

Zadatak 021 (Anaira, gimnazija)

Pojednostavnite izraz:

$$a^{\frac{1}{2}} - (a - a^{-2}) : \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right) + (1 - a^{-2}) : \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right) + 2 : a^{\frac{3}{2}}.$$

Rješenje 021

Prije rješavanja samog zadatka podsjetimo se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^3 - 1 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1), \quad a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1),$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a} : \sqrt{a}}{a : \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{\sqrt{a}}{a^2} = \frac{\sqrt{a} : \sqrt{a}}{a^2 : \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}.$$

Možemo sada pisati:

$$\begin{aligned} & a^{\frac{1}{2}} - (a - a^{-2}) : \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right) + (1 - a^{-2}) : \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \right) + 2 : a^{\frac{3}{2}} = \\ & = \sqrt{a} - \left(a - \frac{1}{a^2} \right) : \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) + \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) : \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) + \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \\ & = \sqrt{a} - \frac{a^3 - 1}{a^2} : \frac{a - 1}{\sqrt{a}} + \frac{a^2 - 1}{a^2} : \frac{a + 1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \\ & = \sqrt{a} - \frac{(a - 1) \cdot (a^2 + a + 1)}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a - 1} + \frac{(a - 1) \cdot (a + 1)}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a + 1} + \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \\ & = \sqrt{a} - \frac{a^2 + a + 1}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{1} + \frac{a - 1}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{1} + \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \\ & = \sqrt{a} - \frac{a^2 + a + 1}{\sqrt{a^3}} + \frac{a - 1}{\sqrt{a^3}} + \frac{2}{\sqrt{a^3}} = \frac{a^2 - a^2 - a - 1 + a - 1 + 2}{\sqrt{a^3}} = \frac{0}{\sqrt{a^3}} = 0. \end{aligned}$$

Vježba 021Pojednostavnite izraz: $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a - b}$.

Rezultat: $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

Zadatak 022 (Gina, gimnazija)Ako je $\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 = 3$, koliko iznosi $a^3 + \frac{1}{a^3}$?**Rješenje 022**

Koristimo sljedeće formule:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b).$$

Najprije kubiramo izraz:

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = a^3 + 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \cdot \left(a + \frac{1}{a} \right). \quad (1)$$

Zatim izraz rastavimo u produkt dvije potencije:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) = 3 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right). \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobije se:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) = 3 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} = 0.$$

Vježba 022

Ako je $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$, koliko iznosi $a^2 + \frac{1}{a^2}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 023 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Izračunajte za $x \neq 0$

$$\frac{2^{2x} + 3^{2x} \cdot (2 \cdot 3^x - 1)}{2^{2x} - 3^{2x}} + \frac{2^{3x} - 3^{3x}}{2^{2x} - 3^{2x}} - \frac{2^{2x} - 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}}{2^x - 3^x}.$$

Rješenje 023

Zajednički nazivnik je $2^{2x} - 3^{2x}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2x} + 3^{2x} \cdot (2 \cdot 3^x - 1)}{2^{2x} - 3^{2x}} + \frac{2^{3x} - 3^{3x}}{2^{2x} - 3^{2x}} - \frac{2^{2x} - 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}}{2^x - 3^x} = \\ & = \frac{2^{2x} + 3^{2x} \cdot (2 \cdot 3^x - 1) + 2^{3x} - 3^{3x} - (2^x + 3^x) \cdot (2^{2x} - 2^x \cdot 3^x + 3^{2x})}{2^{2x} - 3^{2x}} = \\ & = [(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \in a^3 + b^3] = \\ & = \frac{2^{2x} + 2 \cdot 3^{3x} - 3^{2x} + 2^{3x} - 3^{3x} - (2^{3x} + 3^{3x})}{2^{2x} - 3^{2x}} = \frac{2^{2x} + 2 \cdot 3^{3x} - 3^{2x} + 2^{3x} - 3^{3x} - 2^{3x} - 3^{3x}}{2^{2x} - 3^{2x}} = \\ & = \frac{2^{2x} + 2 \cdot 3^{3x} - 3^{2x} + 2^{3x} - 2 \cdot 3^{3x} - 3^{3x}}{2^{2x} - 3^{2x}} = \frac{2^{2x} - 3^{2x}}{2^{2x} - 3^{2x}} = 1. \end{aligned}$$

Vježba 023

Izračunajte za $x \neq 0$, $\frac{2^{2x} - 3^{2x}}{2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}$.

Rezultat: $\frac{2^x + 3^x}{2}$.

Zadatak 024 (Lina, hotelijerska škola)

Skratite razlomak: $\frac{2^{n+1} + 2}{2^n + 1}$.

