Zadatak 541 **(Iva, gimnazija)**

Skrati razlomak: $\frac{2^{2\cdot n+1}-2^{4\cdot n+3}+2^{6\cdot n+3}}{2^{2\cdot n}-2^{4\cdot n+1}}$.

Rješenje 541

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{2^{2\cdot n+1}-2^{4\cdot n+3}+2^{6\cdot n+3}}{2^{2\cdot n}-2^{4\cdot n+1}}=\frac{2^{2\cdot n+1}-2^{2\cdot n+1}\cdot 2^{2\cdot n+2}+2^{2\cdot n+1}\cdot 2^{4\cdot n+2}}{2^{2\cdot n}-2^{2\cdot n}\cdot 2^{2\cdot n+1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo } 2^{2\cdot n+1}\\ \text{u nazivniku izlučimo } 2^{2\cdot n}\end{array}\right]=\frac{2^{2\cdot n+1}-2^{2\cdot n+1}\cdot 2^{2\cdot n+2}+2^{2\cdot n+1}\cdot 2^{4\cdot n+2}}{2^{2\cdot n}-2^{2\cdot n}\cdot 2^{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{2^{2\cdot n+1}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+2}+2^{4\cdot n+2}\right)}{2^{2\cdot n}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}=\frac{2^{2\cdot n}\cdot 2^{1}\cdot\left(1-2^{1}\cdot 2^{2\cdot n+1}+\left(2^{2\cdot n+1}\right)^{2}\right)}{2^{2\cdot n}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}=$$

$$=\frac{2^{2\cdot n}\cdot 2\cdot\left(1-2\cdot 2^{2\cdot n+1}+\left(2^{2\cdot n+1}\right)^{2}\right)}{2^{2\cdot n}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}=\frac{2^{2\cdot n}\cdot 2\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)^{2}}{2^{2\cdot n}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}=$$

$$=\frac{2^{2\cdot n}\cdot 2\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)^{2}}{2^{2\cdot n}\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}=\frac{2\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)}{1}=2\cdot\left(1-2^{2\cdot n+1}\right)=2-2^{2\cdot n+2}.$$

Vježba 541

Skrati razlomak: $\frac{2^{2\cdot n}-2^{4\cdot n+1}}{2^{2\cdot n+1}-2^{4\cdot n+3}+2^{6\cdot n+3}}$.

Rezultat: $\frac{1}{2-2^{2\cdot n+2}}$.

Zadatak 542 (Dado, gimnazija)

Izračunaj: $\frac{16^7-16^6}{8^{10}+8^9+8^8}$.

Rješenje 542

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{16^7-16^6}{8^{10}+8^9+8^8}=\frac{16^6\cdot 16^1-16^6}{8^8\cdot 8^2+8^8\cdot 8^1+8^8}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo } 16^6\\ \text{u nazivniku izlučimo } 8^8\end{array}\right]=\frac{16^6\cdot 16^1-16^6}{8^8\cdot 8^2+8^8\cdot 8^1+8^8}=$$

$$=\frac{16^6\cdot\left(16^1-1\right)}{8^8\cdot\left(8^2+8^1+1\right)}=\frac{16^6\cdot(16-1)}{8^8\cdot(64+8+1)}=\frac{16^6\cdot 15}{8^8\cdot 73}=\frac{\left(2^4\right)^6\cdot 15}{\left(2^3\right)^8\cdot 73}=\frac{2^{24}\cdot 15}{2^{24}\cdot 73}=\frac{2^{24}\cdot 15}{2^{24}\cdot 73}=\frac{15}{73}.$$

