Zadatak 701 (4A, 4B, TUPŠ)

Izraz $2^x \cdot 2^x + 4^x$ jednak je:

$$A.\ 4^{x+1} \qquad B.\ 2^{x+1} \qquad C.\ 2^{2\cdot x+1} \qquad D.\ 4^{2\cdot x+1}$$

Rješenje 701

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n .$$

1.inačica

$$2^x \cdot 2^x + 4^x = 2^{x+x} + 4^x = 2^{2\cdot x} + 4^x = 2^{2\cdot x} + \left(2^2\right)^x = 2^{2\cdot x} + 2^{2\cdot x} = 2\cdot 2^{2\cdot x} =$$

$$= 2^1 \cdot 2^{2\cdot x} = 2^{2\cdot x+1}.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$2^x \cdot 2^x + 4^x = (2\cdot 2)^x + 4^x = 4^x + 4^x = 2\cdot 4^x = 2^1 \cdot \left(2^2\right)^x = 2^1 \cdot 2^{2\cdot x} = 2^{2\cdot x+1}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 701

Izraz $2^x \cdot 2^x \cdot 2^x + 8^x$ jednak je:

$$A.\ 4^{x+1} \qquad B.\ 2^{x+1} \qquad C.\ 2^{3\cdot x+1} \qquad D.\ 4^{3\cdot x+1}$$

Rezultat: C.

Zadatak 702 (Larisa, gimnazija)

Ako je $\frac{a+b}{c} = 3$ i $\frac{a+1}{b} = 2$, koliko je $b-c$?

$$A.\ -3 \qquad B.\ -\frac{1}{3} \qquad C.\ \frac{1}{3} \qquad D.\ 3$$

Rješenje 702

Ponovimo!

$$a = b \;\Rightarrow\; b = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{c} = 3 \\ \frac{a+1}{b} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{c} = 3 \ /\cdot c \\ \frac{a+1}{b} = 2 \ /\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 3\cdot c \\ a+1 = 2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3\cdot c - b \\ a = 2\cdot b - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot c - b = 2\cdot b - 1 \Rightarrow 2\cdot b - 1 = 3\cdot c - b \Rightarrow 2\cdot b - 3\cdot c + b = 1 \Rightarrow 3\cdot b - 3\cdot c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot b - 3\cdot c = 1 \Rightarrow 3\cdot(b-c) = 1 \Rightarrow 3\cdot(b-c) = 1 \ /:3 \Rightarrow b - c = \frac{1}{3}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 702

Ako je $\frac{a+b}{3} = c$ i $\frac{a+1}{2} = b$, koliko je $b-c$?

$$A.\ -3 \qquad B.\ -\frac{1}{3} \qquad C.\ \frac{1}{3} \qquad D.\ 3$$

Rezultat: C.

Zadatak 703 (Domagoj, gimnazija)

Zbrojite $\frac{1}{a^2+a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b+b^2}$ i skratite rezultat do kraja.

Rješenje 703

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$\frac{1}{a^2+a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b+b^2}=\frac{1}{a\cdot(a+b)}+\frac{1}{b\cdot(a+b)}=\frac{b+a}{a\cdot b\cdot(a+b)}=\frac{a+b}{a\cdot b\cdot(a+b)}=\frac{a+b}{a\cdot b\cdot(a+b)}=\frac{1}{a\cdot b}.$$

Vježba 703

Zbrojite $\frac{1}{a^2-a\cdot b}-\frac{1}{a\cdot b-b^2}$ i skratite rezultat do kraja.

Rezultat: $-\frac{1}{a\cdot b}.$

Zadatak 704 (4B – dm, TUPŠ)

Zadana su dva izraza. Prvi je izraz $(3\cdot a+4):\frac{a}{2}$, a drugi $(a+2):\frac{a}{6}$. Koji je od tih izraza veći i za koliko ako je a pozitivan broj?

