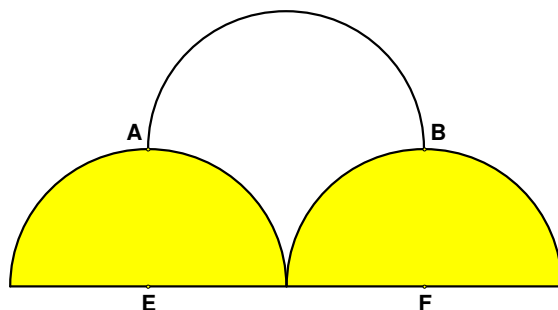


Zadatak 101 (Marino i Medax, srednja škola)

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 2 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **nebojenog** dijela slike?



- A. 8 cm^2 B. 7 cm^2 C. $2 \cdot \pi \text{ cm}^2$ D. $(2 \cdot \pi + 1) \text{ cm}^2$ E. $(2 \cdot \pi + 2) \text{ cm}^2$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

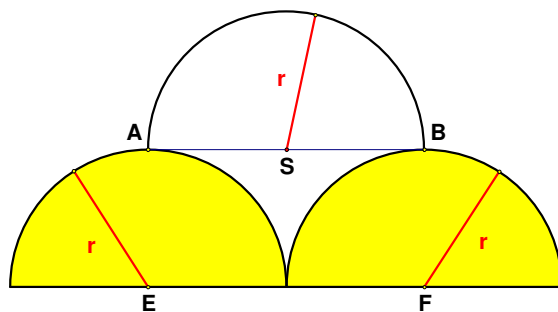
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90°).

Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b .

$$P = a \cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

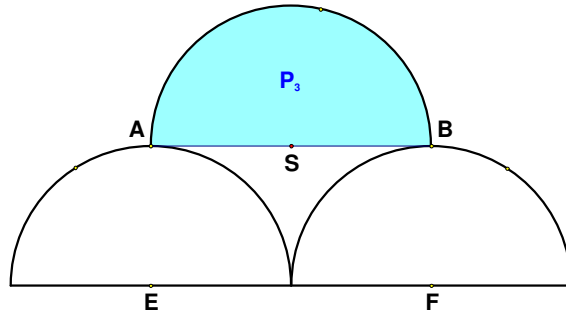
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



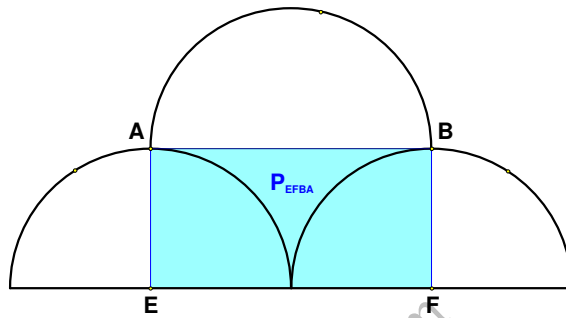
Sa slike vidi se:

$$r = 2 \text{ cm}, \quad |EF| = |AB| = 2 \cdot r = 4 \text{ cm}, \quad |FB| = |EA| = r = 2 \text{ cm}$$

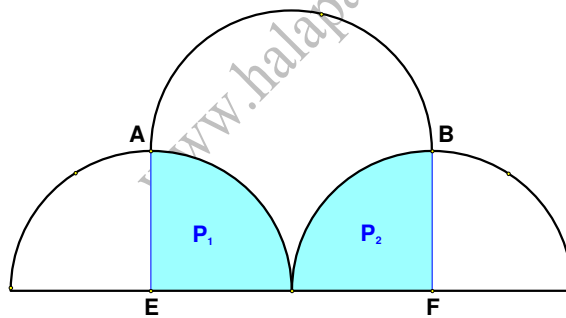
Slike nam govore sve!



