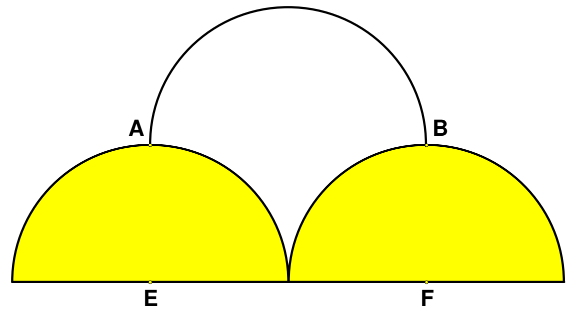
Zadatak 101 (Marino i Medax, srednja škola)

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 2 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **neobojenog** dijela slike?



$A.\ 8\ cm^2 \qquad B.\ 7\ cm^2 \qquad C.\ 2\cdot\pi\ cm^2 \qquad D.\ (2\cdot\pi+1)\ cm^2 \qquad E.\ (2\cdot\pi+2)\ cm^2$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

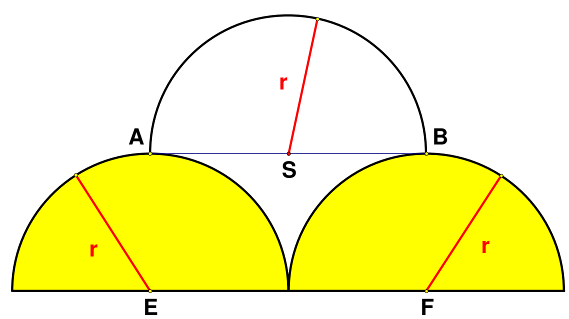
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b.

$$P=a\cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

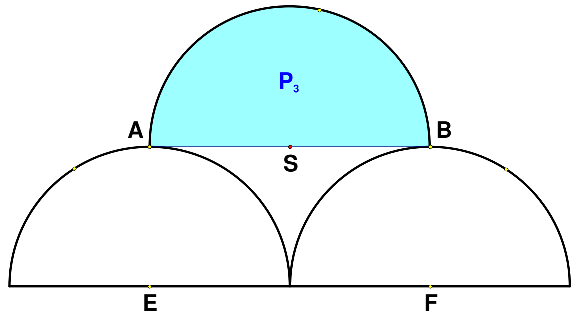
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



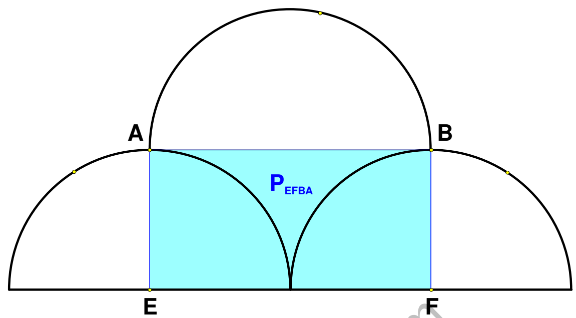
Sa slike vidi se:

$$r=2\ cm\ ,\ |EF|=|AB|=2\cdot r=4\ cm\ ,\ |FB|=|EA|=r=2\ cm$$

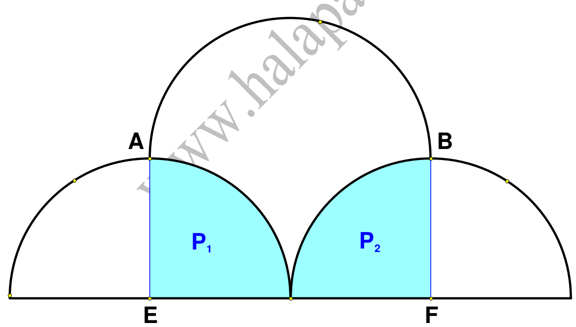
Slike nam govore sve!



$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$$

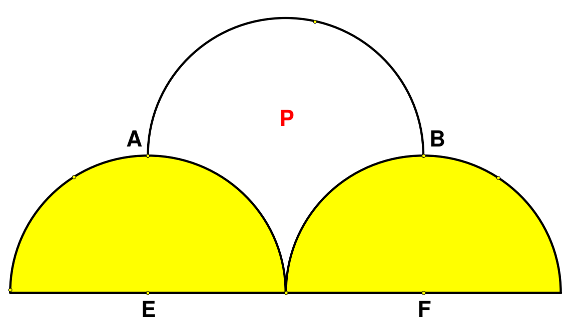


$$P_{EFBA} = |EF| \cdot |FB| = 2 \cdot r \cdot r = 2 \cdot r^2$$



$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Ploština **neobojenog** dijela iznosi:



$$P = P_3 + P_{EFBA} - P_1 - P_2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r^2-\frac{2}{4}\cdot r^2\cdot\pi \ \Rightarrow \ P=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r^2-\frac{2}{4}\cdot r^2\cdot\pi \ \Rightarrow$$

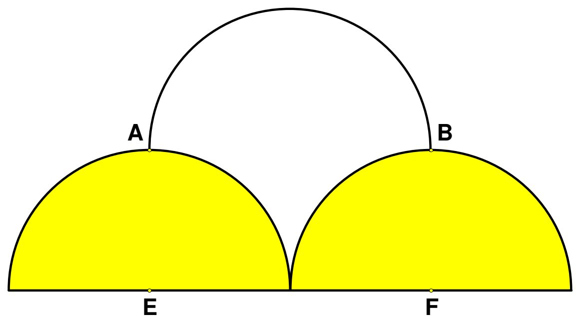
$$\Rightarrow \ P=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r^2-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi \ \Rightarrow \ P=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r^2-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi \ \Rightarrow \ P=2\cdot r^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P=2\cdot(2\ cm)^2 \ \Rightarrow \ P=8\ cm^2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 101

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 3 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **neobojenog** dijela slike?

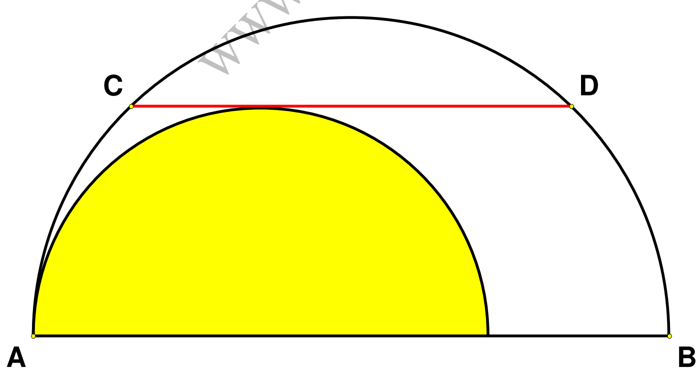


$A.\ 18\ cm^2$ $\quad B.\ 9\ cm^2$ $\quad C.\ 3\cdot\pi\ cm^2$ $\quad D.\ (3\cdot\pi+3)\ cm^2$ $\quad E.\ (9\cdot\pi)\ cm^2$

Rezultat: A.