2.inačica

$$\frac{16^7-16^6}{8^{10}+8^9+8^8}=\frac{\left(2^4\right)^7-\left(2^4\right)^6}{\left(2^3\right)^{10}+\left(2^3\right)^9+\left(2^3\right)^8}=\frac{2^{28}-2^{24}}{2^{30}+2^{27}+2^{24}}=\frac{2^{24}\cdot 2^4-2^{24}}{2^{24}\cdot 2^6+2^{24}\cdot 2^3+2^{24}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo } 2^{24}\\ \text{u nazivniku izlučimo } 2^{24}\end{array}\right]=\frac{2^{24}\cdot 2^4-2^{24}}{2^{24}\cdot 2^6+2^{24}\cdot 2^3+2^{24}}=\frac{2^{24}\cdot\left(2^4-1\right)}{2^{24}\cdot\left(2^6+2^3+1\right)}=$$

$$=\frac{2^{24}\cdot(16-1)}{2^{24}\cdot(64+8+1)}=\frac{2^{24}\cdot 15}{2^{24}\cdot 73}=\frac{2^{24}\cdot 15}{2^{24}\cdot 73}=\frac{15}{73}.$$

Vježba 542

Izračunaj: $\frac{8^{10}+8^9+8^8}{16^7-16^6}$.

Rezultat: $\frac{73}{15}$.

Zadatak 543 (Dado, gimnazija)

Zapiši u obliku potencije broj: $8\cdot 2^8+4\cdot 8^3+2\cdot 4^5+8\cdot 16^2$.

Rješenje 543

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$8\cdot 2^8+4\cdot 8^3+2\cdot 4^5+8\cdot 16^2=2^3\cdot 2^8+2^2\cdot\left(2^3\right)^3+2^1\cdot\left(2^2\right)^5+2^3\cdot\left(2^4\right)^2=$$

$$=2^3\cdot 2^8+2^2\cdot 2^9+2^1\cdot 2^{10}+2^3\cdot 2^8=2^{11}+2^{11}+2^{11}+2^{11}=4\cdot 2^{11}=2^2\cdot 2^{11}=2^{13}.$$

Vježba 543

Zapiši u obliku potencije broj: $8\cdot 2^8+4\cdot 8^3+2\cdot 4^5+8\cdot 4^4$.

Rezultat: 2^{13}.

Zadatak 544 (Ana, gimnazija)

Ako je $13\cdot x-52\cdot y=1$, koliko je $11\cdot x-44\cdot y$?

Rješenje 544

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad a=b \ , \ c\in R \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c \quad , \quad \left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$13\cdot x-52\cdot y=1 \Rightarrow 13\cdot(x-4\cdot y)=1 \Rightarrow 13\cdot(x-4\cdot y)=1 \ /\cdot\frac{1}{13} \Rightarrow x-4\cdot y=\frac{1}{13}.$$

Sada je:

$$11\cdot x-44\cdot y=11\cdot(x-4\cdot y)=\left[x-4\cdot y=\frac{1}{13}\right]=11\cdot\frac{1}{13}=\frac{11}{13}.$$

2.inačica

Zadanu jednakost pomnožimo razlomkom $\frac{11}{13}$ i odmah dobijemo traženo rješenje.

$$13\cdot x-52\cdot y=1 \Rightarrow 13\cdot x-52\cdot y=1 \ /\cdot\frac{11}{13} \Rightarrow 11\cdot x-44\cdot y=\frac{11}{13}.$$

3.inačica

Vrijednost izraza $11\cdot x-44\cdot y$ označimo slovom a. Tada se dobije:

$$\left.\begin{matrix} 11\cdot x-44\cdot y=a \\ 13\cdot x-52\cdot y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednakosti} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{11\cdot x-44\cdot y}{13\cdot x-52\cdot y}=\frac{a}{1} \Rightarrow \frac{11\cdot(x-4\cdot y)}{13\cdot(x-4\cdot y)}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11\cdot\cancel{(x-4\cdot y)}}{13\cdot\cancel{(x-4\cdot y)}}=a \Rightarrow \frac{11}{13}=a \Rightarrow a=\frac{11}{13} \Rightarrow 11\cdot x-44\cdot y=\frac{11}{13}.$$

Vježba 544

Ako je $13 \cdot x - 52 \cdot y = 1$, koliko je $22 \cdot x - 88 \cdot y$?

Rezultat: $\frac{22}{13}.$

Zadatak 545 (Ana, gimnazija)

Ako je $(4 \cdot x - 2) \cdot (3 \cdot x - 4) = 9$, koliko je $(3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 3)$?

