Zadatak 101 (Felix, gimnazija)

Zapišite u obliku potencije s bazom 6: $4^n \cdot 9^{n-1} + 4^{n+1} \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1}$.

Rješenje 101

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

1.inačica

$$4^n \cdot 9^{n-1} + 4^{n+1} \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} = 4^n \cdot 9^{n-1} + 4 \cdot 4^n \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot (4 \cdot 9)^{n-1} =$$

$$= 4^n \cdot 9^{n-1} + 4 \cdot 4^n \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 4^{n-1} \cdot 9^{n-1} = 4^n \cdot 9^{n-1} + 4 \cdot 4^n \cdot 9^{n-1} + 4^2 \cdot 4^{n-1} \cdot 9^{n-1} =$$

$$= 4^n \cdot 9^{n-1} + 4 \cdot 4^n \cdot 9^{n-1} + 4 \cdot 4^n \cdot 9^{n-1} = \left[\text{izlučimo } 4^n \cdot 9^{n-1}\right] = 4^n \cdot 9^{n-1} \cdot (1+4+4) =$$

$$= 4^n \cdot 9^{n-1} \cdot 9 = 4^n \cdot 9^n = (4 \cdot 9)^n = 36^n = \left(6^2\right)^n = 6^{2n}.$$

2.inačica

$$4^n \cdot 9^{n-1} + 4^{n+1} \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \cdot 9^{n-1} + 4^2 \cdot 4^{n-1} \cdot 9^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} =$$

$$= 4 \cdot (4 \cdot 9)^{n-1} + 4^2 \cdot (4 \cdot 9)^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} = 4 \cdot 36^{n-1} + 4^2 \cdot 36^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} =$$

$$= 4 \cdot 36^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} + 16 \cdot 36^{n-1} = \left[\text{izlučimo } 36^{n-1}\right] = 36^{n-1} \cdot (4+16+16) = 36^{n-1} \cdot 36 = 36^n = \left(6^2\right)^n = 6^{2n}.$$

Vježba 101

Zapišite u obliku potencije s bazom 2: $2^{n+2} + 4 \cdot 2^n$.

Rezultat: 2^{n+3}.

Zadatak 102 (Maja, gimnazija)

Izračunajte: $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-1} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{-1} + \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{-1} + \ldots + \left(\sqrt{119}+\sqrt{121}\right)^{-1}$.

Rješenje 102

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

Uočimo da su brojevi pod korijenima (radikandi) uzastopni neparni prirodni brojevi. Opći član glasi:

$$a_n = \left(\sqrt{2 \cdot n - 1} + \sqrt{2 \cdot n + 1}\right)^{-1}.$$

Racionalizacijom općeg člana a_n dobije se:

$$a_n = \left(\sqrt{2 \cdot n - 1} + \sqrt{2 \cdot n + 1}\right)^{-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n - 1} + \sqrt{2 \cdot n + 1}} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot n - 1} - \sqrt{2 \cdot n + 1}}{\sqrt{2 \cdot n - 1} - \sqrt{2 \cdot n + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{2 \cdot n - 1} - \sqrt{2 \cdot n + 1}}{2 \cdot n - 1 - 2 \cdot n - 1} \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{2 \cdot n - 1} - \sqrt{2 \cdot n + 1}}{-2} \Rightarrow a_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot n - 1} - \sqrt{2 \cdot n + 1}\right).$$

Vrijednost izraza je:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{-1} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{-1} + \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{-1} + \ldots + \left(\sqrt{119}+\sqrt{121}\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right) - \ldots - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{119}-\sqrt{121}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \ldots - \sqrt{119} + \sqrt{119} - \sqrt{121}\right) =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\sqrt{121}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(1-11)=-\frac{1}{2}\cdot(-10)=5.$$

Vježba 102

Izračunajte: $\left(1+\sqrt{3}\right)^{-1}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{-1}+\ ...\ +\left(\sqrt{79}+\sqrt{81}\right)^{-1}.$

Rezultat: 4.