Zadatak 102 (Marija, TUPŠ)

Nacrtana su dva polukruga. Tetiva je duga 4 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **neobojena** (**bijela**) površina?



$A.\ \pi$ $\quad B.\ 1.5\cdot\pi$ $\quad C.\ 2\cdot\pi$ $\quad D.\ 3\cdot\pi$

Rješenje 102

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

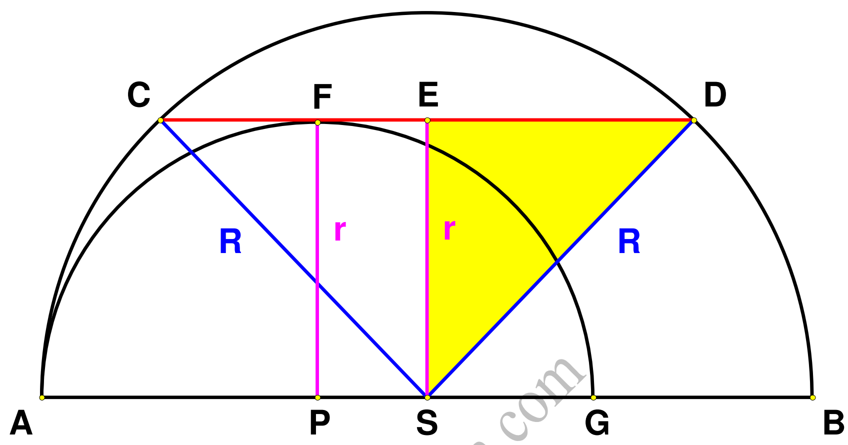
Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kruga na tetivu raspolavlja je na dva jednaka dijela.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$



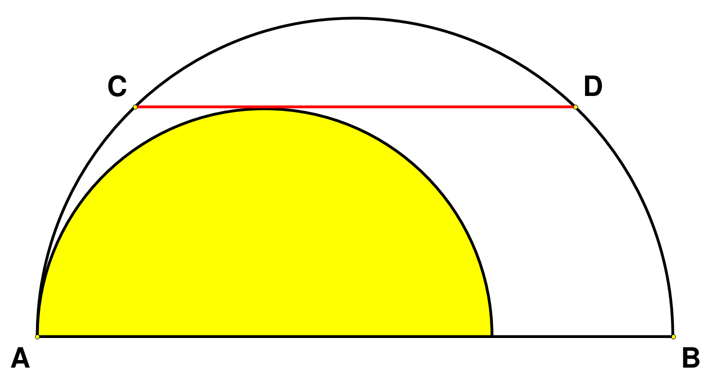
Iz slike izlazi:

$$|AB|=2\cdot R \ , \ |AS|=|SB|=|SC|=|SD|=R \ , \ |AG|=2\cdot r$$

$$|AP|=|PG|=|PF|=|SE|=r \ , \ |CD|=4 \ , \ |CE|=|ED|=2$$

Uočimo pravokutan trokut SDE i uporabom Pitagorina poučka dobijemo:

$$|SD|^2=|SE|^2+|ED|^2 \Rightarrow R^2=r^2+2^2 \Rightarrow R^2=r^2+4 \Rightarrow R^2-r^2=4.$$



Ploština neobojenog (bijelog) dijela P jednaka je razlici ploština velikog i malog polukruga.

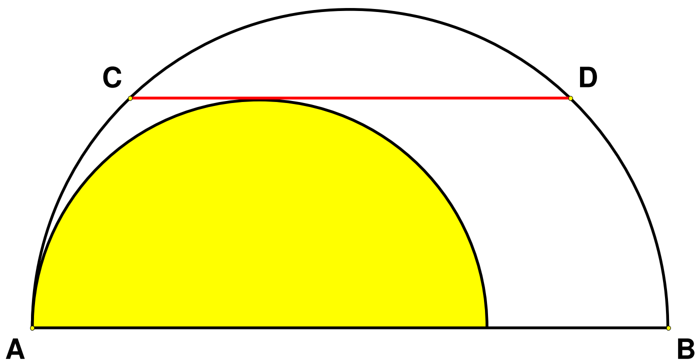
$$P=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(R^2-r^2\right) \Rightarrow \left[R^2-r^2=4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4 \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4 \Rightarrow P=2\cdot\pi.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 102

Nacrtana su dva polukruga. Tetiva je duga 8 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **neobojena** (**bijela**) površina?



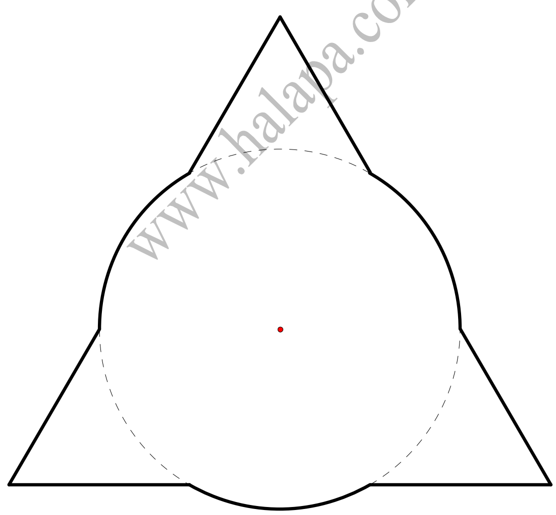
$$A.\ 8\cdot\pi \qquad B.\ 6\cdot\pi \qquad C.\ 4\cdot\pi \qquad D.\ 2\cdot\pi$$

Rezultat: A.

Zadatak 103 (Tina i Sonja, HAK)

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 und ein Kreis mit Radius 1 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groβ ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

$$A.\ 6+\pi \qquad B.\ 3+2\cdot\pi \qquad C.\ 9+\frac{\pi}{3} \qquad D.\ 3\cdot\pi \qquad E.\ 9+\pi$$



Jednakostraničan trokut duljine stranice 3 i kružnica polumjera 1 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rješenje 103

Ponovimo!

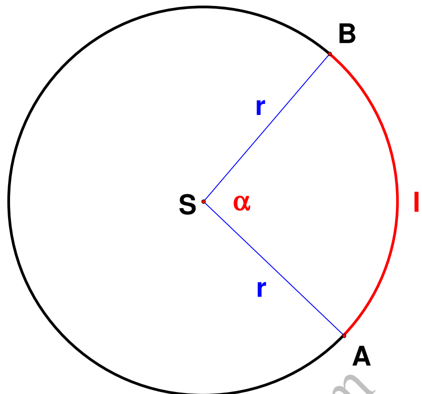
$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60°$ i tri jednake stranice.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.



Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

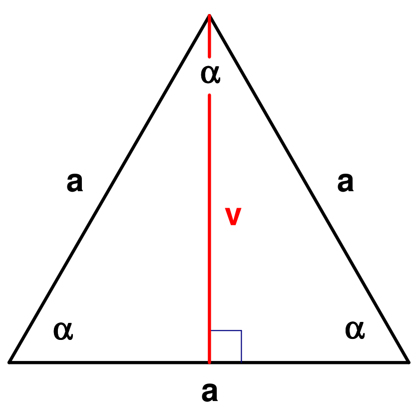
$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha.$$

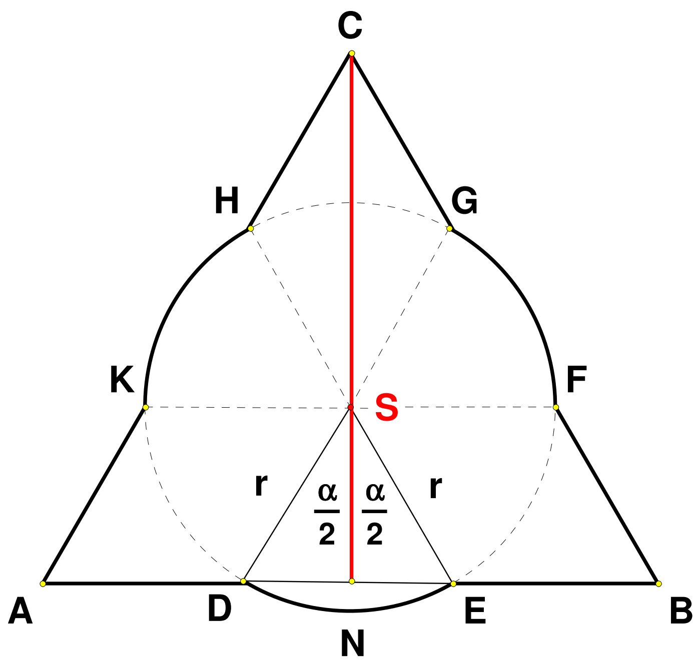
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Visina jednakostraničnog trokuta je:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$





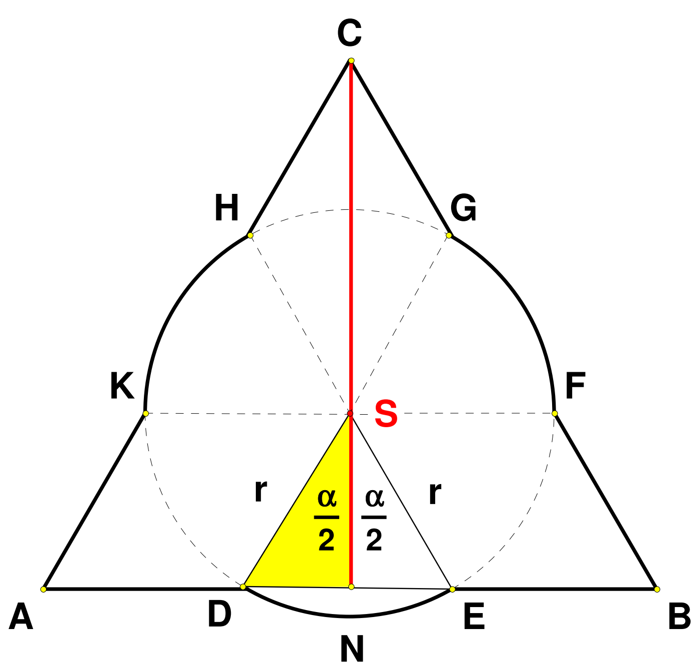
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a = 3 \ , \ |SD| = |SE| = r = 1 \ , \ \angle NSD = \angle ESN = \frac{\alpha}{2} \ , \ \angle ESD = \alpha$$

Trokut ABC je jednakostraničan pa je $\overline{CN}$ istodobno njegova težišnica, visina i simetrala kuta. Točka S je sjecište težišnica i visina pa vrijedi:

$$|SN| = \frac{1}{3} \cdot |CN| \ \Rightarrow \ |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ [\, a = 3 \,] \ \Rightarrow \ |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ |SN| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Uočimo pravokutan trokut DNS i pomoću funkcije kosinus izračunamo kut $\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{|SN|}{|SD|} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \;/\cdot 2 \Rightarrow \alpha=60^\circ.$$

Zaključujemo da je trokut SDE jednakostraničan pa je

$$|DE|=1.$$

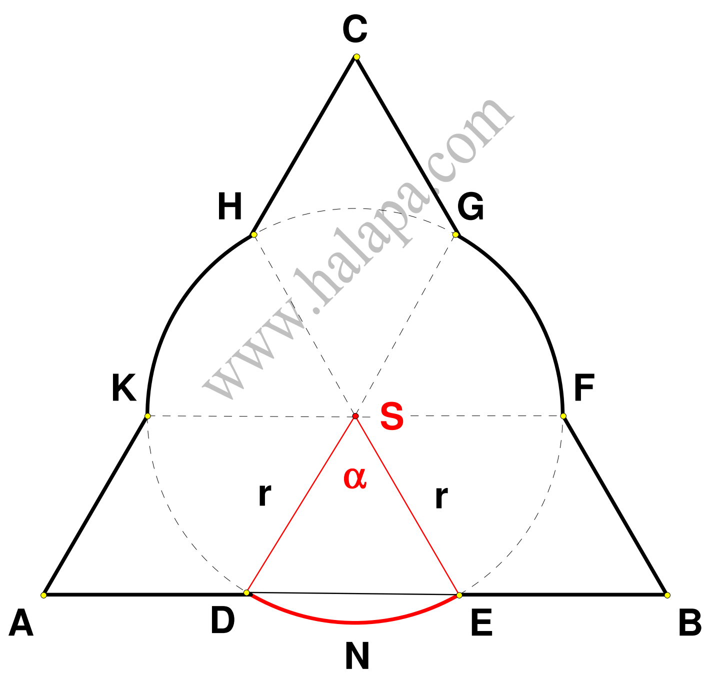
Analogno su i trokuti ΔSFG i ΔSHK jednakostranični i slijedi:

$$|FG|=|HK|=1.$$

Zbog simetričnosti vrijedi:

$$|AD|=|EB|=|BF|=|GC|=|CH|=|KA|=1.$$

Računamo duljinu luka $\widehat{DE}$.



$$\left|\widehat{DE}\right|=\frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^\circ} \Rightarrow \begin{bmatrix} r=1 \\ \alpha=60^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\widehat{DE}\right|=\frac{1\cdot\pi\cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left|\widehat{DE}\right|=\frac{\pi\cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left|\widehat{DE}\right|=\frac{\pi}{3}.$$