$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$$

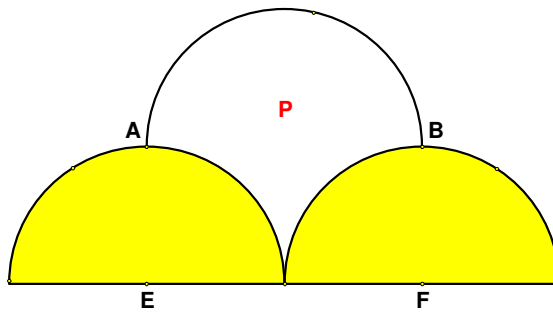


$$P_{EFBA} = |EF| \cdot |FB| = 2 \cdot r \cdot r = 2 \cdot r^2$$



$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Ploština **nebojenog** dijela iznosi:



$$P = P_3 + P_{EFBA} - P_1 - P_2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{2}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{2}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

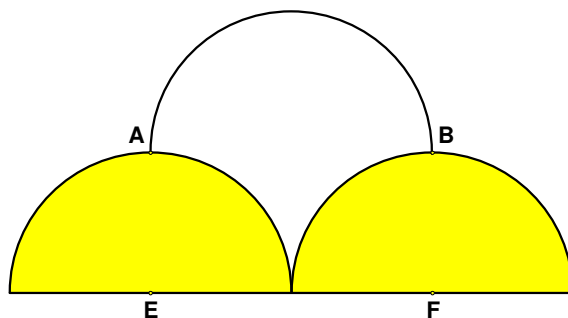
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 2 \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot (2 \text{ cm})^2 \Rightarrow P = 8 \text{ cm}^2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 101

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 3 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **nebojenog** dijela slike?

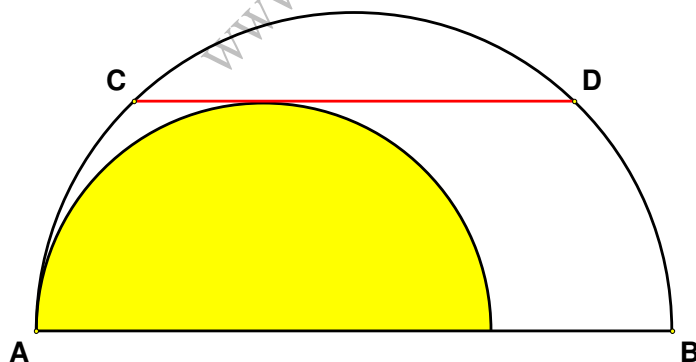


- A. 18 cm^2 B. 9 cm^2 C. $3 \cdot \pi \text{ cm}^2$ D. $(3 \cdot \pi + 3) \text{ cm}^2$ E. $(9 \cdot \pi) \text{ cm}^2$

Rezultat: A.

Zadatak 102 (Marija, TUPŠ)

Nacrtna su dva polukruga. Tetiva je duga 4 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **nebojena (bijela)** površina?



- A. π B. $1.5 \cdot \pi$ C. $2 \cdot \pi$ D. $3 \cdot \pi$

Rješenje 102

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kruga na tetivu raspolavlja je na dva jednaka dijela.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

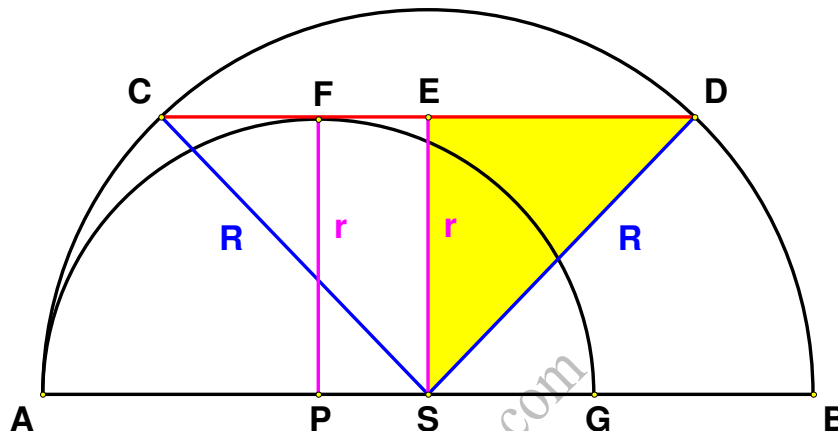
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