Rješenje 024

Podsjetimo se množenja potencija istih baza:

$$[a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y]$$

i zakona distribucije množenja prema zbrajanju:

$$[a \cdot (b + c) = ab + ac, \quad ab + ac = a \cdot (b + c)].$$

Sada je:

$$\frac{2^{n+1} + 2}{2^n + 1} = \frac{2^n \cdot 2 + 2}{2^n + 1} = \frac{2 \cdot (2^n + 1)}{2^n + 1} = 2.$$

Vježba 024

Skratite razlomak $\frac{3^{n+1} - 3}{3^n - 1}$.

Rezultat: 3.

Zadatak 025 (Miro, tehnička škola)

Izračunaj: $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

Rješenje 025

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right) &= \left(\frac{1}{2 \cdot (1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2 \cdot (1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot (1+\sqrt{a})} \cdot \frac{1-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{2 \cdot (1-\sqrt{a})} \cdot \frac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{a}}{2 \cdot (1-a)} + \frac{1+\sqrt{a}}{2 \cdot (1-a)} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \\ &= \left[\frac{(1-\sqrt{a}) \cdot (1+\sqrt{a})}{2 \cdot (1-a)} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right] \cdot \frac{a+1}{a} = \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2 \cdot (1-a)} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \left(\frac{2}{2 \cdot (1-a)} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) \cdot \frac{a+1}{a} = \\ &= \frac{1+a-a^2-1}{1-a^2} \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{a-a^2}{1-a^2} \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{a \cdot (1-a)}{(1-a) \cdot (1+a)} \cdot \frac{a+1}{a} = 1. \end{aligned}$$

Vježba 025

Izračunaj: $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}}\right) \cdot (1-a)$.

Rezultat: 1.

Zadatak 026 (Petra, gimnazija)

Pojednostavnite izraz: $\left(1 + \frac{a^2+1-b^2}{2a}\right) : \frac{a+b+1}{4ab}$.

Rješenje 026

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2+1-b^2}{2a}\right) : \frac{a+b+1}{4ab} &= \frac{2a+a^2+1-b^2}{2a} \cdot \frac{4ab}{a+b+1} = \left[x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2\right] = \\ &= \frac{(a+1)^2 - b^2}{1} \cdot \frac{2b}{a+b+1} = \left[x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)\right] = \\ &= \frac{(a+1+b) \cdot (a+1-b)}{1} \cdot \frac{2b}{a+b+1} = 2b(a-b+1). \end{aligned}$$

Vježba 026

Pojednostavnite izraz: $\left(1 + \frac{a^2+1-b^2}{2a}\right) : \frac{a+b+1}{2a}$.

Rezultat: $a - b + 1$.

Zadatak 027 (Anaira, gimnazija, Vedrana, gimnazija)

Kolika je vrijednost izraza: $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-1} + \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+1}$?

Rješenje 027

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}-1}} + \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}+1}} = 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}-1}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}+1}} \right] = \\ & = 2 \cdot \left[\frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+1)} \right] = 2 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}+1} + \sqrt{2+\sqrt{3}-1}}{((\sqrt{2+\sqrt{3}}-1) \cdot ((\sqrt{2+\sqrt{3}}+1)))} = \\ & = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - 1^2} = 2 \cdot \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - 1^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 + 2 \cdot \sqrt{6} + 3 - 1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4 + 2 \cdot \sqrt{6}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 \cdot (2 + \sqrt{6})} = \\ & = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \cdot \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} - 2} = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{12} - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{18} - 2 \cdot \sqrt{3}}{6 - 4} = \\ & = 2 \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot 3} - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vježba 027

Kolika je vrijednost izraza:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

Rezultat: $2 \cdot \sqrt{3}$.

Zadatak 028 (Anaira, gimnazija)

Izračunajte: $\frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{1-9^n}{1-4 \cdot 9^n} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n}$.

