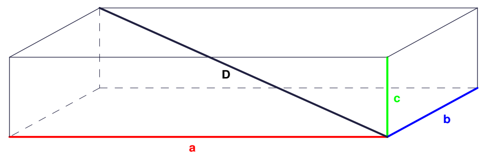
Zadatak 001 (Marko, gimnazija)

Bridovi kvadra odnose se kao 1 : 2 : 3, a njegova dijagonala iznosi $4\sqrt{14}$ cm. Koliki je obujam?

Rješenje 001

Duljina D prostorne dijagonale kvadra iznosi:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ .$$



Iz produženog razmjera:

$$a : b : c = 1 : 2 : 3$$

slijedi

$$a = k,\ b = 2k,\ c = 3k.$$

Faktor proporcionalnosti k odredit ćemo iz formule za dijagonalu:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{k^2 + 4k^2 + 9k^2} =$$

$$= \sqrt{14k^2} = k \cdot \sqrt{14}.$$

Budući da je dijagonala zadana D = $4\sqrt{14}$

slijedi

$$k \cdot \sqrt{14} = 4 \cdot \sqrt{14}\ \ /:\sqrt{14} \Rightarrow k = 4.$$

Sada je

$$a = 4\text{ cm},\ b = 2 \cdot 4\text{ cm} = 8\text{ cm},\ c = 3 \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}.$$

$$V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 8 \cdot 12\text{ cm}^3 = 384\text{ cm}^3.$$

Vježba 001

Bridovi kvadra odnose se kao 2 : 3 : 6, a njegova dijagonala iznosi 42 cm. Koliki je obujam?

Rezultat: $V = 7\,776\text{ cm}^3$.

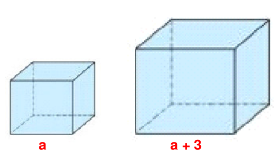
Zadatak 002 (Zen, gimnazija)

Ako se brid kocke poveća za 3 cm, oplošje joj se poveća za 198 cm^2. Izračunajte obujam kocke.

Rješenje 002

Oplošje kocke je:

$$O = 6a^2.$$



Ako se brid kocke poveća za 3 cm, onda je oplošje:

$$O_1 = 6(a + 3)^2.$$

Budući da je razlika među oplošjima 198 cm^2, pišemo:

$$O_1 - O = 198 \;\Rightarrow\; 6(a + 3)^2 - 6a^2 = 198\ /:6 \;\Rightarrow\; (a + 3)^2 - a^2 = 33 \;\Rightarrow\; a^2 + 6a + 9 - a^2 = 33 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6a = 24\ /:6 \;\Rightarrow\; a = 4.$$

Volumen kocke je: $V = a^3 = 4^3 = 64\text{ cm}^3$.

Vježba 002

Ako se brid kocke poveća za 2 cm, oplošje joj se poveća za 144 cm^2. Izračunajte obujam kocke.

Rezultat: $V = 125\ cm^3.$

Zadatak 003 (Dunja, gimnazija)

Za koliko će se postotaka povećati obujam (volumen) kocke ako se njezino oplošje poveća za 125%?

Rješenje 003

1.inačica

Ako s a označimo stranicu kocke, onda su oplošje i obujam (volumen):

$$O = 6 \cdot a^2, \quad V = a^3.$$

Ako s b označimo stranicu uvećane kocke, tada su oplošje i obujam (volumen):

$$O = 6 \cdot b^2, \quad V = b^3.$$

Budući da je oplošje uvećane kocke za 125% veće od oplošja zadane kocke, pišemo:

$$O_1 = O + \frac{125}{100} \cdot O \Rightarrow O_1 = 2.25 \cdot O \Rightarrow 6b^2 = 2.25 \cdot 6a^2 \quad / : 6 \Rightarrow b^2 = 2.25a^2 \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow b = 1.5a.$$

Za obujam (volumen) uvećane kocke vrijedi:

$$V_1 = b^3 = (1.5a)^3 = 3.375 \cdot a^3 = 3.375 \cdot V = V + 2.375 \cdot V.$$

Obujam (volumen) se poveća za 237.5%.