Također je

$$\left|\widehat{FG}\right|=\left|\widehat{HK}\right|=\frac{\pi}{3}.$$

Opseg lika iznosi:

$$O=|AD|+\left|\widehat{DE}\right|+|EB|+|BF|+\left|\widehat{FG}\right|+|GC|+|CH|+\left|\widehat{HK}\right|+|KA| \Rightarrow$$

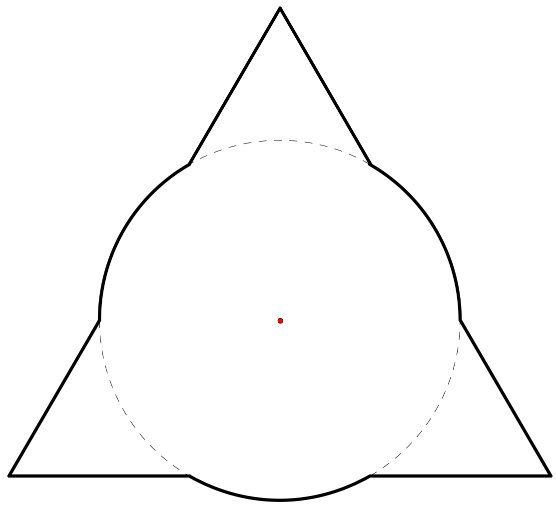
$$\Rightarrow O=1+\frac{\pi}{3}+1+1+\frac{\pi}{3}+1+1+\frac{\pi}{3}+1 \Rightarrow O=6+3\cdot\frac{\pi}{3} \Rightarrow O=6+3\cdot\frac{\pi}{3} \Rightarrow O=6+\pi.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 103

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 6 und ein Kreis mit Radius 2 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groβ ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

$A.\ 12+2\cdot\pi$ $\quad$ $B.\ 6+4\cdot\pi$ $\quad$ $C.\ 18+\frac{\pi}{3}$ $\quad$ $D.\ 6\cdot\pi$ $\quad$ $E.\ 9+2\cdot\pi$

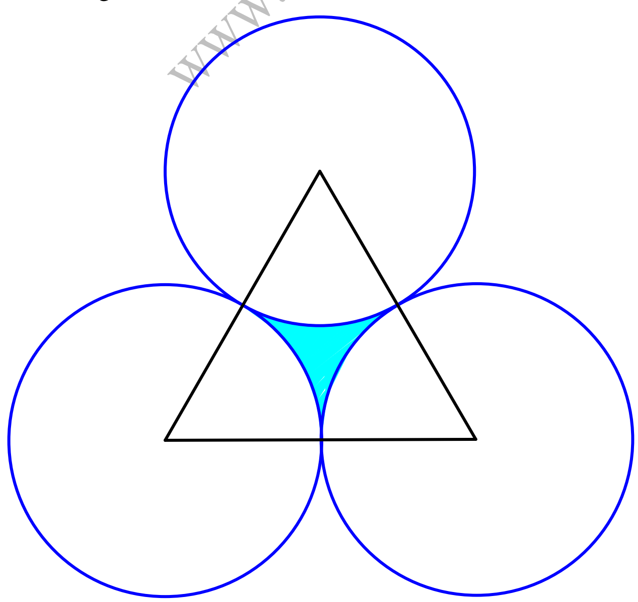


Jednakostraničan trokut duljine stranice 6 i kružnica polumjera 2 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rezultat: A.

Zadatak 104 (Sonja, HAK)

Jeder von drei Kreisen mit Radius r berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom r dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rješenje 104

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60°$ i tri jednake stranice.
Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).
Ako je r polumjer kruga, tada je površina kružnog isječka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

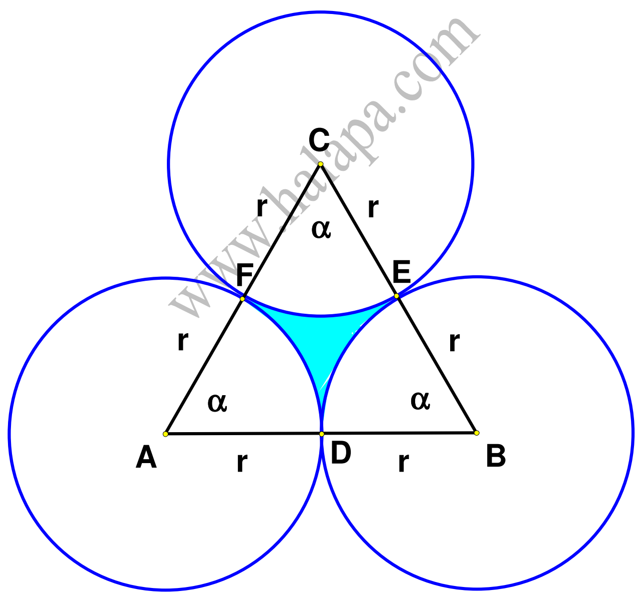
$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

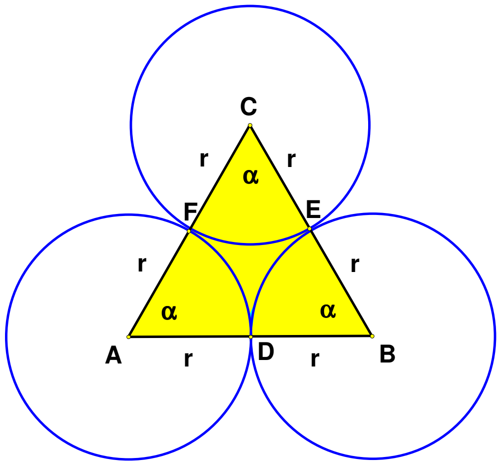
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

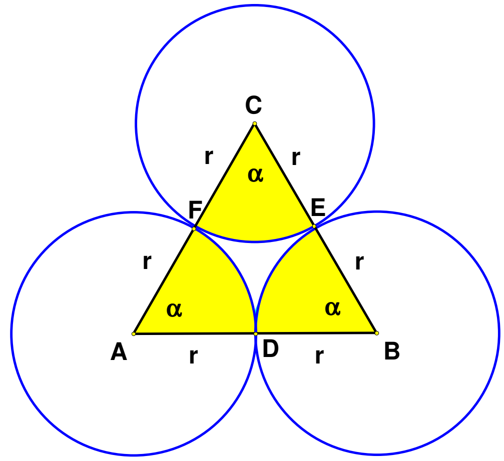


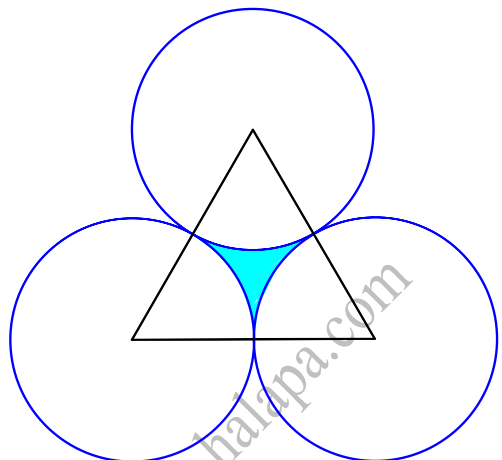
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r \quad , \quad |AD| = |DB| = |BE| = |EC| = |CF| = |FA| = r$$

$$\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = \alpha = 60^\circ$$







Površina osjenčanog dijela (plava boja među krugovima) jednaka je razlici površine jednakostraničnog trokuta i trostruke površine kružnog isječka (sva tri kružna isječka jednake su površine)