Rješenje 028

1. inačica

$$\begin{aligned} & \frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{1-9^n}{1-4 \cdot 9^n} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{1-3^{2n}}{1-4 \cdot 3^{2n}} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \left[a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \right] = \\ & = \frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{(1-3^n) \cdot (1+3^n)}{(1-2 \cdot 3^n) \cdot (1+2 \cdot 3^n)} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1+3^n}{1+2 \cdot 3^n} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1+3^n+3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1+2 \cdot 3^n}{1+2 \cdot 3^n} = 1. \end{aligned}$$

2. inačica

Zbog jednostavnosti uvedemo supstituciju:

$$3^n = x \Rightarrow 9^n = 3^{2n} = x^2$$

pa pišemo:

$$\begin{aligned} & \frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{1-9^n}{1-4 \cdot 9^n} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1-2 \cdot x}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-4 \cdot x^2} + \frac{x}{1+2 \cdot x} = \left[a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \right] = \\ & = \frac{1-2 \cdot x}{1-x} \cdot \frac{(1-x) \cdot (1+x)}{(1-2 \cdot x) \cdot (1+2 \cdot x)} + \frac{x}{1+2 \cdot x} = \frac{1+x}{1+2 \cdot x} + \frac{x}{1+2 \cdot x} = \frac{1+x+x}{1+2 \cdot x} = \frac{1+2 \cdot x}{1+2 \cdot x} = 1. \end{aligned}$$

3. inačica

Uzmemo za n neki prirodni broj, ali pri tome pazimo da nam nazivnik nije 0. Stavimo n = 1:

$$\frac{1-2 \cdot 3^n}{1-3^n} \cdot \frac{1-9^n}{1-4 \cdot 9^n} + \frac{3^n}{1+2 \cdot 3^n} = \frac{1-2 \cdot 3^1}{1-3^1} \cdot \frac{1-9^1}{1-4 \cdot 9^1} + \frac{3^1}{1+2 \cdot 3^1} = \frac{1-2 \cdot 3}{1-3} \cdot \frac{1-9}{1-4 \cdot 9} + \frac{3}{1+2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1-6}{1-3} \cdot \frac{1-9}{1-36} + \frac{3}{1+6} = \frac{-5}{-2} \cdot \frac{-8}{-35} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Vježba 028

Izračunajte: $\frac{1-4^n}{1-2^n} - 1$.

Rezultat: 2^n .

Zadatak 029 (Ivana, hotelijerska škola)

Pojednostavnite izraz: $\frac{2 \cdot x^4 - 7 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{2 \cdot x^2 - x + 1}$.

Rješenje 029

Članove iz brojnika:

$$-7 \cdot x^3, 8 \cdot x^2, -5 \cdot x$$

rastavimo na sljedeći način:

$$-7 \cdot x^3 = -x^3 - 6 \cdot x^3,$$

$$8 \cdot x^2 = x^2 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^2,$$

$$-5 \cdot x = -3 \cdot x - 2 \cdot x.$$

Sada je:

$$\frac{2 \cdot x^4 - 7 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{2 \cdot x^2 - x + 1} = \frac{2 \cdot x^4 - x^3 + x^2 - 6 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2}{2 \cdot x^2 - x + 1} =$$

= [grupiramo po tri člana tako da izlučivanjem odgovarajućeg broja dobijemo faktor $2x^2 - x + 1$] =

$$= \frac{x^2 \cdot (2 \cdot x^2 - x + 1) - 3 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x + 1) + 2 \cdot (2 \cdot x^2 - x + 1)}{2 \cdot x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{(2 \cdot x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 2)}{2 \cdot x^2 - x + 1} = x^2 - 3 \cdot x + 2.$$

Vježba 029

Pojednostavnite izraz: $\frac{x^2 + 5 \cdot x + 6}{x + 3}$.

Rezultat: $x + 2$.

Zadatak 030 (Ines, hotelijerska škola)

Ako x zadovoljava jednadžbu $2x^2 - 3x - 1 = 0$, odredi jednadžbu koju zadovoljava $y = x^3$.

Rješenje 030

Iz supstitucije (zamjene) dobije se:

$$y = x^3 \Rightarrow y^2 = x^6. \quad (1)$$

Jednadžbu $2x^2 - 3x - 1 = 0$ kubiramo:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3x + 1 \quad | \cdot 3 \Rightarrow [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^6 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 \Rightarrow [\text{zbog (1)}] \Rightarrow 8y^2 = 27y + 27x^2 + 9x + 1. \quad (2)$$

Zadanu jednadžbu $2x^2 - 3x - 1 = 0$ pomnožimo s $9x$:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3x + 1 \quad | \cdot 9x \Rightarrow 18x^3 = 27x^2 + 9x \Rightarrow [\text{zbog (1)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18y = 27x^2 + 9x. \quad (3)$$

Iz (2) i (3) proizlazi:

$$\left. \begin{array}{l} 8y^2 = 27y + 27x^2 + 9x + 1 \\ 18y = 27x^2 + 9x \end{array} \right\} \Rightarrow [\text{oduzmemo jednakosti}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y^2 - 18y = 27y + 27x^2 + 9x + 1 - 27x^2 - 9x \Rightarrow 8y^2 - 18y = 27y + 1 \Rightarrow 8y^2 - 45y - 1 = 0.$$

Vježba 030

Ako x zadovoljava jednadžbu $2x^2 - 3x - 1 = 0$, odredi jednadžbu koju zadovoljava $y = x^2$.