2.inačica

Iz formula za oplošje i obujam (volumen) kocke slijedi još jedna formula za obujam (volumen):

$$\left.\begin{matrix} O = 6a^2 \\ V = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = \frac{O}{6} \\ V = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \sqrt{\frac{O}{6}} \\ V = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3 = \sqrt{\frac{O^3}{216}}.$$

Budući da je oplošje uvećane kocke za 125% veće od oplošja zadane kocke, pišemo:

$$O_1 = O + \frac{125}{100} \cdot O \Rightarrow O_1 = 2.25 \cdot O.$$

Za obujam (volumen) uvećane kocke tada vrijedi:

$$V_1 = \sqrt{\frac{O_1^3}{216}} = \sqrt{\frac{(2.25 \cdot O)^3}{216}} = \sqrt{\frac{2.25^3 \cdot O^3}{216}} = \sqrt{2.25^3} \cdot \sqrt{\frac{O^3}{216}} = 3.375 \cdot V = V + 2.375 \cdot V.$$

Obujam (volumen) se poveća za 237.5%.

Vježba 003

Za koliko će se postotaka povećati obujam (volumen) kocke ako se njezino oplošje poveća za 156%?

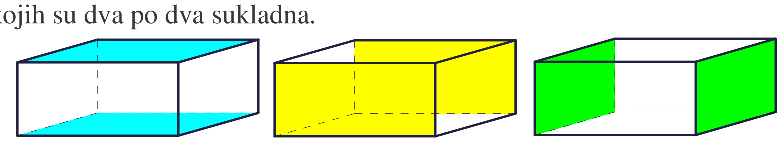
Rezultat: 309.6%.

Zadatak 004 (Sanja, gimnazija)

Površine strana kvadra jednake su 20 cm^2, 28 cm^2 i 35 cm^2. Koliki je obujam kvadra?

Rješenje 004

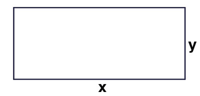
Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Kvadar je omeđen s 6 pravokutnika, od kojih su dva po dva sukladna.



Ako su a, b i c duljine njegovih bridova onda je obujam

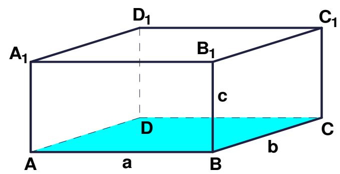
$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Strane kvadrata su pravokutnici, a površina pravokutnika je:

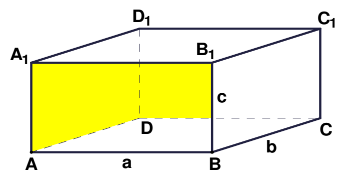


$$P = x \cdot y.$$

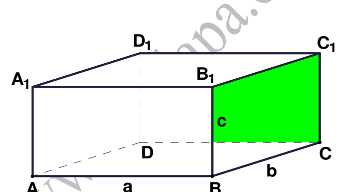
Budući da su zadane površine strana kvadra pišemo:



$$P_{ABCD} = a \cdot b = 35\ cm^2,$$



$$P_{ABB_1A_1} = a \cdot c = 28\ cm^2,$$



$$P_{BCC_1B_1} = b \cdot c = 20\ cm^2.$$

Dobili smo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} a \cdot b = 35, \\ a \cdot c = 28, \\ b \cdot c = 20. \end{cases}$$

Pomnožimo li jednadžbe dobijemo:

$$ab \cdot ac \cdot bc = 35 \cdot 28 \cdot 20,$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 35 \cdot 28 \cdot 20,$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = 35 \cdot 28 \cdot 20,$$

$$V^2 = 35 \cdot 28 \cdot 20,$$

$$V^2 = 35 \cdot 28 \cdot 20 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow V = \sqrt{35 \cdot 28 \cdot 20} = [\text{rastavimo brojeve na proste faktore}] =$$

$$= \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 2^4} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2^4} = 5 \cdot 7 \cdot 2^2 = 140\ cm^3.$$

Vježba 004

Površine strana kvadra jednake su 21 cm^2, 14 cm^2 i 6 cm^2. Koliki je obujam kvadra?

Rezultat: $V = 42\ cm^3$.

Zadatak 005 (Ines, gimnazija)

Za koliko centimetara treba povećati duljinu brida kocke a = 5 da bi se njezino oplošje povećalo 156%?