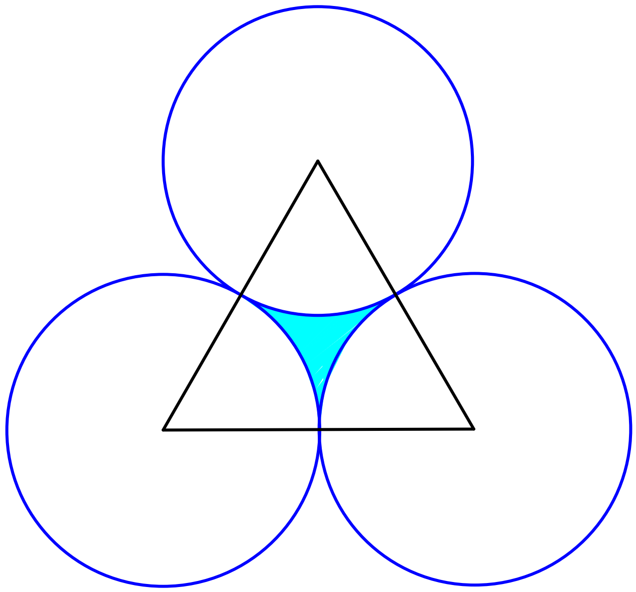
$$P=\frac{(2\cdot r)^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^\circ}\Rightarrow\left[\alpha=60^\circ\right]\Rightarrow P=\frac{4\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot 60^\circ}{360^\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{4\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot 60^\circ}{360^\circ}\Rightarrow P=\frac{2\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{r^2\cdot\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{2\cdot r^2\cdot\sqrt{3}-r^2\cdot\pi}{2}\Rightarrow P=\frac{r^2\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-\pi\right)}{2}.$$

Vježba 104

Jeder von drei Kreisen mit Radius 1 berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom 1 dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rezultat: $P = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - \pi}{2}.$

Zadatak 105 (Marta, srednja škola)

Put koji prijeđe vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 2 cm, tijekom 24 sata približno je jednak:

$A.\ 1.81\ m \qquad B.\ 18.1\ m \qquad C.\ 181\ m \qquad D.\ 1810\ m$

Rješenje 105

Ponovimo!

$$1\ h = 60\ \min \quad , \quad 1\ m = 100\ cm.$$

Opseg kružnice polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

U jednoj minuti vrh sekundne kazaljke sata jednom prijeđe kružnicu. Za 24 sata on će obići kružnicu 1440 puta.

$$n = 24 \cdot 60 = 1440.$$

Put koji prijeđe vrh sekundne kazaljke sata tijekom 24 sata približno iznosi:

$$s = n \cdot O \;\Rightarrow\; s = n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} n = 1440 \\ r = 2\ cm = 0.02\ m \end{bmatrix} \Rightarrow\; s = 1440 \cdot 2 \cdot 0.02\ m \cdot \pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s = 180.96\ m \;\Rightarrow\; s \approx 181\ m.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 105

Put koji prijeđe vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 20 mm, tijekom 24 sata približno je jednak:

$A.\ 1.81\ m \qquad B.\ 18.1\ m \qquad C.\ 181\ m \qquad D.\ 1810\ m$

Rezultat: C.

Zadatak 106 (4B, TUPŠ)

Geografska širina Zagreba je 45º 45'. Kolika je udaljenost Zagreba od ekvatora? (polumjer Zemlje r = 6370 km)

Rješenje 106

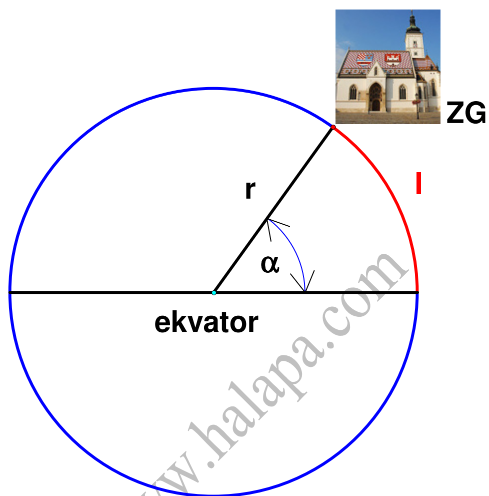
Ponovimo!

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ .$$

Formula za duljinu kružnog luka l koji je pridružen središnjem kutu α, u krugu polumjera r, glasi:

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}.$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.



$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 6370\ km \\ \alpha = 45^\circ\ 45' = 45^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = 45.75^\circ \end{array}\right] \Rightarrow l = \frac{6370\ km \cdot \pi \cdot 45.75^\circ}{180^\circ} \Rightarrow l = 5086.37\ km.$$

Vježba 106

Pronađite geografsku širinu Vašeg mjesta. Kolika je njegova udaljenost od ekvatora? (polumjer Zemlje r = 6370 km)

Rezultat: ?

Zadatak 107 (4B, TUPŠ)

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produlji za 1 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

Rješenje 107

Ponovimo!

$$1\ m = 100\ cm.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.
Opseg kružnice polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je r polumjer Zemlje njezin opseg oko ekvatora je

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Povećamo li polumjer za x, opseg će se produljiti za d.

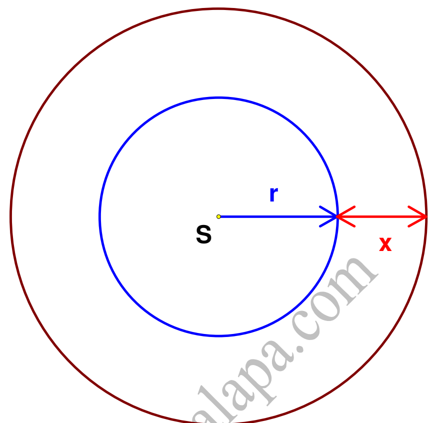
$$d + O = 2 \cdot (r + x) \cdot \pi.$$

Slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ d + O = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow d = 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{d}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{100\ cm}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = 15.92\ cm.$$



Vježba 107

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produlji za 0.5 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

Rezultat: 7.96 cm.

