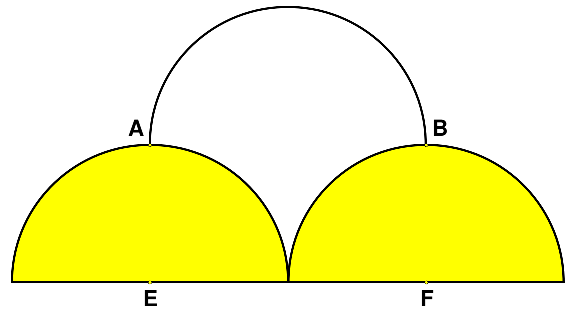
Zadatak 101 (Marino i Medax, srednja škola)

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 2 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **neobojenog** dijela slike?



$A.\ 8\ cm^2 \qquad B.\ 7\ cm^2 \qquad C.\ 2\cdot\pi\ cm^2 \qquad D.\ (2\cdot\pi+1)\ cm^2 \qquad E.\ (2\cdot\pi+2)\ cm^2$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

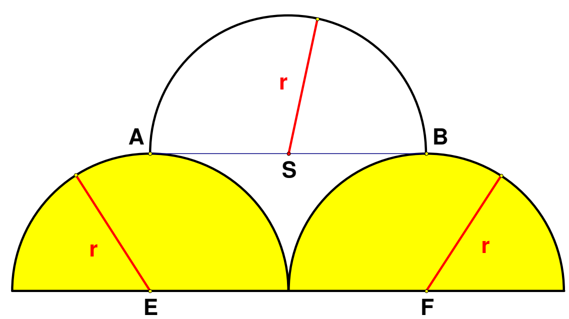
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b.

$$P=a\cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

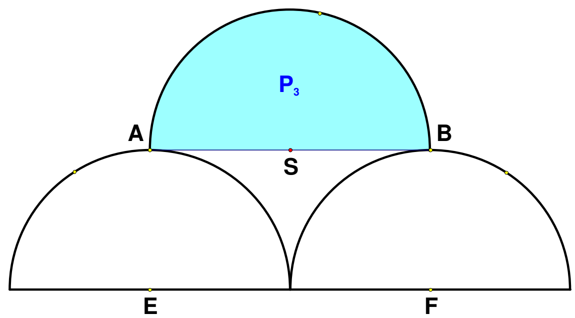


Sa slike vidi se:

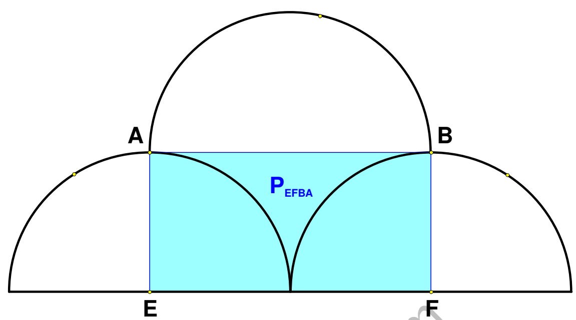
$$r=2\ cm\ ,\ |EF|=|AB|=2\cdot r=4\ cm\ ,\ |FB|=|EA|=r=2\ cm$$

Slike nam govore sve!

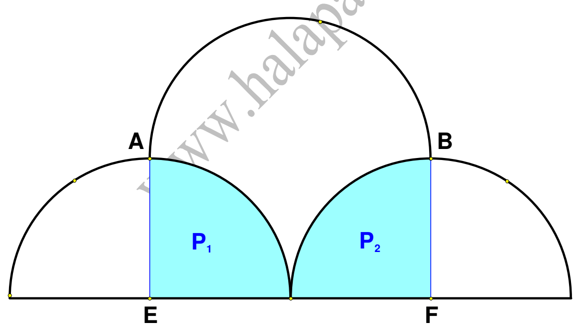
www.halapa.com



$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$$

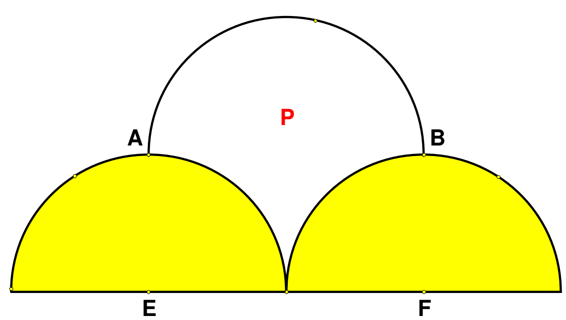


$$P_{EFBA} = |EF| \cdot |FB| = 2 \cdot r \cdot r = 2 \cdot r^2$$



$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Ploština **neobojenog** dijela iznosi:



$$P = P_3 + P_{EFBA} - P_1 - P_2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi+2\cdot r^{2}-\frac{2}{4}\cdot r^{2}\cdot\pi\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi+2\cdot r^{2}-\frac{2}{4}\cdot r^{2}\cdot\pi\ \Rightarrow$$