Rješenje 005

1.inačica

Duljina brida manje kocke je a = 5 pa vrijedi:

$$a = 5 \quad \Rightarrow \quad O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150.$$

Budući da je oplošje kocke 150% povećano slijedi:

$$O' = O + \frac{156}{100} \cdot O = 150 + 1.56 \cdot 150 = 2.56 \cdot 150 = 384.$$

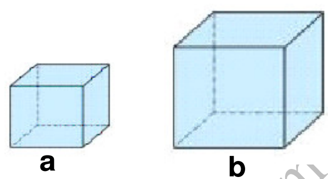
Ako sa slovom b označimo duljinu brida veće kocke, tada je:

$$6b^2 = 384 \; /:6 \;\Rightarrow\; b^2 = 64 \; /\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; b = 8.$$

Razlika duljina bridova iznosi:

$$b - a = 8 - 5 = 3.$$

Duljinu brida treba povećati za 3 cm.



2.inačica

Oplošje veće kocke je 156% povećano u odnosu na manju kocku pa vrijedi:

$$O' = O + 1.56 \cdot O = 2.56 \cdot O.$$

Gledamo količnike:

$$\frac{O'}{O} = \frac{6b^2}{6a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{O'}{O} = \frac{2.56 \cdot O}{O} = 2.56. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$\frac{b^2}{a^2} = 2.56 \; /\cdot a^2 \;\Rightarrow\; b^2 = 2.56 \cdot a^2 \; /\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; b = 1.6 \cdot a = a + 0.60 \cdot a.$$

Duljina brida veće kocke povećana je 60% u odnosu na duljinu brida manje kocke. Tada je:

$$P = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{5 \cdot 60}{100} = \frac{300}{100} = 3.$$

Treba povećati za 3 cm.

Vježba 005

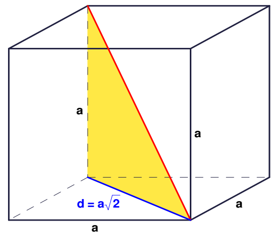
Za koliko centimetara treba povećati duljinu brida kocke a = 10 da bi se njezino oplošje povećalo 156%?

Rezultat: 6 cm.

Zadatak 006 (Mario, tehnička škola)

Plošna i prostorna dijagonala kocke iz istog vrha kocke, određuju s bridom duljine a trokut. Kolika je površina trokuta?

Rješenje 006



Dobiveni trokut je pravokutan. Površina pravokutnog trokuta računa se po formuli:

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Zato pišemo:

$$P = \frac{a \cdot d}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

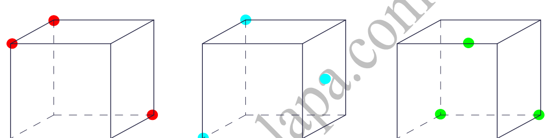
Vježba 006

Plošna i prostorna dijagonala kocke iz istog vrha kocke, određuju s bridom duljine $\sqrt{2}$ cm trokut. Kolika je površina trokuta?

Rezultat: $\sqrt{2}$ cm^2.

Zadatak 007 (Fox, gimnazija)

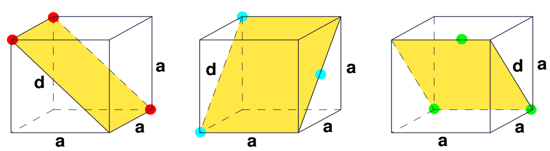
Konstruiraj presjek kocke ravninom što je određena s tri istaknute točke.



Ako je duljina brida kocke jednaka a, kolika je površina presjeka?

Rješenje 007

U sva tri slučaja presjek kocke je pravokutnik sa stranicama a i $d = a\sqrt{2}$.

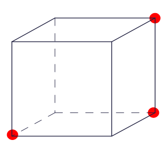


Površina iznosi:

$$P = a \cdot d = a^2 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 007

Konstruiraj presjek kocke ravninom što je određena s tri istaknute točke.



Ako je duljina brida kocke jednaka a, kolika je površina presjeka?

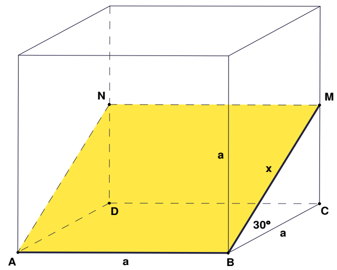
Rezultat: $P = a \cdot d = a^2 \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 008 (Sanja, gimnazija)

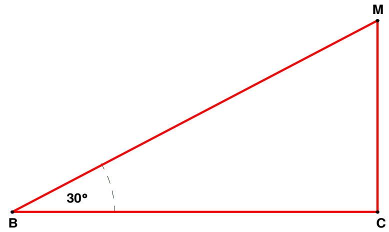
Kocka duljine brida a presječena je ravninom koja prolazi osnovnim bridom pod kutom 30º prema ravnini osnovke (baze). Izračunaj površinu presjeka.