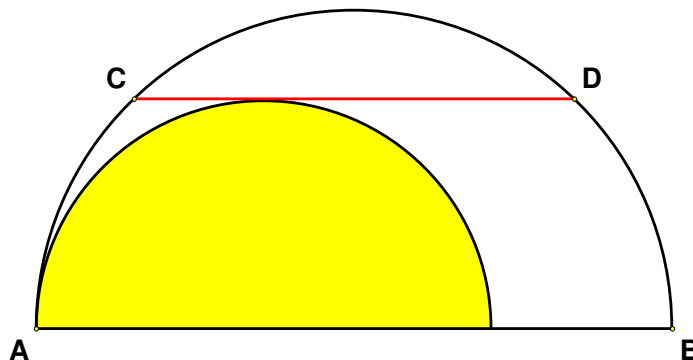


Iz slike izlazi:

$$\begin{aligned} |AB| &= 2 \cdot R \quad , \quad |AS| = |SB| = |SC| = |SD| = R \quad , \quad |AG| = 2 \cdot r \\ |AP| &= |PG| = |PF| = |SE| = r \quad , \quad |CD| = 4 \quad , \quad |CE| = |ED| = 2 \end{aligned}$$

Uočimo pravokutan trokut SDE i uporabom Pitagorina poučka dobijemo:

$$|SD|^2 = |SE|^2 + |ED|^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + 2^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + 4 \Rightarrow R^2 - r^2 = 4.$$



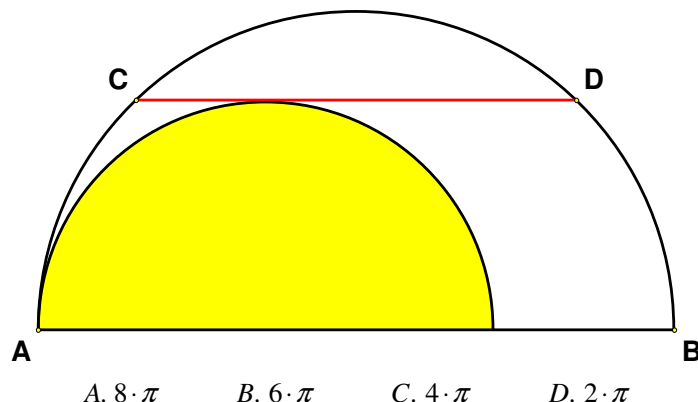
Ploština neobojenog (bijelog) dijela P jednaka je razlici ploština velikog i malog polukruga.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow [R^2 - r^2 = 4] \Rightarrow \\ &\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow P = 2 \cdot \pi. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 102

Nacrtna su dva polukruga. Tetiva je duga 8 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **nebojena (bijela)** površina?

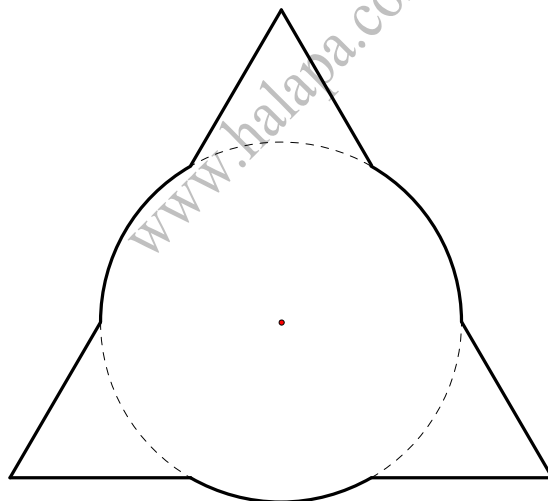


Rezultat: A.

Zadatak 103 (Tina i Sonja, HAK)

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 und ein Kreis mit Radius 1 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groß ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

- A. $6 + \pi$ B. $3 + 2 \cdot \pi$ C. $9 + \frac{\pi}{3}$ D. $3 \cdot \pi$ E. $9 + \pi$



Jednakostraničan trokut duljine stranice 3 i kružnica polumjera 1 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rješenje 103

Ponovimo!