Rješenje 545

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$(4 \cdot x - 2) \cdot (3 \cdot x - 4) = 9 \Rightarrow 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot x + 8 = 9 \Rightarrow 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot x = 9 - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot x^2 - 22 \cdot x = 1 \Rightarrow 12 \cdot x^2 - 22 \cdot x = 1 \; / : 2 \Rightarrow 6 \cdot x^2 - 11 \cdot x = 0.5.$$

Tada je:

$$(3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 3) = 6 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 2 \cdot x + 3 = 6 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 3 =$$

$$= \left(6 \cdot x^2 - 11 \cdot x\right) + 3 = \left[6 \cdot x^2 - 11 \cdot x = 0.5\right] = 0.5 + 3 = 3.5.$$

2.inačica

Vrijednost izraza $(3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 3)$ označimo slovom a. Tada se dobije:

$$\left.\begin{array}{l} (3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 3) = a \\ (4 \cdot x - 2) \cdot (3 \cdot x - 4) = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 2 \cdot x + 3 = a \\ 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot x + 8 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 2 \cdot x = a - 3 \\ 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 6 \cdot x = 9 - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 11 \cdot x = a - 3 \\ 12 \cdot x^2 - 22 \cdot x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{6 \cdot x^2 - 11 \cdot x}{12 \cdot x^2 - 22 \cdot x} = \frac{a-3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 \cdot x^2 - 11 \cdot x}{2 \cdot \left(6 \cdot x^2 - 11 \cdot x\right)} = a - 3 \Rightarrow \frac{\cancel{6 \cdot x^2 - 11 \cdot x}}{2 \cdot \cancel{\left(6 \cdot x^2 - 11 \cdot x\right)}} = a - 3 \Rightarrow \frac{1}{2} = a - 3 \Rightarrow a - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 3 = 0.5 \Rightarrow a = 0.5 + 3 \Rightarrow a = 3.5 \Rightarrow (3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 3) = 3.5.$$

Vježba 545

Ako je $(4 \cdot x - 2) \cdot (3 \cdot x - 4) = 9$, koliko je $(1 - 3 \cdot x) \cdot (3 - 2 \cdot x)$?

Rezultat: 3.5.

Zadatak 546 (Rocky, gimnazija)

Rastavi na faktore: $28 \cdot a^3 - 8 \cdot a^2 \cdot b - 7 \cdot a + 2 \cdot b.$

Rješenje 546

Ponovimo!

$$x^{1}=x \quad , \quad x^{n}:x^{m}=x^{n-m} \quad , \quad \left(x^{n}\right)^{m}=x^{n\cdot m} \quad , \quad (x\cdot y)^{n}=x^{n}\cdot y^{n}.$$

$$x^{2}-y^{2}=(x-y)\cdot(x+y).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Uporabit ćemo metodu grupiranja. Grupiramo prvi i drugi član te treći i četvrti.

$$28\cdot a^{3}-8\cdot a^{2}\cdot b-7\cdot a+2\cdot b=\left(28\cdot a^{3}-8\cdot a^{2}\cdot b\right)+(-7\cdot a+2\cdot b)=$$

$$=4\cdot a^{2}\cdot(7\cdot a-2\cdot b)-(7\cdot a-2\cdot b)=4\cdot a^{2}\cdot(7\cdot a-2\cdot b)-(7\cdot a-2\cdot b)=(7\cdot a-2\cdot b)\cdot\left(4\cdot a^{2}-1\right)=$$

$$=(7\cdot a-2\cdot b)\cdot\left((2\cdot a)^{2}-1\right)=(7\cdot a-2\cdot b)\cdot(2\cdot a-1)\cdot(2\cdot a+1).$$

2.inačica

Uporabit ćemo metodu grupiranja. Grupiramo prvi i treći član te drugi i četvrti.