Rješenje 008

Presjek je pravokutnik ABMN s duljinama stranica $|AB| = a$ i $|BM| = x$.



Duljinu stranice BM odredit ćemo iz pravokutnog trokuta BCM. Kateta je $|BC| = a$, a kut iznosi 30º. Lako se izračuna duljina hipotenuze $|BM|$:



$$\cos 30^0 = \frac{|BC|}{|BM|} \Rightarrow |BM| = \frac{|BC|}{\cos 30^0} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Površina pravokutnika ABMN iznosi:

$$P = |AB| \cdot |BM| = a \cdot \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a^2.$$

Vježba 008

Kocka duljine brida a presječena je ravninom koja prolazi osnovnim bridom pod kutom 60º prema ravnini osnovke (baze). Izračunaj površinu presjeka.

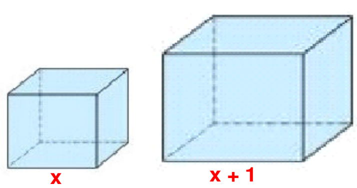
Rezultat: $P = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a^2.$

Zadatak 009 (Tea, gimnazija)

Ako se svaki brid kocke poveća za 1 m, obujam se poveća 125 puta. Koliki je brid kocke?

Rješenje 009

Obujam kocke je $V = a^3$. Označimo duljinu brida kocke slovom x. Tada je obujam $V = x^3$. Ako se svaki brid poveća 1 m, obujam iznosi $V = (x + 1)^3$.



Budući da se obujam povećao 125 puta, pišemo:

$$(x+1)^3 = 125 \cdot x^3 \quad / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow x+1 = 5x \Rightarrow 4x = 1 \quad /:4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ m = \frac{1}{4} \cdot 100\ cm = 25cm.$$

Vježba 009

Ako se svaki brid kocke poveća za 3 m, obujam se poveća 64 puta. Koliki je brid kocke?

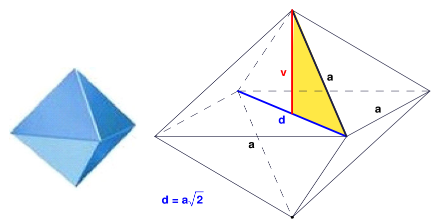
Rezultat: 1 m.

Zadatak 010 (Siniša, tehnička škola)

Nađite obujam oktaedra s bridom a.

Rješenje 010

Oktaedar je jedno od 5 pravilnih tijela i omeđen je s 8 jednakostraničnih trokuta.



Pravilan oktaedar pravilan je poliedar sa stranama koje su sukladni jednakostranični trokuti. Sa slike vidimo da se oktaedar sastoji od dvije pravilne četverostrane piramide kojoj su strane (pobočke) jednakostranični trokuti, a koje imaju zajedničku osnovku (bazu). Baza je kvadrat. Odredimo visinu:

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{2 \cdot a^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{a^2}{2} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow v = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Obujam oktaedra jednak je dvostrukom obujmu piramide:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot B \cdot v = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

Vježba 010

Nađite obujam oktaedra s bridom $\sqrt{2}.$

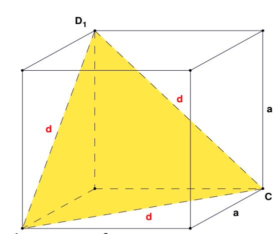
Rezultat: $\frac{4}{3}.$

Zadatak 011 (Ivan, gimnazija)

Dijagonalom $\overline{AC}$ osnovke kocke i njezinim vrhom D_1 položena je ravnina. Ako je površina presjeka kocke tom ravninom jednaka $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2,$ koliki je obujam kocke?

Rješenje 011

Presjek kocke je jednakostraničan trokut ACD_1 sa stranicom duljine $d = a\sqrt{2}.$



Budući da se površina jednakostraničnog trokuta računa po formuli

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

u ovom slučaju vrijedi:

$$\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3} \;/\cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2a^2 = 32 \;/:2 \Rightarrow a^2 = 16 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow a = 4$$

Obujam kocke jednak je:

$$V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3.$$

Vježba 011

Dijagonalom $\overline{AC}$ osnovke kocke i njezinim vrhom D_1 položena je ravnina. Ako je površina presjeka kocke tom ravninom jednaka $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, koliki je obujam kocke?