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{n}{1} = n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60^\circ$ i tri jednake stranice.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

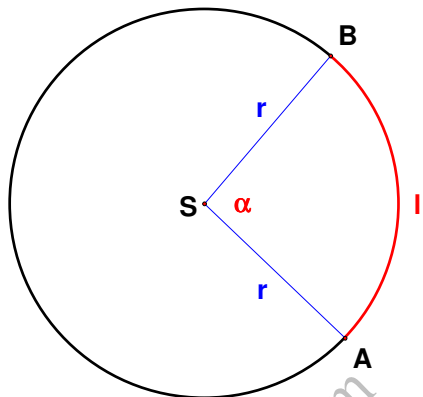
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r .



Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

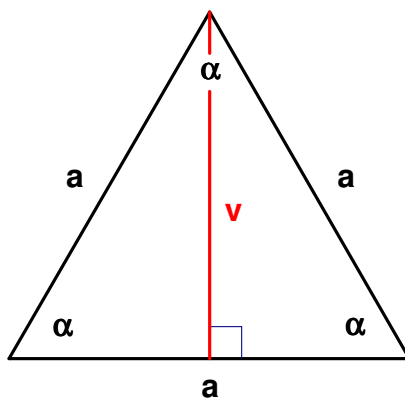
$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180} \alpha.$$

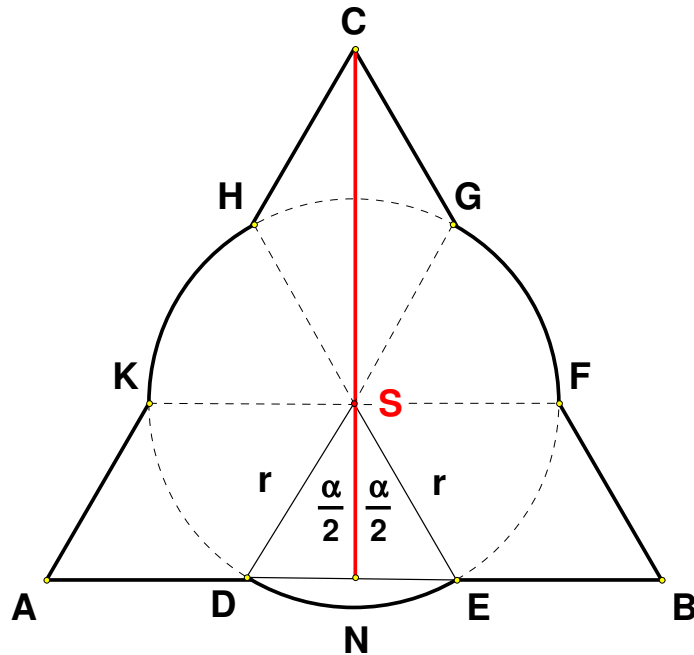
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Visina jednakostraničnog trokuta je:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$





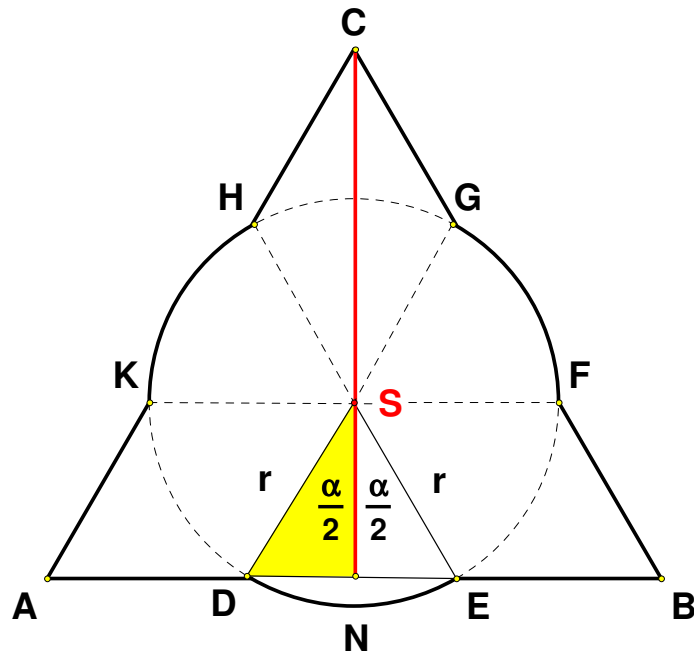
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a = 3, \quad |SD| = |SE| = r = 1, \quad \angle NSD = \angle ESN = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ESD = \alpha$$