Rezultat: $4y^2 - 13y + 1 = 0$.

Zadatak 031 (1A, hotelijerska škola)

Ivanu je n godina, Josip je 5 godina mlađi od njega, a 3 godine je stariji od Luke. Koliko sva trojica imaju godina?

Rješenje 031

Prikažimo zadatak tablično:

Osoba	Broj godina iskazan riječima	Broj godina zapisan izrazima
Ivan	Ivan je n godina.	n
Josip	Josip je 5 godina mlađi od Ivana.	$n - 5$
Luka	Josip je 3 godine stariji od Luke, dakle, Luka je 3 godine mlađi od Josipa.	$n - 5 - 3$
Ukupan broj godina:		$3n - 13$

Vježba 031

Ivanu je n godina, Josip je 2 godina mlađi od njega, a 3 godine je stariji od Luke. Koliko sva trojica imaju godina?

Rezultat: $3n - 7$.

Zadatak 032 (Marija, gimnazija)

Izračunaj: $\left(2x + \frac{1}{4}\right)^3$.

Rješenje 032

Podsjetimo se formule za kub binoma (kub zbroja):

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

Uočimo da je u zadatku $a = 2x$, $b = \frac{1}{4}$. Sada je:

$$\begin{aligned} \left(2x + \frac{1}{4}\right)^3 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = [(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n] = \\ &= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 8x^3 + 3x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Vježba 032

Izračunaj: $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3$.

Rezultat: $8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$.

Zadatak 033 (1A, hotelijerska škola)

Ako je $b^2 - a^2 = 24$, te $a + b = 8$, koliko je $a - b + 1$?

Rješenje 033

$$\left. \begin{array}{l} b^2 - a^2 = 24 \\ a + b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (b - a) \cdot (b + a) = 24 \\ a + b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow (b - a) \cdot 8 = 24 \quad /:8 \Rightarrow b - a = 3 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - b = -3 \Rightarrow a - b + 1 = -3 + 1 = -2.$$

Vježba 033

Ako je $b^2 - a^2 = 24$, te $a + b = 8$, koliko je $a - b + 3$?

Rezultat: $a - b = 0$.

Zadatak 034 (Felix, gimnazija)

Skratite razlomak: $\frac{49^n + 2 \cdot 35^n - 8 \cdot 25^n}{49^n + 5 \cdot 35^n + 4 \cdot 25^n}$.

Rješenje 034

Zbog jednostavnosti računanja uvedemo zamjene $x = 7^n$, $y = 5^n$. Sada možemo zapisati razlomak u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{49^n + 2 \cdot 35^n - 8 \cdot 25^n}{49^n + 5 \cdot 35^n + 4 \cdot 25^n} &= \frac{(7^2)^n + 2 \cdot (5 \cdot 7)^n - 8 \cdot (5^2)^n}{(7^2)^n + 5 \cdot (5 \cdot 7)^n + 4 \cdot (5^2)^n} = \left[(a^n)^m = (a^m)^n, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \right] = \\ &= \frac{(7^n)^2 + 2 \cdot 5^n \cdot 7^n - 8 \cdot (5^n)^2}{(7^n)^2 + 5 \cdot 5^n \cdot 7^n + 4 \cdot (5^n)^2} = \left[\text{zamjena } x = 7^n, y = 5^n \right] = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot y^2}{x^2 + 5 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2} = \\ &= \frac{x^2 + 4 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot y^2}{x^2 + x \cdot y + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2} = \frac{x \cdot (x + 4y) - 2y \cdot (x + 4y)}{x \cdot (x + y) + 4y \cdot (x + y)} = \frac{(x + 4y) \cdot (x - 2y)}{(x + y) \cdot (x + 4y)} = \\ &= \left[\text{budući da je } x + 4y \neq 0, \text{ razlomak kratimo} \right] = \frac{x - 2y}{x + y} = \frac{7^n - 2 \cdot 5^n}{7^n + 5^n}. \end{aligned}$$

Vježba 034

Skratite razlomak: $\frac{9^n - 4^n}{3^n - 2^n}$.

Rezultat: $3^n - 2^n$.

Zadatak 035 (Merika, gimnazija)

Skratite razlomak: $\frac{2a^2b - 2ab^2}{4a^2b - 4ab^2}$.