Zadatak 103 (Mira, gimnazija)

Izračunajte: $\sqrt[5]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[5]{2-\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}.$

Rješenje 103

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\quad,\quad(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.$$

$$\sqrt[5]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[5]{2-\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[5]{\left(2+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\sqrt[5]{2^2-\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[5]{4-3+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[5]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[5]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\sqrt[5]{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\sqrt[5]{2-1}=\sqrt[5]{1}=1.$$

Vježba 103

Izračunajte: $\sqrt[3]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 104 (1A, hotelijerska škola)

Koliko iznosi kvocijent najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva $2^m\cdot 3^n$ i $2^n\cdot 3^m$, pri čemu su $m, n\in N$ i $m>n$.

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad,\quad\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Budući da je m > n, slijedi:

$$\left[\text{najmanji zajednički višekratnik}\right]\Rightarrow v\left(2^m\cdot 3^n,\ 2^n\cdot 3^m\right)=2^m\cdot 3^m=(2\cdot 3)^m=6^m,$$

$$\left[\text{najveći zajednički djelitelj}\right]\Rightarrow M\left(2^m\cdot 3^n,\ 2^n\cdot 3^m\right)=2^n\cdot 3^n=(2\cdot 3)^n=6^n.$$

Kvocijent najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja iznosi:

$$\frac{v\left(2^m\cdot 3^n,\ 2^n\cdot 3^m\right)}{M\left(2^m\cdot 3^n,\ 2^n\cdot 3^m\right)}=\frac{6^m}{6^n}=6^{m-n}.$$

Vježba 104

Koliko iznosi kvocijent najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva $2^m\cdot 5^n$ i $2^n\cdot 5^m$, pri čemu su $m, n\in N$ i $m>n$.

Rezultat: $10^{m-n}.$

Zadatak 105 (Ivan, tehnička škola)

Rastavi na faktore koristeći se formulom za razliku kvadrata: x^4+x^2+1.

Rješenje 105

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$x^4+x^2+1=\begin{bmatrix}\text{rastavimo } x^2\\ x^2=2\cdot x^2-x^2\end{bmatrix}=x^4+2\cdot x^2-x^2+1=\underbrace{\left(x^4+2\cdot x^2+1\right)}_{\text{KVADRAT ZBROJA}}-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=$$

$$=\left(x^2+1-x\right)\cdot\left(x^2+1+x\right)=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right).$$

Vježba 105

Rastavi na faktore koristeći se formulom za razliku kvadrata: $a^8 + a^4 + 1$.

Rezultat: $(a^2 - a + 1) \cdot (a^2 + a + 1) \cdot (a^4 - a^2 + 1)$.

Zadatak 106 (Ivan, tehnička škola)

Rastavi na faktore koristeći se formulom za razliku kvadrata: $2 \cdot a \cdot b - a^2 - b^2 + c^2$.

Rješenje 106

Ponovimo!

$$x^2-2\cdot x\cdot y+y^2=(x-y)^2 \quad , \quad x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

$$2\cdot a\cdot b-a^2-b^2+c^2=c^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2=c^2-\underbrace{\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}_{\text{KVADRAT RAZLIKE}}=c^2-(a-b)^2=$$

$$=(c-(a-b))\cdot(c+(a-b))=(c-a+b)\cdot(c+a-b)=(a-b+c)\cdot(b+c-a).$$

Vježba 106

Rastavi na faktore koristeći se formulom za razliku kvadrata: $a^8 + a^4 + 1$.

Rezultat: $(a^2 - a + 1) \cdot (a^2 + a + 1) \cdot (a^4 - a^2 + 1)$.

Zadatak 107 (Veki, geodetska škola)

Rastavite na faktore izraz: $3ab(2a + 5) + 9b(2a + 5)$.