Trokut ABC je jednakostraničan pa je \overline{CN} istodobno njegova težišnica, visina i simetrala kuta. Točka S je sjecište težišnica i visina pa vrijedi:

$$|SN| = \frac{1}{3} \cdot |CN| \Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow [a=3] \Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow |SN| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Uočimo pravokutan trokut DNS i pomoću funkcije kosinus izračunamo kut $\frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{|SN|}{|SD|} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \cdot 2 \Rightarrow \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je trokut SDE jednakokraničan pa je

$$|DE| = 1.$$

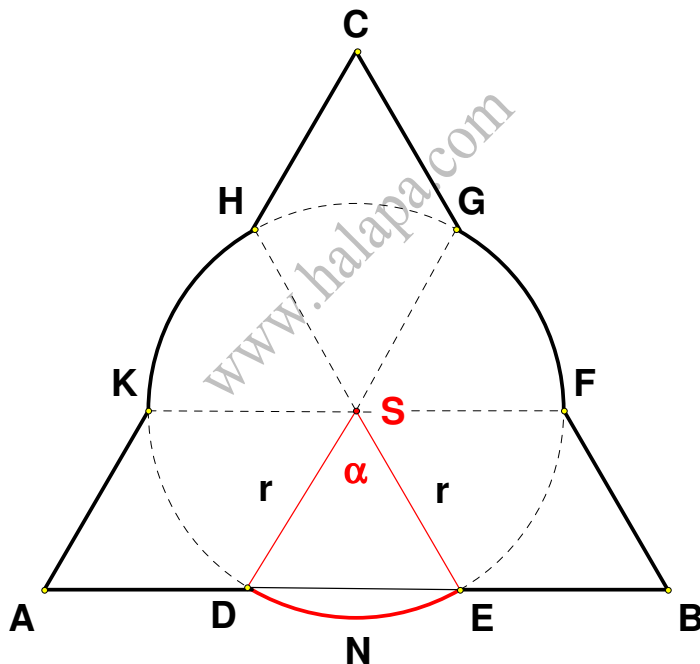
Analogno su i trokuti $\triangle SFG$ i $\triangle SHK$ jednakokranični i slijedi:

$$|FG| = |HK| = 1.$$

Zbog simetričnosti vrijedi:

$$|AD| = |EB| = |BF| = |GC| = |CH| = |KA| = 1.$$

Računamo duljinu luka \widehat{DE} .



$$\left| \widehat{DE} \right| = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 1 \\ \alpha = 60^\circ \end{array} \right] \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{1 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

Također je

$$\left| \widehat{FG} \right| = \left| \widehat{HK} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

Opseg lika iznosi:

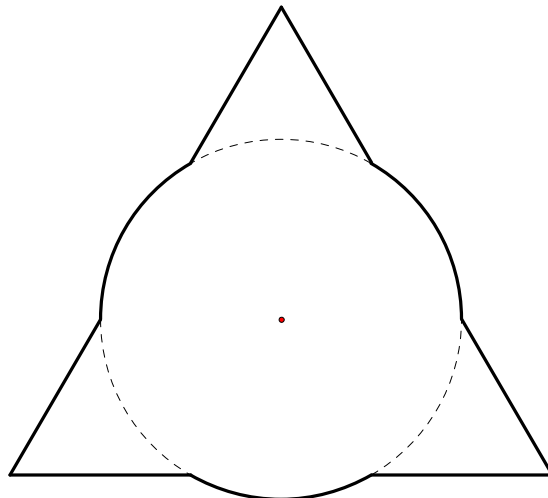
$$\begin{aligned} O &= |AD| + \left| \widehat{DE} \right| + |EB| + |BF| + \left| \widehat{FG} \right| + |GC| + |CH| + \left| \widehat{HK} \right| + |KA| \Rightarrow \\ &\Rightarrow O = 1 + \frac{\pi}{3} + 1 + 1 + \frac{\pi}{3} + 1 + 1 + \frac{\pi}{3} + 1 \Rightarrow O = 6 + 3 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow O = 6 + 3 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow O = 6 + \pi. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 103