A. Prvi je izraz veći za $\frac{a}{4}$. *B.* Prvi je izraz veći za $\frac{4}{a}$.

C. Drugi je izraz veći za $\frac{a}{4}$. *D.* Drugi je izraz veći za $\frac{4}{a}$.

Rješenje 704

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad a-b>0 \;\Rightarrow\; a>b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Pojednostavnimo oba izraza:

- $x=(3\cdot a+4):\frac{a}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{3\cdot a+4}{1}:\frac{a}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{3\cdot a+4}{1}\cdot\frac{2}{a} \;\Rightarrow$

  $\Rightarrow\; x=\frac{2\cdot(3\cdot a+4)}{a} \;\Rightarrow\; x=\frac{6\cdot a+8}{a}$

- $y=(a+2):\frac{a}{6} \;\Rightarrow\; y=\frac{a+2}{1}:\frac{a}{6} \;\Rightarrow\; y=\frac{a+2}{1}\cdot\frac{6}{a} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ y = \frac{6 \cdot (a+2)}{a} \ \Rightarrow \ y = \frac{6 \cdot a + 12}{a}.$$

Drugi je izraz veći od prvoga.

$$y - x = \frac{6 \cdot a + 12}{a} - \frac{6 \cdot a + 8}{a} \ \Rightarrow \ y - x = \frac{6 \cdot a + 12 - (6 \cdot a + 8)}{a} \ \Rightarrow \ y - x = \frac{6 \cdot a + 12 - 6 \cdot a - 8}{a} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y - x = \frac{6 \cdot a + 12 - 6 \cdot a - 8}{a} \ \Rightarrow \ y - x = \frac{12 - 8}{a} \ \Rightarrow \ y - x = \frac{4}{a}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 704

Zadana su dva izraza. Prvi je izraz $(3 \cdot a + 4) : \frac{a}{2}$, a drugi $(a+3) : \frac{a}{6}$. Koji je od tih izraza veći i za koliko ako je a pozitivan broj?

A. Prvi je izraz veći za $\frac{a}{10}$. *B*. Prvi je izraz veći za $\frac{10}{a}$.

C. Drugi je izraz veći za $\frac{a}{10}$. *D*. Drugi je izraz veći za $\frac{10}{a}$.

Rezultat: D.

Zadatak 705 (Nina, gimnazija)

Provjeri da jednakost vrijedi za sve realne brojeve a i b: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$

Rješenje 705

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikovanjem izraza na lijevoj strani jednakosti dobije se izraz na njezinoj desnoj strani.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{2^2} + \frac{(a-b)^2}{2^2} = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} + \frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + a^2 + b^2}{4} = \frac{2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2}{4} = \frac{2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{4} = \frac{2 \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Vježba 705

Provjeri da jednakost vrijedi za sve realne brojeve a i b: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 706 (Nina, gimnazija)

Provjeri da jednakost vrijedi za sve realne brojeve a i b: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a\cdot b.$

Rješenje 706

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{n}{1}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikovanjem izraza na lijevoj strani jednakosti dobije se izraz na njezinoj desnoj strani.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}-\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}-\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{4}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=\frac{2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=a\cdot b.$$

2.inačica

Preoblikovanjem izraza na lijevoj strani jednakosti pomoću razlike kvadrata dobije se izraz na njezinoj desnoj strani.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=\frac{a+b-(a-b)}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=$$

$$=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{b+b}{2}\cdot\frac{a+a}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=a\cdot b.$$

Vježba 706

Provjeri da jednakost vrijedi za sve realne brojeve a i b: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=a\cdot b.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 707 (4B, TUPŠ)