Rješenje 107

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Obrat:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Primjeri:

- $$18x+27y=\begin{bmatrix}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(18,\,27)=9\end{bmatrix}=9\cdot(2x+3y),$$
- $$a^9+a^6-a^4=\begin{bmatrix}\text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, a}^4\end{bmatrix}=a^4\cdot\left(a^5+a^2-1\right),$$
- $$12x^3y+8x^5z=\begin{bmatrix}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(12,\,8)=4,\\ \text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, } x^3\end{bmatrix}=4\cdot x^3\cdot\left(3y+2x^2z\right),$$
- $$(2a+3)\cdot(a+b)+(2a+3)\cdot(a+c)=\begin{bmatrix}\text{izlučujemo istu}\\ \text{zagradu } (2a+3)\end{bmatrix}=(2a+3)\cdot(a+b+a+c)=$$
$$=(2a+3)\cdot(2a+b+c).$$

Rezultat zadatka iznosi:

$$3ab(2a+5)+9b(2a+5)=\left[\begin{array}{l}\text{izlučit ćemo broj 3, potenciju } b \\ \text{i zagradu } (2\cdot a+5)\end{array}\right]=3\cdot b\cdot(2\cdot a+5)\cdot(a+3)=3b(2a+5)(a+3).$$

Vježba 107

Rastavite na faktore izraz: 3ab(2a + 5) + 6b(2a + 5).

Rezultat: $3b(2a+5)(a+2)$.

Zadatak 108 (Veki, geodetska škola)

Rastavite na faktore izraz: (2a – 1)(3a + 2) + (2a – 1)(2a + 3).

Rješenje 108

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Obrat:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Primjeri:

- $$18x+27y=\left[\begin{array}{l}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu} \\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(18,\,27)=9\end{array}\right]=9\cdot(2x+3y),$$
- $$a^9+a^6-a^4=\left[\begin{array}{l}\text{od potencija istih baza izlučujemo} \\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, } a^4\end{array}\right]=a^4\cdot\left(a^5+a^2-1\right),$$
- $$12x^3y+8x^5z=\left[\begin{array}{l}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu} \\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(12,\,8)=4, \\ \text{od potencija istih baza izlučujemo} \\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, } x^3\end{array}\right]=4\cdot x^3\cdot\left(3y+2x^2z\right),$$
- $$(2a+3)\cdot(a+b)+(2a+3)\cdot(a+c)=\left[\begin{array}{l}\text{izlučujemo istu} \\ \text{zagradu } (2a+3)\end{array}\right]=(2a+3)\cdot(a+b+a+c)=$$
$$=(2a+3)\cdot(2a+b+c).$$

Rezultat zadatka iznosi:

$$(2a-1)(3a+2)+(2a-1)(2a+3)=\left[\begin{array}{l}\text{izlučit ćemo} \\ \text{zagradu } (2\cdot a-1)\end{array}\right]=(2\cdot a-1)\cdot(3a+2+2a+3)=(2\cdot a-1)\cdot(5a+5)=$$
$$=\left[\begin{array}{l}\text{iz druge zagrade} \\ \text{izlučit ćemo broj 5}\end{array}\right]=(2\cdot a-1)\cdot 5\cdot(a+1)=5(2a-1)(a+1).$$

Vježba 108

Rastavite na faktore izraz: (a – 1)(3a + 2) + (a – 1)(2a + 3).

Rezultat: $=5(a-1)(a+1)$.

Zadatak 109 (Veki, geodetska škola)

Rastavite na faktore izraz: $(4a^2 + 2b)(2ab + 3b) - (2ab + 4b^2)(2a^2 + 3a)$.

Rješenje 109

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Obrat:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Primjeri:

- $$18x+27y=\begin{bmatrix}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(18,\ 27)=9\end{bmatrix}=9\cdot(2x+3y),$$

- $$a^9+a^6-a^4=\begin{bmatrix}\text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, a}^4\end{bmatrix}=a^4\cdot\left(a^5+a^2-1\right),$$

- $$12x^3y+8x^5z=\begin{bmatrix}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(12,\ 8)=4,\\ \text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, } x^3\end{bmatrix}=4\cdot x^3\cdot\left(3y+2x^2z\right),$$

- $$(2a+3)\cdot(a+b)+(2a+3)\cdot(a+c)=\begin{bmatrix}\text{izlučujemo istu}\\ \text{zagradu } (2a+3)\end{bmatrix}=(2a+3)\cdot(a+b+a+c)=$$
$$=(2a+3)\cdot(2a+b+c).$$