Rješenje 035

$$\frac{2a^2b - 2ab^2}{4a^2b - 4ab^2} = \left[\begin{array}{l} \text{izlučimo } 2ab \\ \text{izlučimo } 4ab \end{array} \right] = \frac{2ab \cdot \overbrace{(a-b)}^1}{4ab \cdot \underbrace{(a-b)}_1} = \frac{2ab}{4ab} = \frac{1}{2}.$$

Vježba 035

Skratite razlomak: $\frac{2ab - 2b}{a - 1}$.

Rezultat: $2b$.

Zadatak 036 (Merika, gimnazija)

Skratite razlomak: $\frac{a^4 + 4a^2b^2}{a^5 - 16ab^4}$.

Rješenje 036

$$\frac{a^4 + 4a^2b^2}{a^5 - 16ab^4} = \left[\begin{array}{l} \text{izlučimo } a^2 \\ \text{izlučimo } a \end{array} \right] = \frac{a^2(a^2 + 4b^2)}{a \cdot \underbrace{(a^4 - 16b^4)}_{\text{razlika kvadrata}}} = \frac{a^2 \overbrace{(a^2 + 4b^2)}^1}{a \cdot (a^2 - 4b^2) \cdot \underbrace{(a^2 + 4b^2)}_1} = \frac{\frac{a}{a^2}}{a \cdot (a^2 - 4b^2)} = \frac{a}{a^2 - 4b^2}.$$

Vježba 036

Skratite razlomak: $\frac{a^4 - 4b^4}{a^2 - 2b^2}$.

Rezultat: $a^2 + 2b^2$.

Zadatak 037 (Merika, gimnazija)

Ako je $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$, $x \neq y$, koliko je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Rješenje 037

Zadanu jednakost zapišimo u obliku

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = y - x &\Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x \cdot y} = y - x \Rightarrow \frac{(x-y) \cdot (x+y)}{x \cdot y} = -(x-y) \quad /:(x-y) \Rightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x}{x \cdot y} + \frac{y}{x \cdot y} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1. \end{aligned}$$

Vježba 037

Ako je $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$, $x \neq y$, koliko je $\frac{2}{x} + \frac{2}{y}$?

Rezultat: -2 .

Zadatak 038 (Merika, gimnazija)

Zbroj dvaju pozitivnih brojeva jednak je zbroju njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rješenje 038

Označimo dva pozitivna broja slovima x i y . Tada je:

$$x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow x + y = \frac{x+y}{x \cdot y} \quad /:(x+y) \Rightarrow 1 = \frac{1}{x \cdot y} \Rightarrow x \cdot y = 1.$$

Vježba 038

Poluzbroj dvaju pozitivnih brojeva jednak je zbroju njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rezultat: 2 .

Zadatak 039 (Merika, gimnazija)

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći izraz: $3 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^5$.

Rješenje 039

$$3 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^5 = 2^5 \cdot (3 \cdot 2 + 10) = 2^5 \cdot (6 + 10) = 2^5 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^9.$$

Vježba 039

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći izraz: $3 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^4$.

Rezultat: 2^8 .

Zadatak 040 (Merika, gimnazija)

Ako je $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, $\frac{c}{b} = \frac{3}{4}$, koliko je $\frac{a+b+c}{a-b-c}$?

Rješenje 040

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \\ \frac{c}{b} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{3b}{2} \\ c = \frac{3b}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+b+c}{a-b-c} = \frac{\frac{3b}{2} + b + \frac{3b}{4}}{\frac{3b}{2} - b - \frac{3b}{4}} = \frac{\frac{6b+4b+3b}{4}}{\frac{6b-4b-3b}{4}} = \frac{13b}{-b} = -13.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \\ \frac{c}{b} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b:a=2:3 \\ c:b=3:4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a:b=3:2 \\ b:c=4:3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\text{Da bismo napisali produženi omjer drugi član prvog} \right. \\ \left. \text{omjera i prvi član drugog omjera moraju biti jednaki} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a:b=(3 \cdot 2):(2 \cdot 2) \\ b:c=4:3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a:b=6:4 \\ b:c=4:3 \end{array} \right\} \Rightarrow a:b:c=6:4:3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=6k \\ b=4k \\ c=3k \end{array} \right\}.$$

Vrijednost razlomka jednaka je:

$$\frac{a+b+c}{a-b-c} = \frac{6k+4k+3k}{6k-4k-3k} = \frac{13k}{-k} = -13.$$

Vježba 040

Ako je $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, $\frac{c}{b} = \frac{3}{4}$, koliko je $\frac{a-b+c}{a-b-c}$?

Rezultat: -5.

www.halapa.com