Pojednostavni izraz: $(x+y+1)^2-2\cdot(x+y+1)+1.$

Rješenje 707

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(x+y+1)^2-2\cdot(x+y+1)+1=(x+y+1)^2-2\cdot(x+y+1)\cdot 1+1^2=$$

$$=((x+y+1)-1)^2=(x+y+1-1)^2=(x+y+1-1)^2=(x+y)^2.$$

2.inačica

$$(x+y+1)^2-2\cdot(x+y+1)+1=$$

$$=x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot 1+2\cdot y\cdot 1-2\cdot x-2\cdot y-2+1=$$

$$=x^2+y^2+1+2\cdot x\cdot y+2\cdot x+2\cdot y-2\cdot x-2\cdot y-2+1=$$

$$=x^2+y^2+1+2\cdot x\cdot y+2\cdot x+2\cdot y-2\cdot x-2\cdot y-2+1=x^2+y^2+2\cdot x\cdot y=$$

$$=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=(x+y)^2.$$

Vježba 707

Pojednostavni izraz: $(x+y+1)^2+2\cdot(x+y+1)+1.$

Rezultat: $(x+y+2)^2.$

Zadatak 708 (4B, TUPŠ)

Pomnožite na najjednostavniji način $(a-1)^2\cdot\left(a^2+1\right)^2\cdot(a+1)^2.$

Rješenje 708

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a-1)^2\cdot\left(a^2+1\right)^2\cdot(a+1)^2=(a-1)^2\cdot(a+1)^2\cdot\left(a^2+1\right)^2=((a-1)\cdot(a+1))^2\cdot\left(a^2+1\right)^2=$$

$$=\left(a^2-1\right)^2\cdot\left(a^2+1\right)^2=\left(\left(a^2-1\right)\cdot\left(a^2+1\right)\right)^2=\left(\left(a^2\right)^2-1^2\right)^2=\left(a^4-1\right)^2=$$

$$=\left(a^4\right)^2-2\cdot a^4\cdot 1+1^2=a^8-2\cdot a^4+1.$$

Vježba 708

Pomnožite na najjednostavniji način $(a+1)^2\cdot\left(a^2+1\right)^2\cdot(a-1)^2$.

Rezultat: $a^8-2\cdot a^4+1.$

Zadatak 709 (Ana, srednja škola)

Dokažite identitet: $(k\cdot x+k\cdot y)^2=k^2\cdot(x+y)^2$.

Rješenje 709

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(k\cdot x+k\cdot y)^2=(k\cdot x)^2+2\cdot k\cdot x\cdot k\cdot y+(k\cdot y)^2=k^2\cdot x^2+2\cdot k^2\cdot x\cdot y+k^2\cdot y^2=$$

$$=k^2\cdot x^2+2\cdot k^2\cdot x\cdot y+k^2\cdot y^2=k^2\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\right)=k^2\cdot(x+y)^2.$$

2.inačica

$$(k\cdot x+k\cdot y)^2=(k\cdot x+k\cdot y)^2=(k\cdot(x+y))^2=k^2\cdot(x+y)^2.$$

Vježba 709

Dokažite identitet: $(k\cdot x-k\cdot y)^2=k^2\cdot(x-y)^2$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 710 (Tessa, gimnazija)

Pomnoži $\left(4-4\cdot a+a^2\right)\cdot\left(4+4\cdot a+a^2\right)$.

Rješenje 710

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$\left(4-4\cdot a+a^2\right)\cdot\left(4+4\cdot a+a^2\right)=16+16\cdot a+4\cdot a^2-16\cdot a-16\cdot a^2-4\cdot a^3+4\cdot a^2+4\cdot a^3+a^4=$$

$$=16+16\cdot a+4\cdot a^2-16\cdot a-16\cdot a^2-4\cdot a^3+4\cdot a^2+4\cdot a^3+a^4=$$

$$=16+4\cdot a^2-16\cdot a^2+4\cdot a^2+a^4=a^4-8\cdot a^2+16.$$

2.inačica

$$\left(4-4\cdot a+a^2\right)\cdot\left(4+4\cdot a+a^2\right)=\left(\left(4+a^2\right)-4\cdot a\right)\cdot\left(\left(4+a^2\right)+4\cdot a\right)=$$