Rezultat: $V = 8 \text{ cm}^3$.

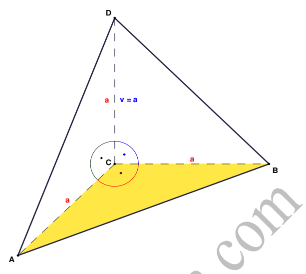
Zadatak 012 (Sanja, gimnazija)

Duljina bočnog brida uspravne trostrane piramide je a. Svaka dva bočna brida su okomita. Nađite obujam.

Rješenje 012

Osnovka (baza) uspravne trostrane piramide ABCD je jednakokračan pravokutan trokut ABC pa je površina osnovke jednaka:

$$B = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$



Budući da je i visina v jednaka a (treći brid), obujam iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Vježba 012

Duljina bočnog brida uspravne trostrane piramide je 6 cm. Svaka dva bočna brida su okomita. Nađite obujam.

Rezultat: $V = 36 \text{ cm}^3$.

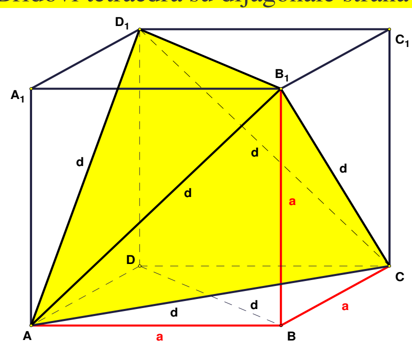
Zadatak 013 (Tin, gimnazija)

Četiri vrha kocke, od kojih nikoja dva ne leže na istom bridu, određuju pravilni tetraedar. Koliko je oplošje tog tetraedra ako je duljina brida kocke jednaka 2?

Rješenje 013

Tetraedar: trostrana piramida; često se podrazumijeva pravilna trostrana piramida, tj. tijelo omeđeno sa četiri jednakostranična trokuta; jedno od pet Platonovih savršenih geometrijskih tijela.

Pravilni tetraedar (trostrana piramida kojoj su svi bridovi jednaki) ima 4 vrha, 6 bridova i 4 strane. Strane su jednakostranični trokuti. Bridovi tetraedra su dijagonale strana kocke.



Bridovi tetraedra odgovaraju dijagonalama strana kvadrata: $d = a \cdot \sqrt{2}.$ Površina jednakostraničnog trokuta stranice a glasi:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Tada je oplošje tetraedra jednako:

$$O = 4 \cdot \frac{d^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = d^2 \cdot \sqrt{3} = \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot \sqrt{3}.$$

Vježba 013

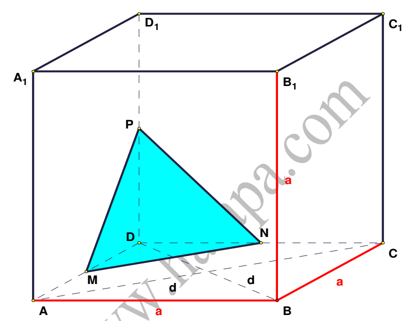
Četiri vrha kocke, od kojih nikoja dva ne leže na istom bridu, određuju pravilni tetraedar. Koliko je oplošje tog tetraedra ako je duljina brida kocke jednaka 4?

Rezultat: $32 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 014 (Sanjica, gimnazija)

Konstruiramo polovišta tri brida iz istog vrha kocke. Izračunajte površinu lika određenog polovištima.

Rješenje 014



Trokut MNP je jednakostraničan trokut.

$$\left| MN \right| = \left| NP \right| = \left| PM \right| = \frac{d}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Duljinu stranice MN možemo izračunati na dva načina:

- Uporabimo Pitagorin poučak na pravokutnom trokutu MND. Tada su katete $\left| ND \right| = \left| DM \right| = \frac{a}{2},$ a hipotenuza je $\left| MN \right| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$
- Uočimo trokut ACD za koji vrijedi: $\left| AC \right| = a\sqrt{2}, \ \left| CD \right| = \left| DA \right| = a.$ Tada je MN srednjica trokuta i za nju vrijedi: $\left| MN \right| = \frac{\left| AC \right|}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$

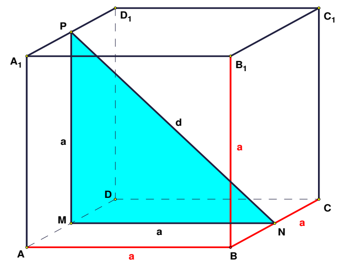
Analogno zaključujemo za ostale dvije stranice NP i PM jednakostraničnog trokuta MNP.