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 6 und ein Kreis mit Radius 2 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groß ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

- A. $12 + 2 \cdot \pi$ B. $6 + 4 \cdot \pi$ C. $18 + \frac{\pi}{3}$ D. $6 \cdot \pi$ E. $9 + 2 \cdot \pi$

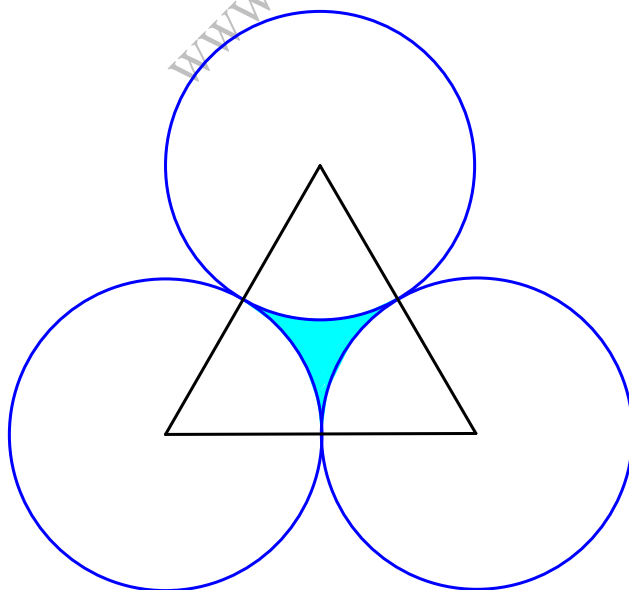


Jednakostraničan trokut duljine stranice 6 i kružnica polumjera 2 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rezultat: A.

Zadatak 104 (Sonja, HAK)

Jeder von drei Kreisen mit Radius r berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom r dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rješenje 104

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60^\circ$ i tri jednake stranice.

Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Ako je r polumjer kruga, tada je površina kružnog isječka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

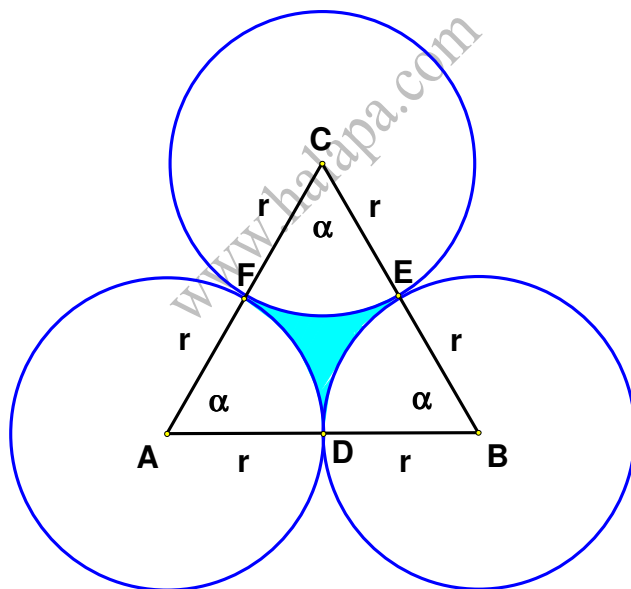
$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