Zadatak 108 (Borna, gimnazija)

Zbroj polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 36 cm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 36 cm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Polumjer veće kružnice iznosi

$$A.\ 18\ cm \qquad B.\ 19\ cm \qquad C.\ 20\ cm \qquad D.\ 22\ cm$$

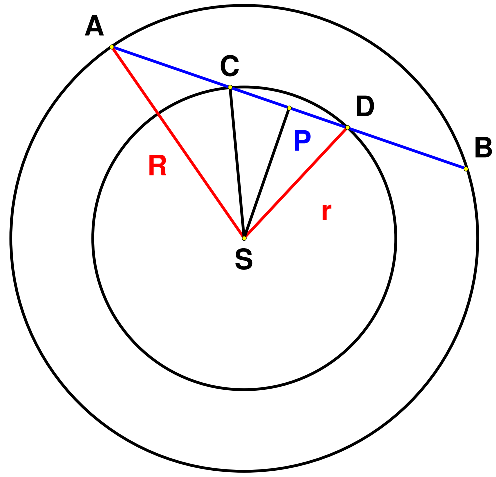
Rješenje 108

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.
Koncentrične kružnice su kružnice koje imaju isto središte.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

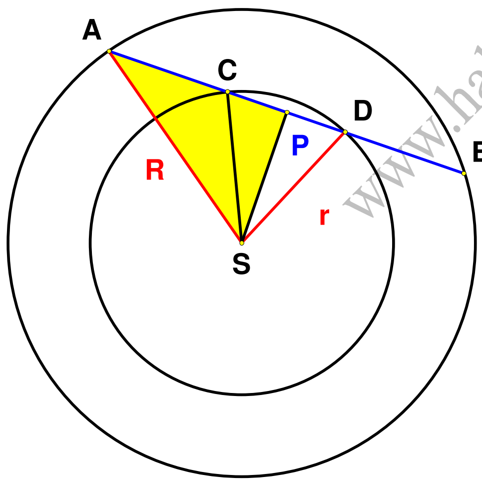


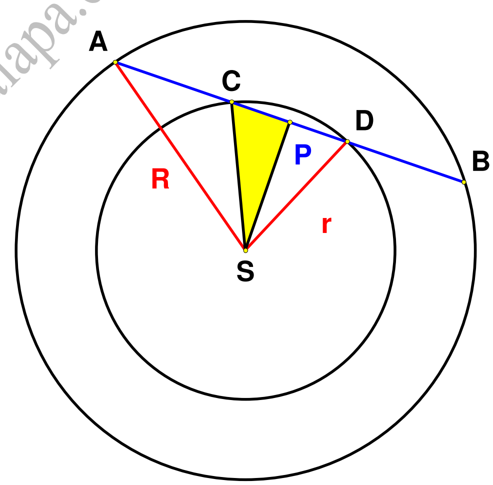
Sa slike vidi se:

$$|AB| = 36 \ cm \ , \ |AC| = |CD| = |DB| = \frac{1}{3} \cdot |AB| = \frac{1}{3} \cdot 36 \ cm = 12 \ cm$$

$$|CP| = |PD| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 12 \ cm = 6 \ cm \ , \ |AP| = |AC| + |CP| = 12 \ cm + 6 \ cm = 18 \ cm$$

$$|SA| = R \ , \ |SC| = |SD| = r$$





Uočimo pravokutne trokute čiji su vrhovi središte tetive, središte kružnica te točke na tetivi i kružnicama: ΔSPA i ΔSPC.
Dva put uporabimo Pitagorin poučak.

$$\left. \begin{array}{l} |SP|^2 = |SA|^2 - |AP|^2 \\ |SP|^2 = |SC|^2 - |CP|^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |SP|^2 = R^2 - 18^2 \\ |SP|^2 = r^2 - 6^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 18^2 = r^2 - 6^2 \Rightarrow R^2 - 324 = r^2 - 36 \Rightarrow R^2 - r^2 = -36 + 324 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = 288 \Rightarrow (R+r) \cdot (R-r) = 324 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ R + r = 36 \end{array} \right] \Rightarrow 36 \cdot (R-r) = 288 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 \cdot (R-r) = 288 \ /: 36 \Rightarrow R - r = 8.$$

Iz sustava jednadžba izračunamo R.

$$\left.\begin{array}{l} R+r=36 \\ R-r=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot R=44 \Rightarrow 2\cdot R=44 \; /:2 \Rightarrow R=22 \; cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 108

Zbroj polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 3.6 dm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 3.6 dm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Polumjer veće kružnice iznosi

$A.\ 18\ cm \qquad B.\ 19\ cm \qquad C.\ 20\ cm \qquad D.\ 22\ cm$

Rezultat: D.

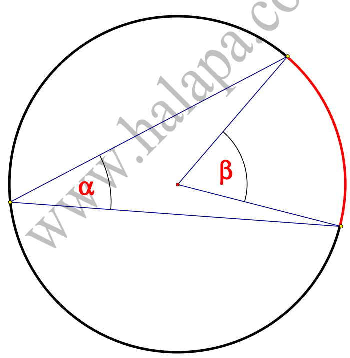
Zadatak 109 (Katarina, maturantica)

Koliki je polumjer kružnice ako je nad njezinom tetivom duljine 10 cm obodni kut mjere 15º?

Rješenje 109

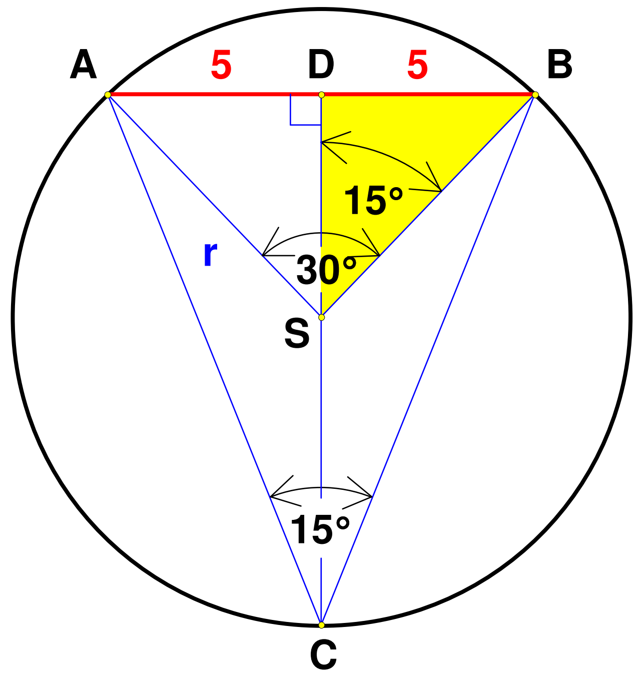
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.
Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kružnice na tetivu dijeli je na dva jednaka dijela.
Kut kojem je vrh na kružnici, a čiji krakovi sijeku tu kružnicu naziva se obodni kut.
Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.
Središnji kut β nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu α nad tim istim lukom.