$$28\cdot a^{3}-8\cdot a^{2}\cdot b-7\cdot a+2\cdot b=\left(28\cdot a^{3}-7\cdot a\right)+\left(-8\cdot a^{2}\cdot b+2\cdot b\right)=$$

$$=7\cdot a\cdot\left(4\cdot a^{2}-1\right)-2\cdot b\cdot\left(4\cdot a^{2}-1\right)=7\cdot a\cdot\left(4\cdot a^{2}-1\right)-2\cdot b\cdot\left(4\cdot a^{2}-1\right)=$$

$$=\left(4\cdot a^{2}-1\right)\cdot(7\cdot a-2\cdot b)=\left((2\cdot a)^{2}-1\right)\cdot(7\cdot a-2\cdot b)=(2\cdot a-1)\cdot(2\cdot a+1)\cdot(7\cdot a-2\cdot b).$$

Vježba 546

Rastavi na faktore: $2\cdot a^{3}+3\cdot a^{2}-2\cdot a-3.$

Rezultat: $(a-1)\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a+3).$

Zadatak 547 (Rocky, gimnazija)

Rastavi na faktore: $3\cdot x^{3}\cdot y+x^{2}-3\cdot x\cdot y^{3}-y^{2}.$

Rješenje 547

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m} \quad , \quad a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Uporabit ćemo metodu grupiranja. Grupiramo prvi i drugi član te treći i četvrti.

$$3\cdot x^{3}\cdot y+x^{2}-3\cdot x\cdot y^{3}-y^{2}=\left(3\cdot x^{3}\cdot y+x^{2}\right)+\left(-3\cdot x\cdot y^{3}-y^{2}\right)=$$

$$=x^{2}\cdot(3\cdot x\cdot y+1)-y^{2}\cdot(3\cdot x\cdot y+1)=x^{2}\cdot(3\cdot x\cdot y+1)-y^{2}\cdot(3\cdot x\cdot y+1)=(3\cdot x\cdot y+1)\cdot\left(x^{2}-y^{2}\right)=$$

$$=(3\cdot x\cdot y+1)\cdot(x-y)\cdot(x+y).$$

2.inačica

Uporabit ćemo metodu grupiranja. Grupiramo prvi i treći član te drugi i četvrti.

$$3 \cdot x^3 \cdot y + x^2 - 3 \cdot x \cdot y^3 - y^2 = \left(3 \cdot x^3 \cdot y - 3 \cdot x \cdot y^3\right) + \left(x^2 - y^2\right) = 3 \cdot x \cdot y \cdot \left(x^2 - y^2\right) + \left(x^2 - y^2\right) =$$

$$= 3 \cdot x \cdot y \cdot \left(x^2 - y^2\right) + \left(x^2 - y^2\right) = 3 \cdot x \cdot y \cdot \left(x^2 - y^2\right) + \left(x^2 - y^2\right) =$$

$$= \left(x^2 - y^2\right) \cdot (3 \cdot x \cdot y + 1) = (x - y) \cdot (x + y) \cdot (3 \cdot x \cdot y + 1).$$

Vježba 547

Rastavi na faktore: $2 \cdot x^3 \cdot y + x^2 - 2 \cdot x \cdot y^3 - y^2$.

Rezultat: $(x - y) \cdot (x + y) \cdot (2 \cdot x \cdot y + 1)$.

Zadatak 548 (Ana, strukovna škola)

Pojednostavljeni izraz $\dfrac{\dfrac{1-a}{1+a} + a}{\dfrac{a \cdot (a-1)}{1+a} + 1}$ iznosi:

$A.\ 1 \qquad B.\ 1 + a \qquad C.\ \dfrac{1}{1+a} \qquad D.\ a$

Rješenje 548

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{\frac{1-a}{1+a} + a}{\frac{a \cdot (a-1)}{1+a} + 1} = \frac{\frac{1-a}{1+a} + \frac{a}{1}}{\frac{a \cdot (a-1)}{1+a} + \frac{1}{1}} = \frac{\frac{1 - a + a \cdot (1+a)}{1+a}}{\frac{a \cdot (a-1) + 1 + a}{1+a}} = \frac{\frac{1 - a + a + a^2}{1+a}}{\frac{a^2 - a + 1 + a}{1+a}} = \frac{\frac{1 - a + a + a^2}{1+a}}{\frac{a^2 - a + 1 + a}{1+a}} =$$

$$= \frac{\frac{1+a^2}{1+a}}{\frac{a^2+1}{1+a}} = \frac{\frac{1+a^2}{1+a}}{\frac{1+a^2}{1+a}} = 1.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\frac{\frac{1-a}{1+a}+a}{\frac{a\cdot(a-1)}{1+a}+1}=\left[\begin{array}{l}\text{razlomak}\\ \text{proširimo s}\\ 1+a\end{array}\right]=\frac{\frac{1-a}{1+a}+a}{\frac{a\cdot(a-1)}{1+a}+1}\cdot\frac{1+a}{1+a}=\frac{\left(\frac{1-a}{1+a}+a\right)\cdot(1+a)}{\left(\frac{a\cdot(a-1)}{1+a}+1\right)\cdot(1+a)}=$$

$$=\frac{1-a+a\cdot(1+a)}{a\cdot(a-1)+1+a}=\frac{1-a+a+a^2}{a^2-a+1+a}=\frac{1-a+a+a^2}{a^2-a+1+a}=\frac{1+a^2}{a^2+1}=\frac{1+a^2}{1+a^2}=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 548

Pojednostavljeni izraz $\frac{\frac{a\cdot(a-1)}{1+a}+1}{\frac{1-a}{1+a}+a}$ iznosi:

$A.\ 1 \qquad B.\ 1+a \qquad C.\ \frac{1}{1+a} \qquad D.\ a$

Rezultat: A.

Zadatak 549 (Monika, gimnazija)

Vrijednost izraza $a^2-b^2+c^2+2\cdot a\cdot c$ za a = 99, b = 100, c = 101 jednaka je:

$A.\ 3\cdot 10^3 \qquad B.\ 3\cdot 10^4 \qquad C.\ 3\cdot 10^5 \qquad D.\ 3\cdot 10^6$

Rješenje 549

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$a^2-b^2+c^2+2\cdot a\cdot c=a^2+2\cdot a\cdot c+c^2-b^2=\left(a^2+2\cdot a\cdot c+c^2\right)-b^2=(a+c)^2-b^2=$$

$$=((a+c)-b)\cdot((a+c)+b)=(a+c-b)\cdot(a+c+b)=(101+99-100)\cdot(101+99+100)=$$

$$=100\cdot 300=30000=3\cdot 10^4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 549

Vrijednost izraza $a^2-b^2+c^2+2\cdot a\cdot c$ za a = 101, b = 100, c = 99 jednaka je:

$A.\ 3\cdot 10^3 \qquad B.\ 3\cdot 10^4 \qquad C.\ 3\cdot 10^5 \qquad D.\ 3\cdot 10^6$

Rezultat: B.

Zadatak 550 (Monika, gimnazija)

Ako je $a\cdot(a-1)=\frac{1}{2}$, onda je $(2\cdot a-1)^2$ jednako:

$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 4$

Rješenje 550

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$(2\cdot a-1)^2=(2\cdot a)^2-2\cdot 2\cdot a+1=4\cdot a^2-4\cdot a+1=4\cdot a\cdot(a-1)+1=$$

$$=\left[a\cdot(a-1)=\frac{1}{2}\right]=4\cdot\frac{1}{2}+1=4\cdot\frac{1}{2}+1=2+1=3.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 550

Ako je $a\cdot(a-1)=\frac{1}{4}$, onda je $(2\cdot a-1)^2$ jednako:

$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 4$

Rezultat: B.