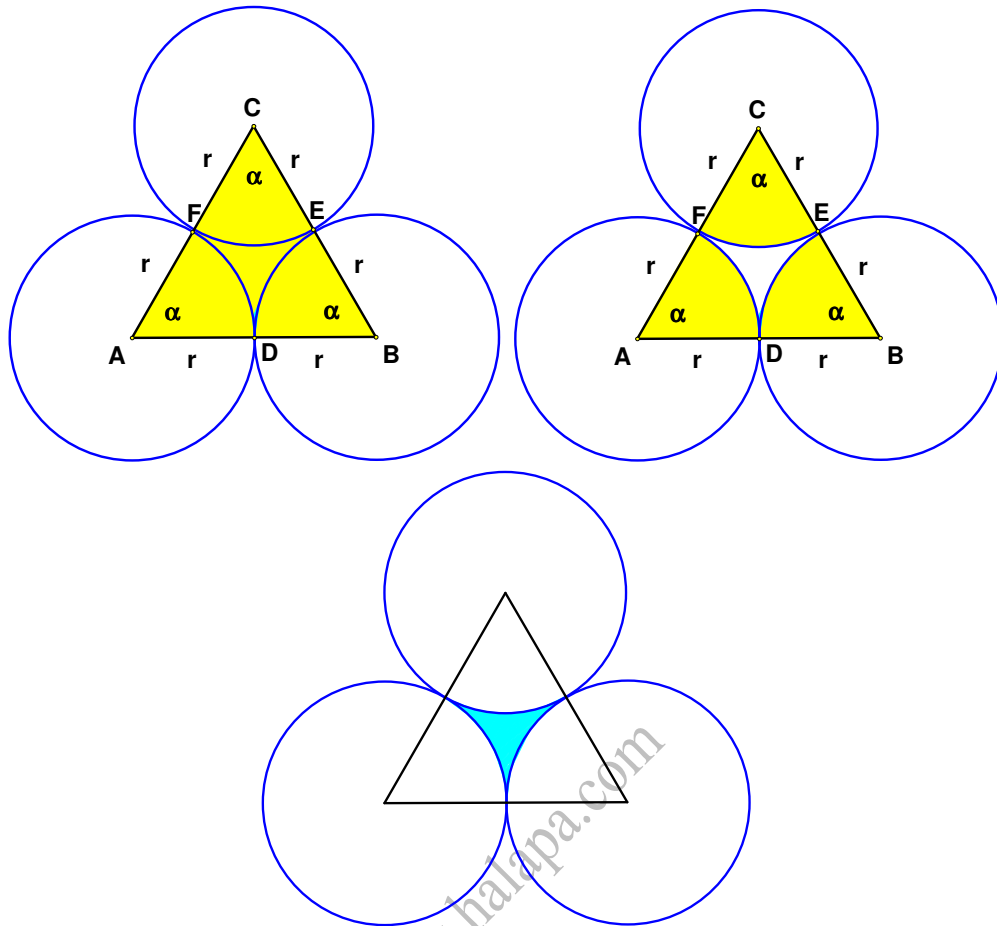
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r, \quad |AD| = |DB| = |BE| = |EC| = |CF| = |FA| = r$$

$$\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = \alpha = 60^\circ$$

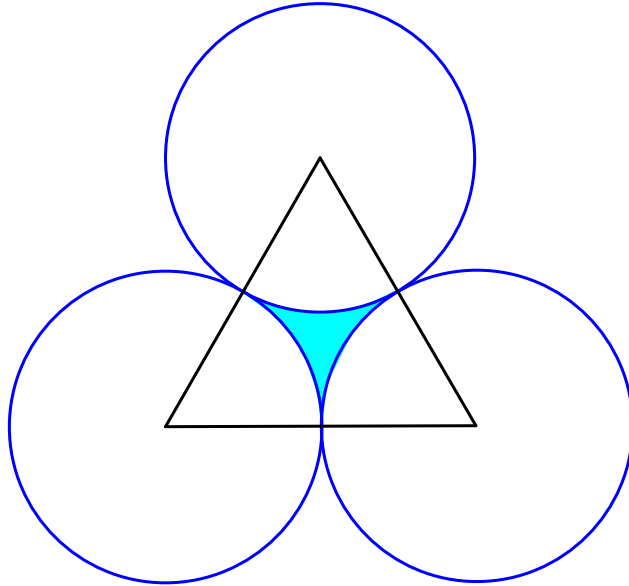


Površina osjenčanog dijela (plava boja među krugovima) jednaka je razlici površine jednakostraničnog trokuta i trostruke površine kružnog isječka (sva tri kružna isječka jednake su površine)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \Rightarrow [\alpha = 60^\circ] \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3} - r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = \frac{r^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - \pi)}{2}.
 \end{aligned}$$

Vježba 104

Jeder von drei Kreisen mit Radius 1 berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom 1 dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rezultat: $P = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - \pi}{2}$.