Tada je površina trokuta jednaka:

$$P = \frac{\left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{2 \cdot a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{8}.$$

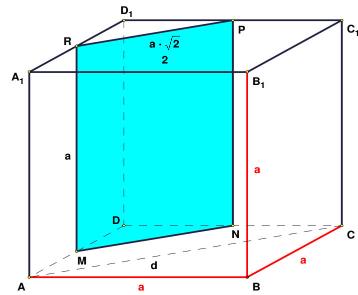
Vježba 014

Nađi površine sljedećih likova.



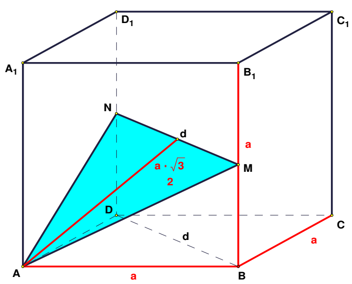
Rezultat:

$$P=\frac{a^2}{2}.$$



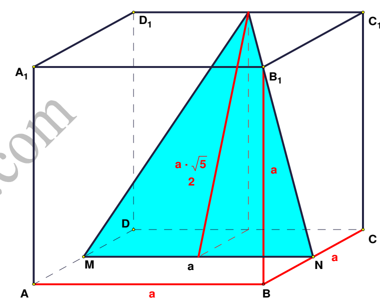
Rezultat:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{2}.$$



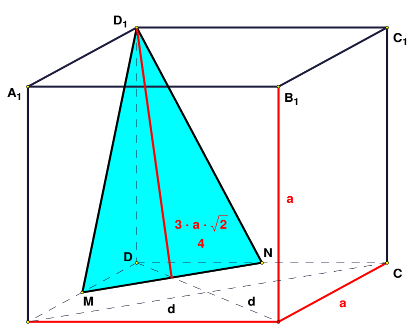
Rezultat:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{6}}{4}.$$



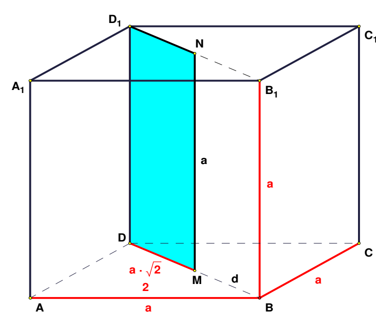
Rezultat:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{5}}{4}.$$



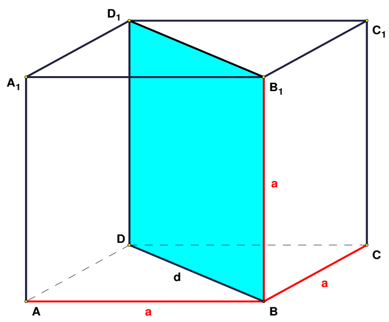
Rezultat:

$$P=\frac{3\cdot a^2}{8}.$$



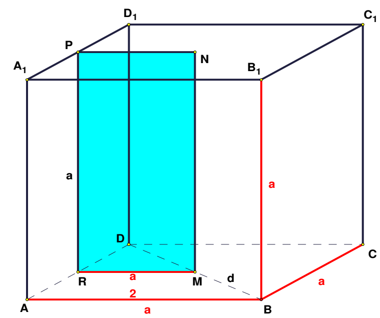
Rezultat:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{2}.$$



Rezultat:

$$P = a^2 \cdot \sqrt{2}.$$



Rezultat:

$$P = \frac{a^2}{2}.$$

Zadatak 015 (Ines, gimnazija)

Rezervoar za naftu ima oblik pravilne šesterostrane prizme osnovnog brida 4 m. Do koje visine je napunjen ako u njemu ima 207 846 litara nafte?