Zadatak 551 (Paula, srednja škola)

Rastavi na faktore $a^2+b^2-c^2-d^2-2\cdot a\cdot b-2\cdot c\cdot d.$

Rješenje 551

Ponovimo!

$$(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad (x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadani izraz metodom grupiranja.

$$a^2+b^2-c^2-d^2-2\cdot a\cdot b-2\cdot c\cdot d=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2-c^2-2\cdot c\cdot d-d^2=$$

$$=\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)-\left(c^2+2\cdot c\cdot d+d^2\right)=(a-b)^2-(c+d)^2=$$

$$=((a-b)-(c+d))\cdot((a-b)+(c+d))=(a-b-c-d)\cdot(a-b+c+d).$$

Vježba 551

Rastavi na faktore $a^2-b^2-c^2+d^2-2\cdot a\cdot d-2\cdot b\cdot c.$

Rezultat: $(a-d-b-c)\cdot(a-d+b+c).$

Zadatak 552 (Željko, srednja škola)

Ako je $a\cdot b=3$ i $a^2\cdot b+a\cdot b^2=(a+b)-2$, koliko je a^2+b^2?

Rješenje 552

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \ \Rightarrow \ x^2+y^2=(x+y)^2-2\cdot x\cdot y.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo drugu jednakost na oblik:

$$a^2\cdot b+a\cdot b^2=(a+b)-2 \ \Rightarrow \ a\cdot b\cdot(a+b)=(a+b)-2 \ \Rightarrow \ [a\cdot b=3] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 3\cdot(a+b)=(a+b)-2 \ \Rightarrow \ 3\cdot(a+b)-(a+b)=-2 \ \Rightarrow \ 2\cdot(a+b)=-2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot(a+b)=-2 \ /:2 \ \Rightarrow \ a+b=-1.$$

Sada je:

$$a^2+b^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-2\cdot a\cdot b=\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right)-2\cdot a\cdot b=(a+b)^2-2\cdot a\cdot b=$$

$$=\begin{bmatrix} a+b=-1 \\ a\cdot b=3 \end{bmatrix}=(-1)^2-2\cdot 3=1-6=-5.$$

Vježba 552

Ako je $a\cdot b=2$ i $a^2\cdot b+a\cdot b^2=(a+b)-2$, koliko je a^2+b^2?

Rezultat: 0.

Zadatak 553 (Sara, gimnazija)

Ako je $\frac{x-2\cdot y}{2\cdot x+y}=3$, koliko je $\frac{x+3\cdot y}{3\cdot x-y}$?

Rješenje 553

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$\frac{x-2\cdot y}{2\cdot x+y}=3 \Rightarrow \frac{x-2\cdot y}{2\cdot x+y}=3 \;/\cdot(2\cdot x+y) \Rightarrow x-2\cdot y=3\cdot(2\cdot x+y) \Rightarrow x-2\cdot y=6\cdot x+3\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-6\cdot x=3\cdot y+2\cdot y \Rightarrow -5\cdot x=5\cdot y \Rightarrow -5\cdot x=5\cdot y \;/:(-5) \Rightarrow x=-y.$$

Sada je:

$$\frac{x+3\cdot y}{3\cdot x-y}=[x=-y]=\frac{-y+3\cdot y}{3\cdot(-y)-y}=\frac{2\cdot y}{-3\cdot y-y}=\frac{2\cdot y}{-4\cdot y}=-\frac{2\cdot y}{4\cdot y}=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 553

Ako je $\frac{x-2\cdot y}{2\cdot x+y}=3$, koliko je $\frac{3\cdot x-y}{x+3\cdot y}$?

Rezultat: – 2.

Zadatak 554 (Sara, gimnazija)

Zbroj dvaju pozitivnih brojeva jednak je zbroju njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rješenje 554

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Prema uvjetu zadatka dobije se sljedeća jednadžba.

$$x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow x+y=\frac{y+x}{x\cdot y} \Rightarrow x+y=\frac{x+y}{x\cdot y} \;/\cdot\frac{x\cdot y}{x+y} \Rightarrow x\cdot y=1.$$

Vježba 554

Razlika dvaju pozitivnih brojeva, međusobno različitih, jednaka je razlici njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rezultat: – 1.