$$=\left(4+a^2\right)^2-(4\cdot a)^2=4^2+2\cdot 4\cdot a^2+\left(a^2\right)^2-4^2\cdot a^2=16+8\cdot a^2+a^4-16\cdot a^2=$$

$$=a^4-8\cdot a^2+16.$$

3.inačica

$$\left(4-4\cdot a+a^2\right)\cdot\left(4+4\cdot a+a^2\right)=(2-a)^2\cdot(2+a)^2=((2-a)\cdot(2+a))^2=$$

$$=\left(2^2-a^2\right)^2=\left(4-a^2\right)^2=4^2-2\cdot 4\cdot a^2+\left(a^2\right)^2=16-8\cdot a^2+a^4=a^4-8\cdot a^2+16.$$

Vježba 710

Pomnoži $\left(4+4\cdot a+a^2\right)\cdot\left(4-4\cdot a+a^2\right)$.

Rezultat: $a^4-8\cdot a^2+16.$

Zadatak 711 (1C, TUPŠ)

Rastavi na faktore: $12\cdot x\cdot y-2\cdot x^2-18\cdot y^2$.

Rješenje 711

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n, \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$12\cdot x\cdot y-2\cdot x^2-18\cdot y^2=-2\cdot x^2+12\cdot x\cdot y-18\cdot y^2=-2\cdot\left(x^2-6\cdot x\cdot y+9\cdot y^2\right)=$$

$$=-2\cdot\left(x^2-2\cdot 3\cdot y+(3\cdot y)^2\right)=-2\cdot(x-3\cdot y)^2.$$

Vježba 711

Rastavi na faktore: $-12\cdot x\cdot y+2\cdot x^2+18\cdot y^2$.

Rezultat: $2\cdot(x-3\cdot y)^2.$

Zadatak 712 (1C, TUPŠ)

Rastavi na faktore: $a^6-18\cdot a^5\cdot b+81\cdot a^4\cdot b^2$.

Rješenje 712

Ponovimo!

$$a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^6 - 18 \cdot a^5 \cdot b + 81 \cdot a^4 \cdot b^2 = a^4 \cdot \left(a^2 - 18 \cdot a \cdot b + 81 \cdot b^2\right) =$$

$$= a^4 \cdot \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot 9 \cdot b + (9 \cdot b)^2\right) = a^4 \cdot (a - 9 \cdot b)^2.$$

Vježba 712

Rastavi na faktore: $a^5 - 18 \cdot a^4 \cdot b + 81 \cdot a^3 \cdot b^2$.

Rezultat: $a^3 \cdot (a - 9 \cdot b)^2$.

Zadatak 713 (Sandra, srednja škola)

Dokazati da je $\left(a \cdot z^2 + b \cdot z\right) \cdot \left(b \cdot z^2 + a \cdot z\right) = a^2 - a \cdot b + b^2$ pri čemu su a i b realni brojevi, a z je rješenje jednadžbe $1 + z + z^2 = 0$.

Rješenje 713

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Preoblikujemo lijevu stranu jednakosti rabeći zadani uvjet.

$$\left(a \cdot z^2 + b \cdot z\right) \cdot \left(b \cdot z^2 + a \cdot z\right) = z \cdot (a \cdot z + b) \cdot z \cdot (b \cdot z + a) = z^2 \cdot (a \cdot z + b) \cdot (b \cdot z + a) =$$

$$= z^2 \cdot \left(a \cdot b \cdot z^2 + a^2 \cdot z + b^2 \cdot z + a \cdot b\right) = \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ 1 + z + z^2 = 0 \\ z^2 = -1 - z \end{array}\right] =$$

$$= (-1 - z) \cdot \left(a \cdot b \cdot (-1 - z) + a^2 \cdot z + b^2 \cdot z + a \cdot b\right) =$$

$$= (-1 - z) \cdot \left(-a \cdot b - a \cdot b \cdot z + a^2 \cdot z + b^2 \cdot z + a \cdot b\right) =$$