Rezultat zadatka iznosi:

$$\left(4a^2+2b\right)(2ab+3b)-\left(2ab+4b^2\right)\left(2a^2+3a\right)=\begin{bmatrix}\text{iz zagrade } \left(4a^2+2b\right) \text{ izlučit ćemo } 2\\ \text{iz zagrade } (2ab+3b) \text{ izlučit ćemo } b\\ \text{iz zagrade } \left(2ab+4b^2\right) \text{ izlučit ćemo } 2\cdot b\\ \text{iz zagrade } \left(2a^2+3a\right) \text{ izlučit ćemo } a\end{bmatrix}=$$

$$=2\cdot\left(2a^2+b\right)\cdot b\cdot(2a+3)-2\cdot b\cdot(a+2b)\cdot a\cdot(2a+3)=\begin{bmatrix}\text{izlučit ćemo}\\ 2\cdot b\cdot(2a+3)\end{bmatrix}=$$

$$=2\cdot b\cdot(2a+3)\cdot\left(2a^2+b-(a+2b)\cdot a\right)=2\cdot b\cdot(2a+3)\cdot\left(2a^2+b-a^2-2ab\right)=2b(2a+3)\cdot\left(a^2+b-2ab\right).$$

Vježba 109

Rastavite na faktore izraz: $(4a^2 + 2b)(2ab + 3b) - (2ab + 6b^2)(2a^2 + 3a)$.

Rezultat: $2b(2a+3)\cdot\left(a^2+b-3ab\right).$

Zadatak 110 (Veki, geodetska škola)

Rastavite na faktore izraz: $(1 + abc)(a + b + c) - (1 + abc)(a - b - c)$.

Rješenje 110

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Obrat:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Primjeri:

- $$18x+27y=\begin{bmatrix}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(18,\ 27)=9\end{bmatrix}=9\cdot(2x+3y),$$

- $$a^9+a^6-a^4=\begin{bmatrix}\text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, a}^4\end{bmatrix}=a^4\cdot\left(a^5+a^2-1\right),$$

- $$12x^3y+8x^5z=\left[\begin{array}{l}\text{od brojeva (koeficijenata) izlučujemo njihovu}\\ \text{najveću zajedničku mjeru, } M(12,\,8)=4,\\ \text{od potencija istih baza izlučujemo}\\ \text{potenciju s najmanjim eksponentom, } x^3\end{array}\right]=4\cdot x^3\cdot\left(3y+2x^2z\right),$$
- $$(2a+3)\cdot(a+b)+(2a+3)\cdot(a+c)=\left[\begin{array}{l}\text{izlučujemo istu}\\ \text{zagradu } (2a+3)\end{array}\right]=(2a+3)\cdot(a+b+a+c)=$$
$$=(2a+3)\cdot(2a+b+c).$$

Rezultat zadatka iznosi:

$$(1+abc)(a+b+c)-(1+abc)(a-b-c)=\left[\begin{array}{l}\text{izlučit ćemo}\\ \text{zagradu } (1+abc)\end{array}\right]=(1+abc)\cdot(a+b+c-(a-b-c))=$$
$$=(1+abc)\cdot(a+b+c-a+b+c)=(1+abc)\cdot(2b+2c)=\left[\begin{array}{l}\text{iz druge zagrade}\\ \text{izlučit ćemo 2}\end{array}\right]=(1+abc)\cdot 2\cdot(b+c)=$$
$$=2(1+abc)(b+c).$$

Vježba 110

Rastavite na faktore izraz: (1 + abc)(a + b + c) – (1 + abc)(a – b + c).

Rezultat: $=2b(1+abc).$

Zadatak 111 (Anita, ekonomska škola)

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $(x-y)^2-4\cdot x^2\cdot y^2.$

Rješenje 111

Ponovimo!

$$\text{Razlika kvadrata: } I^2-II^2=(I-II)\cdot(I+II).$$

$$(x-y)^2-4\cdot x^2\cdot y^2=(x-y)^2-(2\cdot x\cdot y)^2=\left[\begin{array}{l}I^2=(x-y)^2\ \Rightarrow\ I=x-y\\ II^2=(2\cdot x\cdot y)^2\ \Rightarrow\ II=2\cdot x\cdot y\end{array}\right]=$$
$$=(x-y-2\cdot x\cdot y)\cdot(x-y+2\cdot x\cdot y).$$