Zadatak 555 (Anita, gimnazija)

Dokazati nejednakost $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$, ako je $a < b,\ a > 0,\ b > 0,\ k > 0.$

Rješenje 555

Ponovimo!

$$x < y\ ,\ z > 0\ \Rightarrow\ x \cdot z < y \cdot z \quad , \quad x < y\ ,\ z \in R\ \Rightarrow\ x + z < y + z.$$

$$x < y\ ,\ z > 0\ \Rightarrow\ \frac{x}{z} < \frac{y}{z}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je a < b, a > 0, b > 0 i k > 0, slijedi:

$$a < b\ ,\ k > 0\ \Rightarrow\ a \cdot k < b \cdot k\ \Rightarrow\ a \cdot k < b \cdot k\ /+ a \cdot b\ \Rightarrow\ a \cdot b + a \cdot k < a \cdot b + b \cdot k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a \cdot (b + k) < b \cdot (a + k)\ \Rightarrow\ a \cdot (b + k) < b \cdot (a + k)\ / \cdot \frac{1}{b \cdot (b + k)}\ \Rightarrow\ \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

Dokaz gotov.

Vježba 555

Dokazati nejednakost $\frac{a}{b} > \frac{a+k}{b+k}$, ako je $a > b,\ a > 0,\ b > 0,\ k > 0.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 556 (Anita, gimnazija)

Koji je broj veći: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ ili $100 + 99 + 98 + 97 + ... + 4 + 3 + 2 + 1$?

Rješenje 556

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\ ,\ n \in N.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Preoblikujemo prvi broj.

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 =$$

$$= (100 - 99) \cdot (100 + 99) + (98 - 97) \cdot (98 + 97) + ... + (4 - 3) \cdot (4 + 3) + (2 - 1) \cdot (2 + 1) =$$

$$= 1 \cdot (100 + 99) + 1 \cdot (98 + 97) + ... + 1 \cdot (4 + 3) + 1 \cdot (2 + 1) = 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Ti brojevi su jednaki, a zbroj iznosi:

$$1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2}\ \Rightarrow\ 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+2+3+...+99+100=\frac{100\cdot 101}{2}\ \Rightarrow\ 1+2+3+...+99+100=50\cdot 101\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+2+3+...+99+100=5050.$$

Vježba 556

Koji je broj veći: $200^2-199^2+198^2-197^2+...+4^2-3^2+2^2-1^2$ ili $200+199+198+197+...+4+3+2+1$?

Rezultat: Brojevi su jednaki, a zbroj je 20100.

Zadatak 557 (Tina, ekonomska škola)

Pomnoži $(3\cdot a+3\cdot b-2\cdot c)\cdot(3\cdot a-3\cdot b+2\cdot c)$.

Rješenje 557

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$(3\cdot a+3\cdot b-2\cdot c)\cdot(3\cdot a-3\cdot b+2\cdot c)=$$

$$=9\cdot a^2-9\cdot a\cdot b+6\cdot a\cdot c+9\cdot a\cdot b-9\cdot b^2+6\cdot b\cdot c-6\cdot a\cdot c+6\cdot b\cdot c-4\cdot c^2=$$

$$=9\cdot a^2-9\cdot a\cdot b+6\cdot a\cdot c+9\cdot a\cdot b-9\cdot b^2+6\cdot b\cdot c-6\cdot a\cdot c+6\cdot b\cdot c-4\cdot c^2=$$

$$=9\cdot a^2-9\cdot b^2+6\cdot b\cdot c+6\cdot b\cdot c-4\cdot c^2=9\cdot a^2-9\cdot b^2-4\cdot c^2+12\cdot b\cdot c.$$

2.inačica

$$(3\cdot a+3\cdot b-2\cdot c)\cdot(3\cdot a-3\cdot b+2\cdot c)=(3\cdot a+(3\cdot b-2\cdot c))\cdot(3\cdot a-(3\cdot b-2\cdot c))=$$

$$=(3\cdot a)^2-(3\cdot b-2\cdot c)^2=9\cdot a^2-\left(9\cdot b^2-12\cdot b\cdot c+4\cdot c^2\right)=9\cdot a^2-9\cdot b^2+12\cdot b\cdot c-4\cdot c^2=$$

$$=9\cdot a^2-9\cdot b^2-4\cdot c^2+12\cdot b\cdot c.$$

Vježba 557

Pomnoži $(2\cdot c-3\cdot a-3\cdot b)\cdot(3\cdot b-3\cdot a-2\cdot c)$.