$$= (-1 - z) \cdot \left(-a \cdot b - a \cdot b \cdot z + a^2 \cdot z + b^2 \cdot z + a \cdot b\right) = (-1 - z) \cdot \left(-a \cdot b \cdot z + a^2 \cdot z + b^2 \cdot z\right) =$$

$$= (-1 - z) \cdot z \cdot \left(-a \cdot b + a^2 + b^2\right) = \left(-z - z^2\right) \cdot \left(-a \cdot b + a^2 + b^2\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ 1 + z + z^2 = 0 \\ 1 = -z - z^2 \end{array}\right] = 1 \cdot \left(-a \cdot b + a^2 + b^2\right) = -a \cdot b + a^2 + b^2 = a^2 - a \cdot b + b^2.$$

Vježba 713

Dokazati da je $\left(a \cdot z^2 + b \cdot z\right) \cdot \left(b \cdot z^2 + a \cdot z\right) + a \cdot b = a^2 + b^2$ pri čemu su a i b realni brojevi, a z je rješenje jednadžbe $1 + z + z^2 = 0$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 714 (Matej, gimnazija)

Dokažite da se izraz $2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$ može zapisati kao zbroj dva kvadrata algebarskih izraza s cjelobrojnim koeficijentima.

Rješenje 714

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 =$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) + \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) =$$

$$= (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

Vježba 714

Dokažite da se izraz $4 \cdot a \cdot b$ može zapisati kao razlika dva kvadrata algebarskih izraza s cjelobrojnim koeficijentima.

Rezultat: $(a+b)^2 - (a-b)^2.$

Zadatak 715 (Atob, srednja škola)

Rastavi na faktore izraz $x^6 + 1$.

Rješenje 715

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right).$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$x^6 + 1 = \left(x^2\right)^3 + 1^3 = \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(\left(x^2\right)^2 - x^2 \cdot 1 + 1^2\right) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^4 - x^2 + 1\right).$$

Vježba 715

Rastavi na faktore izraz $1 + x^6$.

Rezultat: $\left(1 + x^2\right) \cdot \left(1 - x^2 + x^4\right).$

Zadatak 716 (Atob, srednja škola)

Rastavi na faktore izraz $x^4 + 4 \cdot y^4$.

Rješenje 716

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$x^4 + 4 \cdot y^4 = \left(x^2\right)^2 + \left(2 \cdot y^2\right)^2 = \left(x^2\right)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot y^2 + \left(2 \cdot y^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot y^2 =$$

$$=\left(x^{2}\right)^{2}+4\cdot x^{2}\cdot y^{2}+\left(2\cdot y^{2}\right)^{2}-4\cdot x^{2}\cdot y^{2}=\left(x^{2}+2\cdot y^{2}\right)^{2}-(2\cdot x\cdot y)^{2}=$$

$$=\left(x^{2}+2\cdot y^{2}-2\cdot x\cdot y\right)\cdot\left(x^{2}+2\cdot y^{2}+2\cdot x\cdot y\right)=\left(x^{2}-2\cdot x\cdot y+2\cdot y^{2}\right)\cdot\left(x^{2}+2\cdot x\cdot y+2\cdot y^{2}\right).$$

Vježba 716

Rastavi na faktore izraz $4\cdot y^{4}+x^{4}$.

Rezultat: $\left(2\cdot y^{2}-2\cdot x\cdot y+x^{2}\right)\cdot\left(2\cdot y^{2}+2\cdot x\cdot y+x^{2}\right)$.

Zadatak 717 (Atob, srednja škola)

Rastavi na faktore izraz $\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b-\left(b^{2}-c^{2}\right)\cdot c$.