Vježba 111

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $(x-y)^2-9\cdot x^2\cdot y^2.$

Rezultat: $(x-y-3\cdot x\cdot y)\cdot(x-y+3\cdot x\cdot y).$

Zadatak 112 (Anita, ekonomska škola)

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $a^2+5\cdot a^3-a^4-5\cdot a.$

Rješenje 112

Ponovimo!

$$\text{Razlika kvadrata: } I^2-II^2=(I-II)\cdot(I+II).$$

$$a^2+5\cdot a^3-a^4-5\cdot a=\left[\text{izlučimo } a\right]=a\cdot\left(a+5\cdot a^2-a^3-5\right)=\left[\begin{array}{l}\text{u zagradi grupiramo}\\ \text{po dva člana}\end{array}\right]=$$
$$=a\cdot\left(a-a^3-5+5\cdot a^2\right)=\left[\begin{array}{l}\text{iz prva dva člana izlučimo a,}\\ \text{iz druga dva člana izlučimo }-5\end{array}\right]=a\cdot\left(a\cdot\left(1-a^2\right)-5\cdot\left(1-a^2\right)\right)=$$
$$=\left[\text{izlučimo zagradu } \left(1-a^2\right)\right]=a\cdot\left(1-a^2\right)\cdot(a-5)=\left[\begin{array}{l}\text{razlika kvadrata}\\ 1-a^2=(1-a)\cdot(1+a)\end{array}\right]=a\cdot(1-a)\cdot(1+a)\cdot(a-5).$$

Vježba 112

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $a+5\cdot a^{2}-a^{3}-5$.

Rezultat: $(1-a)\cdot(1+a)\cdot(a-5)$.

Zadatak 113 (Malena, hotelijerska škola)

Skratite razlomak: $\dfrac{a^{3}+a^{2}+a+1}{a^{2}-1}$.

Rješenje 113

Ponovimo!

$$\text{Razlika kvadrata: } I^{2}-II^{2}=(I-II)\cdot(I+II).$$

$$\frac{a^{3}+a^{2}+a+1}{a^{2}-1}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku grupiramo po dva člana,}\\ \text{u nazivniku je razlika kvadrata}\end{array}\right]=\frac{\left(a^{3}+a^{2}\right)+(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{a^{2}\cdot(a+1)+(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo}\\ \text{zagradu } (a+1)\end{array}\right]=\frac{(a+1)\cdot\left(a^{2}+1\right)}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)\cdot\left(a^{2}+1\right)}{(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{a^{2}+1}{a-1}.$$

Vježba 113

Skratite razlomak: $\dfrac{a^{3}+a^{2}+a+1}{a+1}$.

Rezultat: $a^{2}+1$.

Zadatak 114 (Josipa, hotelijerska škola)

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $3\cdot(x+2)^{2}-27$.

Rješenje 114

Ponovimo!

$$\text{Razlika kvadrata: } I^{2}-II^{2}=(I-II)\cdot(I+II).$$

$$3\cdot(x+2)^{2}-27=[\text{izlučimo } 3]=3\cdot\left((x+2)^{2}-9\right)=3\cdot\left((x+2)^{2}-3^{2}\right)=\left[\begin{array}{l}I^{2}=(x+2)^{2}\ \Rightarrow\ I=x+2\\ II^{2}=3^{2}\ \Rightarrow\ II=3\end{array}\right]=$$

$$=3\cdot(x+2-3)\cdot(x+2+3)=3\cdot(x-1)\cdot(x+5).$$

Vježba 114

Rastavite na faktore uporabom formule za razliku kvadrata: $2\cdot(x+3)^{2}-8$.

Rezultat: $2\cdot(x+1)\cdot(x+5)$.

Zadatak 115 (1A, hotelijerska škola)

Izračunajte: $(3\cdot x+4)\cdot(2\cdot x-5)$.

Rješenje 115

Ponovimo!

Dvije zagrade pomnožit ćemo tako da svaki član prve zagrade pomnožimo sa svakim članom druge zagrade.