Rezultat: $9\cdot a^2-9\cdot b^2-4\cdot c^2+12\cdot b\cdot c.$

Zadatak 558 (Tina, ekonomska škola)

Zapiši u obliku potencije s bazom 6 sljedeći izraz $2^n\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}\cdot 3^n+6^{n-1}$.

Rješenje 558

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$2^{n}\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}\cdot 3^{n}+6^{n-1}=2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 3^{-1}+2^{n}\cdot 2^{-1}\cdot 3^{n}+6^{n}\cdot 6^{-1}=$$

$$=2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 3^{-1}+2^{n}\cdot 3^{n}\cdot 2^{-1}+6^{n}\cdot 6^{-1}=\left(2^{n}\cdot 3^{n}\right)\cdot 3^{-1}+\left(2^{n}\cdot 3^{n}\right)\cdot 2^{-1}+6^{n}\cdot 6^{-1}=$$

$$=(2\cdot 3)^{n}\cdot 3^{-1}+(2\cdot 3)^{n}\cdot 2^{-1}+6^{n}\cdot 6^{-1}=6^{n}\cdot 3^{-1}+6^{n}\cdot 2^{-1}+6^{n}\cdot 6^{-1}=$$

$$=6^{n}\cdot 3^{-1}+6^{n}\cdot 2^{-1}+6^{n}\cdot 6^{-1}=6^{n}\cdot\left(3^{-1}+2^{-1}+6^{-1}\right)=6^{n}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$=6^{n}\cdot\frac{2+3+1}{6}=6^{n}\cdot\frac{6}{6}=6^{n}\cdot\frac{6}{6}=6^{n}.$$

Vježba 558

Zapiši u obliku potencije s bazom 6 sljedeći izraz $2^{n}\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}\cdot 3^{n}+\frac{1}{6}\cdot 6^{n}$.

Rezultat: 6^{n}.

Zadatak 559 (Ivana, gimnazija)

Pojednostavni razlomak $\dfrac{3\cdot 2^{n+1}-2^{n}}{6\cdot 2^{n-1}+2^{n+1}}$.

Rješenje 559

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\frac{3\cdot 2^{n+1}-2^{n}}{6\cdot 2^{n-1}+2^{n+1}}=\frac{3\cdot 2^{n}\cdot 2^{1}-2^{n}}{6\cdot 2^{n}\cdot 2^{-1}+2^{n}\cdot 2^{1}}=\frac{3\cdot 2^{n}\cdot 2^{1}-2^{n}}{6\cdot 2^{n}\cdot 2^{-1}+2^{n}\cdot 2^{1}}=\frac{2^{n}\cdot(3\cdot 2-1)}{2^{n}\cdot\left(6\cdot\frac{1}{2}+2\right)}=$$

$$=\frac{2^{n}\cdot(3\cdot 2-1)}{2^{n}\cdot\left(6\cdot\frac{1}{2}+2\right)}=\frac{3\cdot 2-1}{6\cdot\frac{1}{2}+2}=\frac{6-1}{6\cdot\frac{1}{2}+2}=\frac{5}{3+2}=\frac{5}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

Vježba 559

Pojednostavni razlomak $\frac{3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n}}{3 \cdot 2^{n} + 2^{n+1}}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 560 (Ivana, gimnazija)

Koji je broj veći, 4^{60} ili 8^{40}?

Rješenje 560

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 4^{60} = \left(2^{2}\right)^{60} = 2^{120} \\ 8^{40} = \left(2^{3}\right)^{40} = 2^{120} \end{array}\right\} \Rightarrow 4^{60} = 8^{40}.$$

Vježba 560

Koji je broj veći, 9^{60} ili 27^{40}?

Rezultat: Jednaki su.