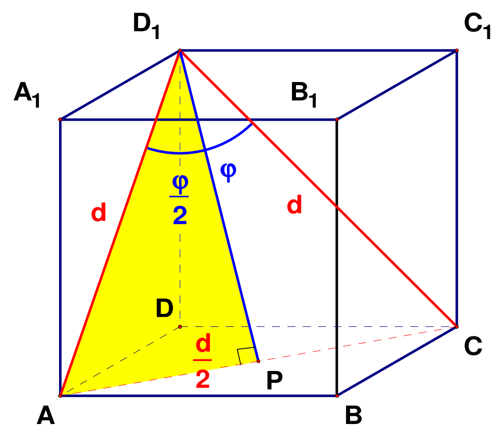
Sa slike vidi se

$$\left|D_1A\right| = \left|D_1C\right| = \left|AC\right| = d.$$

Uočimo dijagonale $\overline{D_1A}$ i $\overline{D_1C}$ kojima je D_1 zajednički vrh. Budući da je trokut ACD_1 jednakostraničan, znači da je kut između dijagonala $\overline{D_1A}$ i $\overline{D_1C}$ jednak

$$\varphi = 60^0.$$

2.inačica



Sa slike vidi se

$$\left|D_1A\right| = \left|AC\right| = d \quad , \quad \left|AP\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|AC\right| = \frac{1}{2} \cdot d.$$

Uočimo pravokutan trokut APD_1. Tada je:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\left|AP\right|}{\left|D_1A\right|} \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot d}{d} \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot d}{d} \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 30^0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 30^0 \; / \cdot 2 \Rightarrow \varphi = 60^0.$$

Vježba 060

Koliki je kut između dvije prostorne dijagonale kocke?

Rezultat: 70° 31' 44".