Rješenje 015

Podsjetimo se da je 1 litra kemijski čiste vode približno 1 dm^3. Pretpostavit ćemo da je za naftu također **1 l ≈ 1 dm^3**.

a = 4 m, V = 207 846 l = 207 846 dm^3 = [207 846 : 1000] = 207.846 m^3, v = ?

Obujam pravilne šesterostrane prizme osnovnog brida a iznosi:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot v.$$

Dalje slijedi:

$$v = \frac{2 \cdot V}{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 207.846\ m^3}{3 \cdot (4\ m)^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{415.692\ m}{48 \cdot \sqrt{3}} \approx 5\ m.$$

Vježba 015

Rezervoar za naftu ima oblik pravilne šesterostrane prizme osnovnog brida 4 m. Do koje visine je napunjen ako u njemu ima 415 692 litara nafte?

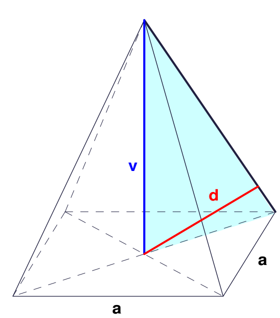
Rezultat: 10 m.

Zadatak 016 (Anastazija, gimnazija)

Baza uspravne piramide je kvadrat brida a = 4, a visina piramide je v = 4. Koliko iznosi udaljenost središta baze do bočnog brida?

Rješenje 016

Udaljenost središta baze do bočnog brida odgovara visini d označenog trokuta:



$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 = v^2 + \frac{a^2}{2} = 16 + 8 = 24 \;\Rightarrow\; b = \sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}.$$

Površinu označenog trokuta možemo izračunati na dva načina:

$$\left.\begin{matrix} P_\Delta = \dfrac{\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot v}{2}, \quad P_\Delta = \dfrac{b \cdot d}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{b \cdot d}{2} = \frac{\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot v}{2} \;\Rightarrow\; \frac{b \cdot d}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot v}{4} \;/ \cdot 4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \cdot b \cdot d = a \cdot \sqrt{2} \cdot v \;\Rightarrow\; d = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot v}{2 \cdot b} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{12}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3}}{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Vježba 016

Baza uspravne piramide je kvadrat brida a = 4, a visina piramide je v = 4. Koliko iznosi duljina bočnog brida?

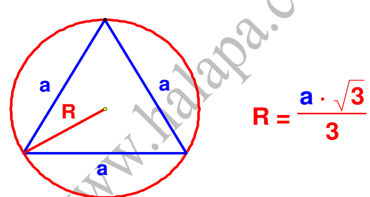
Rezultat: $2 \cdot \sqrt{6}.$

Zadatak 017 (Ines, gimnazija)

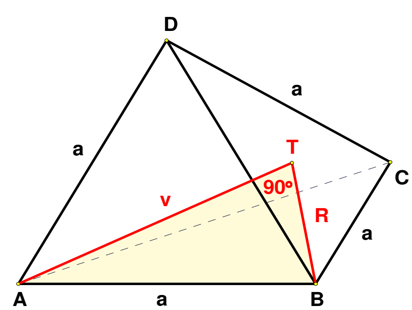
Točka T težište je strane BCD pravilnog tetraedra ABCD. Nađite $\sin \sphericalangle TAB.$

Rješenje 017

Strane pravilnog tetraedra su jednakostranični trokuti. Polumjer opisane kružnice jednakostraničnom trokutu glasi:



Sada je $\sin \sphericalangle TAB$ jednak:



(uočimo pravokutan trokut ABT)

$$\sin \sphericalangle TAB = \frac{|TB|}{|AB|} = \frac{R}{a} = \frac{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vježba 017

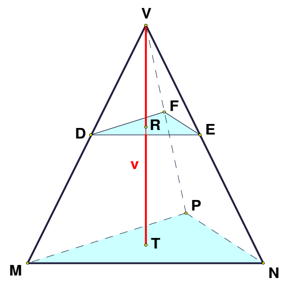
Točka T težište je strane BCD pravilnog tetraedra ABCD. Nađite $\cos \sphericalangle TAB.$

Rezultat: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Zadatak 018 (Anastazija, gimnazija)

Pravilnu uspravnu trostranu piramidu tankih stijenki prerežemo horizontalno po polovici visine. Koliko ćete puta više tekućine moći uliti u donju polovicu nego u gornju?