$$\beta=2\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\cdot\beta$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 10 \ , \ |AD| = |DB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \ , \ |SA| = |SB| = |SC| = r$$

$$\angle ACB = 15^{\circ} \ \text{obodni kut} \ , \ \angle ASB = 2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 15^{\circ} = 30^{\circ} \ \text{središnji kut}$$

$$\angle DSB = \frac{1}{2} \cdot \angle ASB = \frac{1}{2} \cdot 30^{\circ} = 15^{\circ}$$

Uočimo pravokutan trokut DSB i pomoću funkcije sinus dobije se:

$$\sin \angle DSB = \frac{|DB|}{|SB|} \Rightarrow \sin 15^{\circ} = \frac{5}{r} \Rightarrow \sin 15^{\circ} = \frac{5}{r} \ / \cdot \frac{r}{\sin 15^{\circ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{5}{\sin 15^{\circ}} \Rightarrow r = 19.3185 \ cm.$$

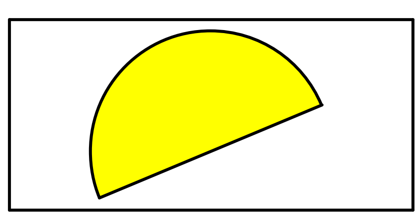
Vježba 109

Koliki je polumjer kružnice ako je nad njezinom tetivom duljine 10 cm obodni kut mjere 15°?

Rezultat: 19.3185 cm.

Zadatak 110 (Katarina, maturantica)

Na skici je prikazan pravokutnik dimenzija 12.8 cm x 5 cm u koji je ucrtan polukrug. Površina osjenčanoga dijela pravokutnika jednaka je površini ucrtanoga polukruga. Koliki je polumjer polukruga?



A. 2.5 cm B. 3.19 cm C. 4.51 cm D. 6.4 cm

Rješenje 110

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b.

$$P = a \cdot b.$$

Budući da je površina osjenčanoga dijela pravokutnika (bijela boja) jednaka površini ucrtanoga polukruga (žuta boja), površina polukruga jednaka je polovici površine pravokutnika.

$$\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \; / \cdot \frac{2}{\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{a \cdot b}{\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{a \cdot b}{\pi} \; / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 12.8 \ cm \\ b = 5 \ cm \end{bmatrix} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{12.8 \ cm \cdot 5 \ cm}{\pi}} \Rightarrow r = 4.51 \ cm.$$

Odgovor je pod C.

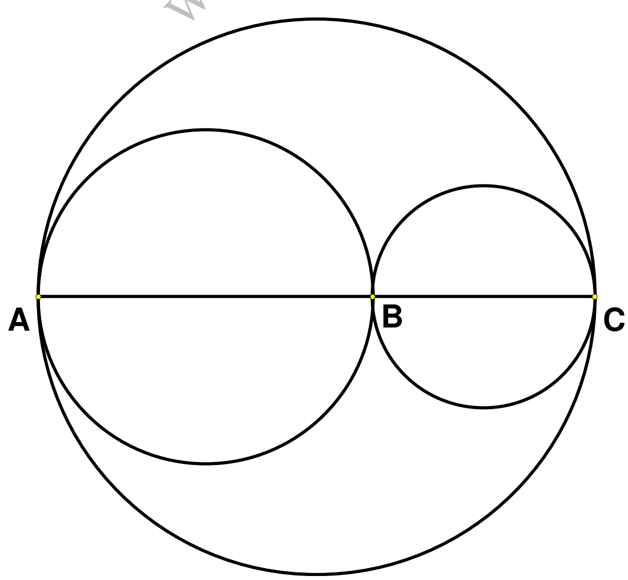
Vježba 110

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 111 (Katarina, maturantica)

Na skici su prikazana tri kruga s promjerima $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Duljina promjera $\overline{AB}$ je 12 cm, a promjera $\overline{BC}$ je 8 cm. Kolika je površina osjenčanoga dijela na skici?



$A.\ 18 \cdot \pi \ cm^2$ $\quad$ $B.\ 20 \cdot \pi \ cm^2$ $\quad$ $C.\ 34 \cdot \pi \ cm^2$ $\quad$ $D.\ 48 \cdot \pi \ cm^2$

Rješenje 111

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Promjer kružnice:

$$d = 2 \cdot r.$$

Ploština kruga polumjera r iznosi:

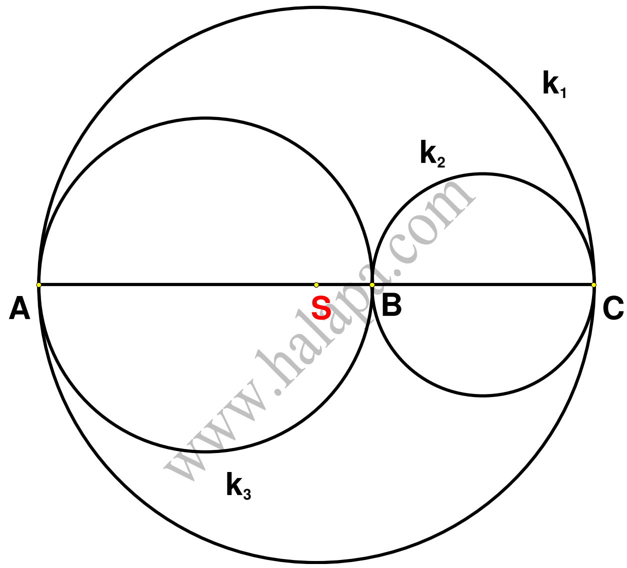
$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 12 \ cm \ , \ |BC| = 8 \ cm \ , \ |AC| = |AB| + |BC| = 12 \ cm + 8 \ cm = 20 \ cm$$

$$|SA| = |SB| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 20 \ cm = 10 \ cm$$

Odredimo polumjere krugova:

- polumjer kruga k_1

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \ \Rightarrow \ r_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \ cm \ \Rightarrow \ r_1 = 10 \ cm$$

- polumjer kruga k_2

$$r_2 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \ \Rightarrow \ r_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \ cm \ \Rightarrow \ r_2 = 4 \ cm$$

- polumjer kruga k_3

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \ \Rightarrow \ r_3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \ cm \ \Rightarrow \ r_3 = 6 \ cm.$$

Površina osjenčanoga dijela jednaka je površini kruga k_1 umanjena za površine krugova k_2 i k_3.

$$P = P_1 - P_2 - P_3 \Rightarrow P = r_1^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \left(r_1^2 - r_2^2 - r_3^2\right) \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 = 10\ cm \\ r_2 = 4\ cm \\ r_3 = 6\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow P = \left((10\ cm)^2 - (4\ cm)^2 - (6\ cm)^2\right) \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \left(100\ cm^2 - 16\ cm^2 - 36\ cm^2\right) \cdot \pi \Rightarrow P = 48 \cdot \pi\ cm^2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 111

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 112 (Vedran, gimnazija)

U kružnicu polumjera 1.25 cm upisan je pravokutan trokut površine 1.25 cm^2. Zbroj duljina kateta trokuta iznosi:

$A.\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}\ cm \qquad B.\ \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3}\ cm \qquad C.\ \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2}\ cm \qquad D.\ \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}\ cm \qquad E.\ \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\ cm$

Rješenje 112

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.
Ako je pravokutnom trokutu hipotenuze c opisana kružnica polumjera r, vrijedi:

$$c = 2 \cdot r.$$

Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Krenimo na posao!