Zadatak 105 (Marta, srednja škola)

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 2 cm, tijekom 24 sata približno je jednak:

- A. 1.81 m B. 18.1 m C. 181 m D. 1810 m

Rješenje 105

Ponovimo!

$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.

Opseg kružnice polumjera r iznosi:

$O = 2 \cdot r \cdot \pi$.

U jednoj minuti vrh sekundne kazaljke sata jednom prijede kružnicu. Za 24 sata on će obići kružnicu 1440 puta.

$n = 24 \cdot 60 = 1440$.

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata tijekom 24 sata približno iznosi:

$$s = n \cdot O \Rightarrow s = n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1440 \\ r = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m} \end{array} \right] \Rightarrow s = 1440 \cdot 2 \cdot 0.02 \text{ m} \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 180.96 \text{ m} \Rightarrow s \approx 181 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.



Vježba 105

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 20 mm, tijekom 24 sata približno je jednak:

- A. 1.81 m B. 18.1 m C. 181 m D. 1810 m

Rezultat: C.

Zadatak 106 (4B, TUPŠ)

Geografska širina Zagreba je $45^{\circ} 45'$. Kolika je udaljenost Zagreba od ekvatora? (polumjer Zemlje $r = 6370$ km)

Rješenje 106

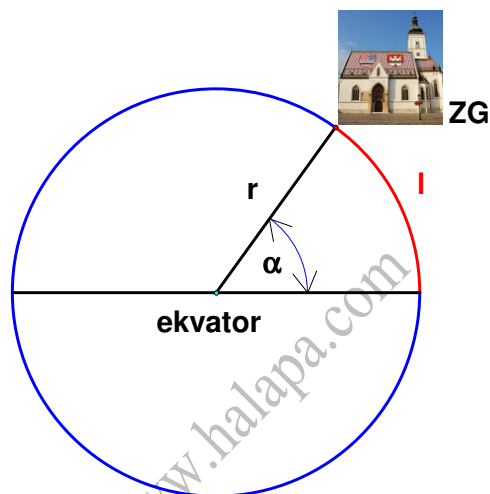
Ponovimo!

$$1^{\circ} = 60' \quad , \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} .$$

Formula za duljinu kružnog luka l koji je pridružen središnjem kutu α , u krugu polumjera r , glasi:

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} .$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.



$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 6370 \text{ km} \\ \alpha = 45^{\circ} 45' = 45^{\circ} + \left(\frac{45}{60}\right)^{\circ} = 45.75^{\circ} \end{array} \right] \Rightarrow l = \frac{6370 \text{ km} \cdot \pi \cdot 45.75^{\circ}}{180^{\circ}} \Rightarrow l = 5086.37 \text{ km} .$$

Vježba 106

Pronađite geografsku širinu Vašeg mjesta. Kolika je njegova udaljenost od ekvatora? (polumjer Zemlje $r = 6370$ km)

Rezultat: ?

Zadatak 107 (4B, TUPŠ)

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produlji za 1 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

Rješenje 107

Ponovimo!

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} .$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

Opseg kružnice polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi .$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je r polumjer Zemlje njezin opseg oko ekvatora je

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Povećamo li polumjer za x , opseg će se produjiti za d .

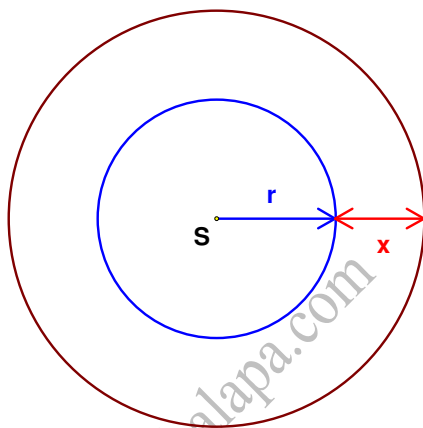
$$d + O = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi.$$

Slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ d + O = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow d = 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{d}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{100 \text{ cm}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = 15.92 \text{ cm}.$$



Vježba 107

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produjti za 0.5 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

Rezultat: 7.96 cm.