Rješenje 018



Neka je:

$$\left|TV\right| = v, \ \left|TR\right| = \left|RV\right| = \frac{v}{2},$$ B površina donje baze (ΔMNP), B_1 površina gornje baze (ΔDEF).

Za baze (osnovke) krnje piramide MNPDEF vrijedi sljedeći razmjer:

$$B : B_1 = \left|TV\right|^2 : \left|RV\right|^2 \Rightarrow B : B_1 = v^2 : \frac{v^2}{4} \Rightarrow B_1 \cdot v^2 = B \cdot \frac{v^2}{4} \ /:v^2 \Rightarrow B_1 = \frac{B}{4}.$$

Volumen (obujam) gornje piramide, DEFV, je:

$$V_g = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B}{4} \cdot \frac{v}{2} = \frac{B \cdot v}{24}.$$

Volumen donje (krnje) piramide, MNPDEF, dobije se kao razlika volumena piramida MNPV i DEFV:

$$V_k = V - V_g = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v - \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot \frac{v}{2} = \frac{B \cdot v}{3} - \frac{B \cdot v}{24} = \frac{8 \cdot B \cdot v - B \cdot v}{24} = \frac{7 \cdot B \cdot v}{24}.$$

Gledamo omjer volumena V_k i V_g:

$$V_k : V_g = \frac{7 \cdot B \cdot v}{24} : \frac{B \cdot v}{24} = 7 \Rightarrow \frac{V_k}{V_g} = \frac{7}{1}.$$

Sedam puta više.

Vježba 018

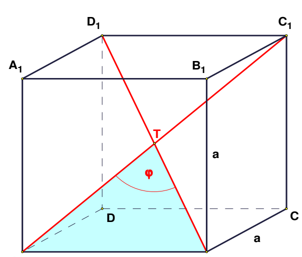
Pravilnu uspravnu trostranu piramidu tankih stijenki prerežemo horizontalno po polovici visine. Koliko ćete puta manje tekućine moći uliti u gornju polovicu nego u donju?

Rezultat: 7 puta manje.

Zadatak 019 (Ivana, hotelijerska škola)

Iz sjecišta prostornih dijagonala kocke brid kocke se vidi pod kutom φ. Koliki je tangens tog kuta?

Rješenje 019



Iz slike se vidi:

$$|AB| = |BC| = |BB_1| = a, \ |AC_1| = |BD_1| = a \cdot \sqrt{3}, \ |AT| = |BT| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Uočimo trokut ABT i uporabimo kosinusov poučak:

$$|AB|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 - 2 \cdot |AT| \cdot |BT| \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3 \cdot a^2}{4} + \frac{3 \cdot a^2}{4} - \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow a^2 = \frac{6 \cdot a^2}{4} - \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3 \cdot a^2}{2} - \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \cos\varphi \ / \cdot \frac{2}{3 \cdot a^2} \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3}.$$

Tangens kuta iznosi:

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\right] = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 019

Iz sjecišta prostornih dijagonala kocke brid kocke se vidi pod kutom φ. Koliki je kotangens tog kuta?

Rezultat: $\frac{\sqrt{2}}{4}.$

Zadatak 020 (Biba, gimnazija)

Oplošja dviju kocki odnose se kao 2 : 3. Ako je volumen manje kocke 8 cm^3, tada brid veće kocke iznosi

$$A. \sqrt{6} \qquad B. 3 \qquad C. 3\sqrt{2} \qquad D. 2\sqrt{3}$$

Rješenje 020

Za duljine bridova i oplošja dviju kocki vrijede omjeri:

$$\frac{a_1}{a_2} = k \quad , \quad \frac{O_1}{O_2} = k^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{O_1}{O_2} = k^2 \\ \frac{O_1}{O_2} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow k^2 = \frac{2}{3} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Budući da je volumen manje kocke 8 cm^3, dobije se duljina brida:

$$V_1 = 8 \Rightarrow a_1^3 = 8 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow a_1 = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Duljina brida veće kocke bit će:

$$\frac{a_1}{a_2} = k \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{6}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 020

Oplošja dviju kocki odnose se kao 4 : 6. Ako je volumen manje kocke 8 cm^3, tada brid veće kocke iznosi

$A.\ \sqrt{6}$ $\quad B.\ 3$ $\quad C.\ 3\sqrt{2}$ $\quad D.\ 2\sqrt{3}$

Rezultat: Odgovor je pod A.