- $\left.\begin{matrix} c^2 = a^2 + b^2 \\ c = 2 \cdot r \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = (2 \cdot r)^2 \Rightarrow [\, r = 1.25 \,] \Rightarrow a^2 + b^2 = (2 \cdot 1.25)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2.5^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 6.25 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{625}{100} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{625}{100} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4}$$

- $P = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = P \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = P \;/\cdot 2 \Rightarrow a \cdot b = 2 \cdot P \Rightarrow a \cdot b = 2 \cdot 1.25 \Rightarrow a \cdot b = 2.5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \cdot b = \frac{25}{10} \Rightarrow a \cdot b = \frac{25}{10} \Rightarrow a \cdot b = \frac{5}{2}.$$

Sada je:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \\ a \cdot b = \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{25}{4} + \frac{10}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{25+20}{4} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = \frac{45}{4} \;/\sqrt{} \Rightarrow a+b = \sqrt{\frac{45}{4}} \Rightarrow a+b = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{4}} \Rightarrow a+b = \frac{\sqrt{9 \cdot 5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a+b = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 112

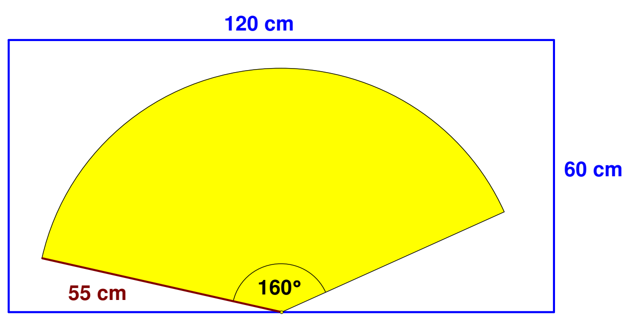
U kružnicu polumjera 12.5 mm upisan je pravokutan trokut površine 1.25 cm^2. Zbroj duljina kateta trokuta iznosi:

$A.\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}\ cm \quad B.\ \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3}\ cm \quad C.\ \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2}\ cm \quad D.\ \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}\ cm \quad E.\ \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 113 (Marko, gimnazija)

Brisač stakla dug je 55 cm i briše ravno staklo dimenzija 120 cm x 60 cm. Brisač se pri brisanju stakla zakrene za kut od 160º kao što je prikazano na skici. Koliki postotak površine stakla brisač pritom obriše?



Rješenje 113

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Ako je r polumjer kruga, tada je ploština kružnog isječka sa središnjim kutom α dana formulom

$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

Koliki je postotak broja a od broja b?

$$\frac{a}{b} \cdot 100\,\%.$$

Staklo vjetrobrana je pravokutnog oblika površine

$$P_1 = a \cdot b \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a = 120 \text{ cm} \\ b = 60 \text{ cm} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; P_1 = 120 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm} \;\Rightarrow\; P_1 = 7\,200 \text{ cm}^2.$$

Uočimo da je prebrisani dio stakla oblika kružnog isječka površine

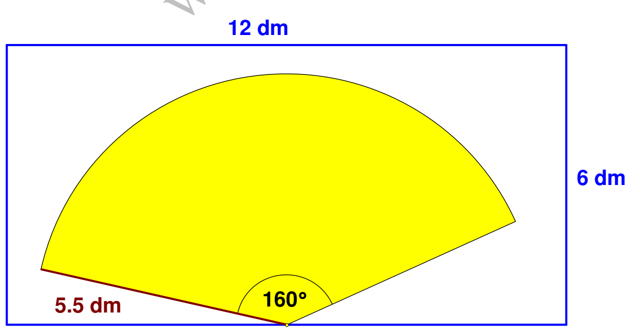
$$P_2 = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} r = 55 \text{ cm} \\ \alpha = 160^\circ \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; P_2 = \frac{(55 \text{ cm})^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 160^\circ \;\Rightarrow\; P_2 = 4\,223.70 \text{ cm}^2.$$

Računamo postotak površine stakla koji brisač obriše.

$$p = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\,\% \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} P_2 = 4\,223.70 \text{ cm}^2 \\ P_1 = 7\,200 \text{ cm}^2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; p = \frac{4\,223.70 \text{ cm}^2}{7\,200 \text{ cm}^2} \;\Rightarrow\; p = 58.66\,\%.$$

Vježba 113

Brisač stakla dug je 5.5 dm i briše ravno staklo dimenzija 12 dm x 6 dm. Brisač se pri brisanju stakla zakrene za kut od 160º kao što je prikazano na skici. Koliki postotak površine stakla brisač pritom obriše?



Rezultat: 58.66 %.

Zadatak 114 (Franjo, srednja škola)

Duljina velike kazaljke sata koja pokazuje minute je 7 cm. Koliki **put** prijeđe vrh te kazaljke za 40 sati?

Rješenje 114

Ponovimo!

$$\text{Puni kut} = 360^\circ.$$

Opseg kruga polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Za jedan sat velika (minutna) kazaljka 'opiše' puni kut, a njezin vrh prijeđe put jednak opsegu kruga polumjera r. Za 40 sati traženi put bit će 40 puta veći i iznosit će:

$$\left.\begin{matrix} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ s = 40 \cdot O \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = 40 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow \left[r = 7 \ cm \right] \Rightarrow s = 40 \cdot 2 \cdot 7 \ cm \cdot \pi \Rightarrow s = 560 \cdot \pi \ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \approx 1759.29 \ cm.$$

Vježba 114

Duljina velike kazaljke sata koja pokazuje minute je 7 cm. Koliki **put** prijeđe vrh te kazaljke za 20 sati?

Rezultat: $280 \cdot \pi \ cm.$

Zadatak 115 (Lucija, srednja škola)

Odredi polumjer onog kruga kojemu je površina jednaka duljini promjera.

Rješenje 115

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Promjer kružnice i kruga je dužina koja prolazi središtem i spaja dvije točke kružnice.
Promjer je dvaput veći od polumjera.

$$d = 2 \cdot r.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz uvjeta slijedi:

$$P = d \Rightarrow r^2 \cdot \pi = 2 \cdot r \Rightarrow r^2 \cdot \pi = 2 \cdot r \ / \cdot \frac{1}{r \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}.$$

Vježba 115

Odredi polumjer onog kruga kojemu je površina jednaka duljini polumjera.

Rezultat: $\frac{1}{\pi}.$