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

Računamo:

$$(3\cdot x+4)\cdot(2\cdot x-5)=6\cdot x^{2}-15\cdot x+8\cdot x-20=6\cdot x^{2}-7\cdot x-20.$$

Vježba 115

Izračunajte: $(2 \cdot x - 3) \cdot (3 \cdot x + 2)$.

Rezultat: $6 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 6$.

Zadatak 116 (Vedrana, gimnazija)

Izračunajte: $$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right] \cdot (ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

Rješenje 116

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right) = a - b$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

$$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right] \cdot (ab)^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^1 \right] \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right)^2 - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right] \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right)^2 - \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right) - \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a-b) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right) - \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a} + a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b} - \left(\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} \right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a} + a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a} + a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a^2 \cdot a} + \sqrt{b^2 \cdot b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a} + a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt{b} - a \cdot \sqrt{a} + b \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1.$$

Vježba 116

Izračunajte: $$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right].$$

Rezultat: $\sqrt{ab}.$

Zadatak 117 (Matija, hotelijerska škola)

Izračunajte: $$3+\frac{a}{a+b}+\frac{2\cdot a\cdot b}{(a+b)^2}-\frac{3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}.$$

Rješenje 117

Ponovimo!

Kub zbroja: $(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$ Kvadrat zbroja: $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$.

$$3+\frac{a}{a+b}+\frac{2\cdot a\cdot b}{(a+b)^2}-\frac{3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}=\left[\begin{array}{l}\text{zajednički nazivnik je potencija}\\ \text{s najvećim eksponentom}:(a+b)^3\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3\cdot(a+b)^3+a\cdot(a+b)^2+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)-3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}=$$

$$=\frac{3\cdot\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)+a\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right)+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)-3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}=$$

$$=\frac{3\cdot a^3+9\cdot a^2\cdot b+9\cdot a\cdot b^2+3\cdot b^3+a^3+2\cdot a^2\cdot b+a\cdot b^2+2\cdot a^2\cdot b+2\cdot a\cdot b^2-3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{zbrajamo}\\ \text{iste}\\ \text{potencije}\end{array}\right]=\frac{3\cdot a^3+9\cdot a^2\cdot b+9\cdot a\cdot b^2+3\cdot b^3+a^3+2\cdot a^2\cdot b+a\cdot b^2+2\cdot a^2\cdot b+2\cdot a\cdot b^2-3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}=$$

$$=\frac{4\cdot a^3+10\cdot a^2\cdot b+12\cdot a\cdot b^2+3\cdot b^3}{(a+b)^3}.$$

Vježba 117

Izračunajte: $$3+\frac{a}{a+b}-\frac{2\cdot a\cdot b}{(a+b)^2}-\frac{3\cdot a^2\cdot b}{(a+b)^3}.$$

Rezultat: $$\frac{4\cdot a^3+6\cdot a^2\cdot b+8\cdot a\cdot b^2+3\cdot b^3}{(a+b)^3}.$$

Zadatak 117 (Marija, hotelijerska škola)

Izračunajte: $$\frac{b}{2\cdot a+3\cdot b}+\frac{2\cdot a}{2\cdot a-3\cdot b}+\frac{3\cdot a^2-5\cdot b^2}{4\cdot a^2-9\cdot b^2}.$$

Rješenje 117

Ponovimo!

Razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$.

$$\frac{b}{2\cdot a+3\cdot b}+\frac{2\cdot a}{2\cdot a-3\cdot b}+\frac{3\cdot a^2-5\cdot b^2}{4\cdot a^2-9\cdot b^2}=\left[\begin{array}{c}\text{razlika kvadrata}\\ 4\cdot a^2-9\cdot b^2=(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{b}{2\cdot a+3\cdot b}+\frac{2\cdot a}{2\cdot a-3\cdot b}+\frac{3\cdot a^2-5\cdot b^2}{(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)}=\left[\begin{array}{l}\text{zajednički nazivnik}\\ (2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{b\cdot(2\cdot a-3\cdot b)+2\cdot a\cdot(2\cdot a+3\cdot b)+3\cdot a^2-5\cdot b^2}{(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)}=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b-3\cdot b^2+4\cdot a^2+6\cdot a\cdot b+3\cdot a^2-5\cdot b^2}{(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)}=\left[\begin{array}{l}\text{zbrajamo iste}\\ \text{potencije}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b-3\cdot b^2+4\cdot a^2+6\cdot a\cdot b+3\cdot a^2-5\cdot b^2}{(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)}=\frac{7\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-8\cdot b^2}{(2\cdot a-3\cdot b)\cdot(2\cdot a+3\cdot b)}=\frac{7\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-8\cdot b^2}{4\cdot a^2-9\cdot b^2}.$$