Rješenje 717

Ponovimo!

$$a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b-\left(b^{2}-c^{2}\right)\cdot c=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b+\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot c=$$

$$=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a+\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot c-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a+\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot c-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b=$$

$$=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot(a+c)-\left(a^{2}-c^{2}\right)\cdot b=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot(a+c)-(a-c)\cdot(a+c)\cdot b=$$

$$=\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot(a+c)-(a-c)\cdot(a+c)\cdot b=(a+c)\cdot\left(\left(c^{2}-b^{2}\right)-(a-c)\cdot b\right)=$$

$$=(a+c)\cdot\left(c^{2}-b^{2}-a\cdot b+b\cdot c\right).$$

Vježba 717

Rastavi na faktore izraz $\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot a+\left(c^{2}-a^{2}\right)\cdot b+\left(c^{2}-b^{2}\right)\cdot c$.

Rezultat: $(a+c)\cdot\left(c^{2}-b^{2}-a\cdot b+b\cdot c\right)$.

Zadatak 718 (Mirela, gimnazija)

Pojednostavni izraz $\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{x}{1+x}}$.

Rješenje 718

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

2.inačica

$$\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{x}{1+x}}=\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\frac{x}{1+x}=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1}\right)\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{1-(1-x)}{1-x}\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{1-1+x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{x}=$$

$$=\frac{1-1+x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1}=\frac{1+x}{1-x}.$$

Vježba 718

Pojednostavni izraz $\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-1}$.

Rezultat: $\frac{1-x}{1+x}$.

Zadatak 719 (Mirela, gimnazija)

Rastavi na faktore izraz $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Rješenje 719

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^5+x^4+x^3\right)+\left(x^2+x+1\right)=$$

$$= x^3 \cdot \left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right) = x^3 \cdot \left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^3+1\right) =$$

$$= \left(x^2+x+1\right)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right) = (x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right).$$

2.inačica

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = \left(x^5+x^4\right)+\left(x^3+x^2\right)+(x+1) =$$

$$= x^4\cdot(x+1)+x^2\cdot(x+1)+(x+1) = x^4\cdot(x+1)+x^2\cdot(x+1)+(x+1) =$$

$$= (x+1)\cdot\left(x^4+x^2+1\right) = (x+1)\cdot\left(\left(x^2\right)^2+x^2+1\right) = (x+1)\cdot\left(\left(x^2\right)^2+2\cdot x^2+1-x^2\right) =$$

$$= (x+1)\cdot\left(\left(\left(x^2\right)^2+2\cdot x^2+1\right)-x^2\right) = (x+1)\cdot\left(\left(x^2+1\right)^2-x^2\right) =$$

$$= (x+1)\cdot\left(x^2+1-x\right)\cdot\left(x^2+1+x\right) = (x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right).$$

Vježba 719

Rastavi na faktore izraz $x^3-2\cdot x-1$.

Rezultat: $(x+1)\cdot\left(x^2-x-1\right)$.

Zadatak 720 (Tonka, ekonomska škola)

Zapišite u obliku kvadrata zbroja izraz: $(2\cdot a-3\cdot b)^2+24\cdot a\cdot b$.

Rješenje 720

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad , \quad (a-b)^2 = a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 = (a+b)^2.$$

$$(2\cdot a-3\cdot b)^2+24\cdot a\cdot b = (2\cdot a)^2-2\cdot 2\cdot a\cdot 3\cdot b+(3\cdot b)^2+24\cdot a\cdot b =$$

$$= 4\cdot a^2-12\cdot a\cdot b+9\cdot b^2+24\cdot a\cdot b = 4\cdot a^2+12\cdot a\cdot b+9\cdot b^2 =$$

$$= (2\cdot a)^2+2\cdot 2\cdot a\cdot 3\cdot b+(3\cdot b)^2 = (2\cdot a+3\cdot b)^2.$$

Vježba 720

Zapišite u obliku kvadrata zbroja izraz: $(2\cdot a+3\cdot b)^2-24\cdot a\cdot b$.

Rezultat: $(2\cdot a-3\cdot b)^2$.