Vježba 117

Izračunajte: $\dfrac{b}{2\cdot a+3\cdot b}+\dfrac{2\cdot a}{2\cdot a-3\cdot b}-\dfrac{3\cdot a^2-5\cdot b^2}{4\cdot a^2-9\cdot b^2}$.

Rezultat: $\dfrac{a^2+8\cdot a\cdot b+2\cdot b^2}{4\cdot a^2-9\cdot b^2}$.

Zadatak 118 (Anamarija, gimnazija)

Pojednostavnite: $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Rješenje 118

Ponovimo!

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Sve faktore izvan korijena unesemo pod korijen:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(10-2\cdot\sqrt{60}+6\right)\cdot\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(16-2\cdot\sqrt{60}\right)\cdot(16-15)}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(16-2\cdot\sqrt{4\cdot 15}\right)\cdot 1}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(16-2\cdot 2\cdot\sqrt{15}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(16-4\cdot\sqrt{15}\right)}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot 4\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{4\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{4\cdot\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)}=$$

$$=\sqrt{4\cdot(16-15)}=\sqrt{4\cdot 1}=\sqrt{4}=2.$$

Vježba 118

Pojednostavnite: $\left(\sqrt{32}+\sqrt{30}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 119 (Anamarija, gimnazija)

Skratite razlomak: $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3}-x+\sqrt{x}-1}$.

Rješenje 119

Ponovimo!

Djelomično korjenovanje: $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=a\cdot\sqrt{a}$.

Razlika kvadrata: $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$.

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^3}-x+\sqrt{x}-1}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2\cdot x}-x+\sqrt{x}-1}=\frac{x^2-1}{x\cdot\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}=\left[\begin{array}{l}\text{grupiramo članove}\\ \text{u nazivniku}\end{array}\right]=\frac{x^2-1}{\left(x\cdot\sqrt{x}-x\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)}=$$

$$=\frac{x^2-1}{x\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x^2-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot(x+1)}=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Vježba 119

Skratite razlomak: $\dfrac{x^2-1}{\left(\sqrt{x^3}-x+\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 120 (Anamarija, gimnazija)

Skratite razlomak: $\dfrac{27^x-3\cdot 18^x+3\cdot 12^x-8^x}{3^x-2^x}$.

Rješenje 120

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n,\quad (a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\frac{27^x-3\cdot 18^x+3\cdot 12^x-8^x}{3^x-2^x}=\frac{\left(3^3\right)^x-3\cdot(9\cdot 2)^x+3\cdot(3\cdot 4)^x-\left(2^3\right)^x}{3^x-2^x}=\frac{\left(3^x\right)^3-3\cdot 9^x\cdot 2^x+3\cdot 3^x\cdot 4^x-\left(2^x\right)^3}{3^x-2^x}=$$

$$=\frac{\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^2\right)^x\cdot 2^x+3\cdot 3^x\cdot\left(2^2\right)^x-\left(2^x\right)^3}{3^x-2^x}=\frac{\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2\cdot 2^x+3\cdot 3^x\cdot\left(2^x\right)^2-\left(2^x\right)^3}{3^x-2^x}=$$

$$=\frac{\left(3^x-2^x\right)^3}{3^x-2^x}=\left(3^x-2^x\right)^2=\left(3^x\right)^2-2\cdot 3^x\cdot 2^x+\left(2^x\right)^2=\left(3^2\right)^x-2\cdot(3\cdot 2)^x+\left(2^2\right)^x=9^x-2\cdot 6^x+4^x.$$

Vježba 120

Skratite razlomak: $\dfrac{27^x+3\cdot 18^x+3\cdot 12^x+8^x}{3^x+2^x}$.

Rezultat: $9^x+2\cdot 6^x+4^x$.