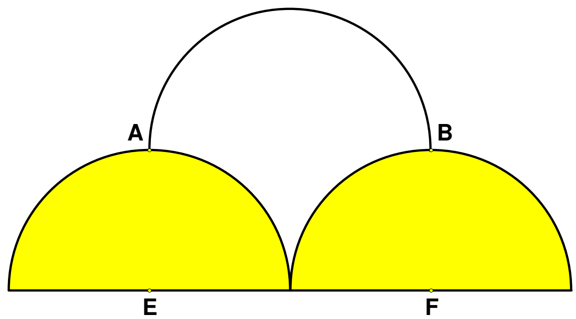
$$\Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi+2\cdot r^{2}-\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi+2\cdot r^{2}-\frac{1}{2}\cdot r^{2}\cdot\pi\ \Rightarrow\ P=2\cdot r^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=2\cdot(2\ cm)^{2}\ \Rightarrow\ P=8\ cm^{2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 101

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 3 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **neobojenog** dijela slike?



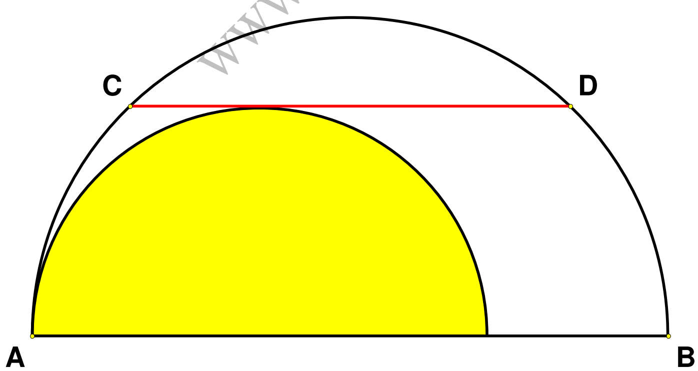
$A.\ 18\ cm^{2}$ $\quad B.\ 9\ cm^{2}$ $\quad C.\ 3\cdot\pi\ cm^{2}$ $\quad D.\ (3\cdot\pi+3)\ cm^{2}$ $\quad E.\ (9\cdot\pi)\ cm^{2}$

Rezultat: A.

www.halapa.com

Zadatak 102 (Marija, TUPŠ)

Nacrtana su dva polukruga. Tetiva je duga 4 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **neobojena** (**bijela**) površina?



$A.\ \pi$ $\quad B.\ 1.5\cdot\pi$ $\quad C.\ 2\cdot\pi$ $\quad D.\ 3\cdot\pi$

Rješenje 102

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^{2}\cdot\pi.$$

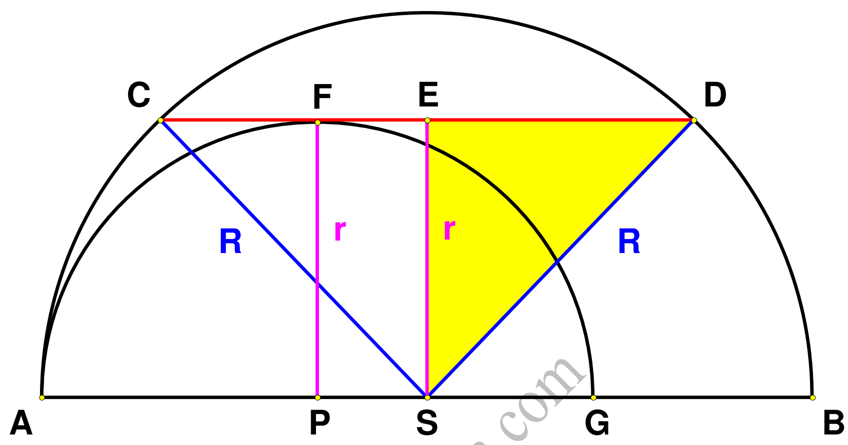
Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kruga na tetivu raspolavlja je na dva jednaka dijela.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$



www.halapa.com

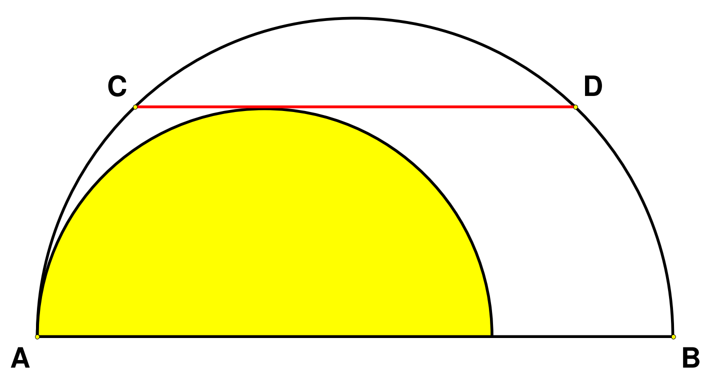
Iz slike izlazi:

$$|AB|=2\cdot R \ , \ |AS|=|SB|=|SC|=|SD|=R \ , \ |AG|=2\cdot r$$

$$|AP|=|PG|=|PF|=|SE|=r \ , \ |CD|=4 \ , \ |CE|=|ED|=2$$

Uočimo pravokutan trokut SDE i uporabom Pitagorina poučka dobijemo:

$$|SD|^2=|SE|^2+|ED|^2 \Rightarrow R^2=r^2+2^2 \Rightarrow R^2=r^2+4 \Rightarrow R^2-r^2=4.$$



Ploština neobojenog (bijelog) dijela P jednaka je razlici ploština velikog i malog polukruga.

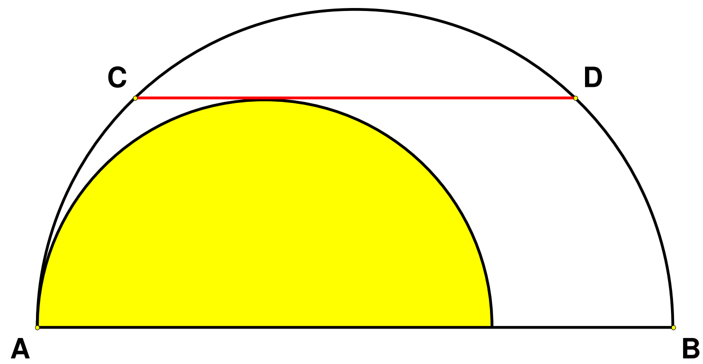
$$P=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(R^2-r^2\right) \Rightarrow \left[R^2-r^2=4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4 \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4 \Rightarrow P=2\cdot\pi.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 102

Nacrtana su dva polukruga. Tetiva je duga 8 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **neobojena** (**bijela**) površina?



$$A.\ 8\cdot\pi \qquad B.\ 6\cdot\pi \qquad C.\ 4\cdot\pi \qquad D.\ 2\cdot\pi$$

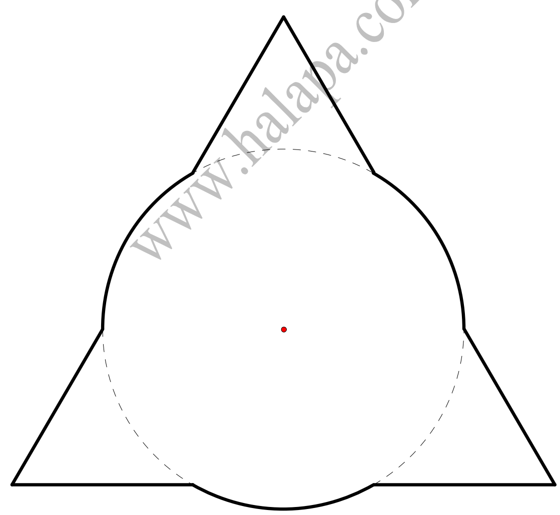
Rezultat: A.

Zadatak 103 (Tina i Sonja, HAK)

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 und ein Kreis mit Radius 1 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groβ ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

$$A.\ 6+\pi \qquad B.\ 3+2\cdot\pi \qquad C.\ 9+\frac{\pi}{3} \qquad D.\ 3\cdot\pi \qquad E.\ 9+\pi$$

www.halapa.com



Jednakostraničan trokut duljine stranice 3 i kružnica polumjera 1 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rješenje 103

Ponovimo!

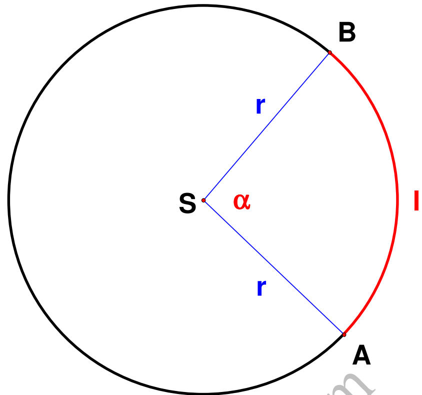
$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60°$ i tri jednake stranice.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.



Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

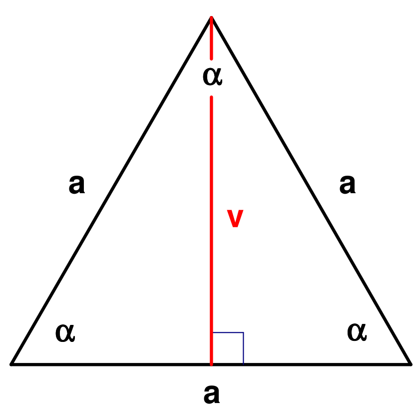
$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

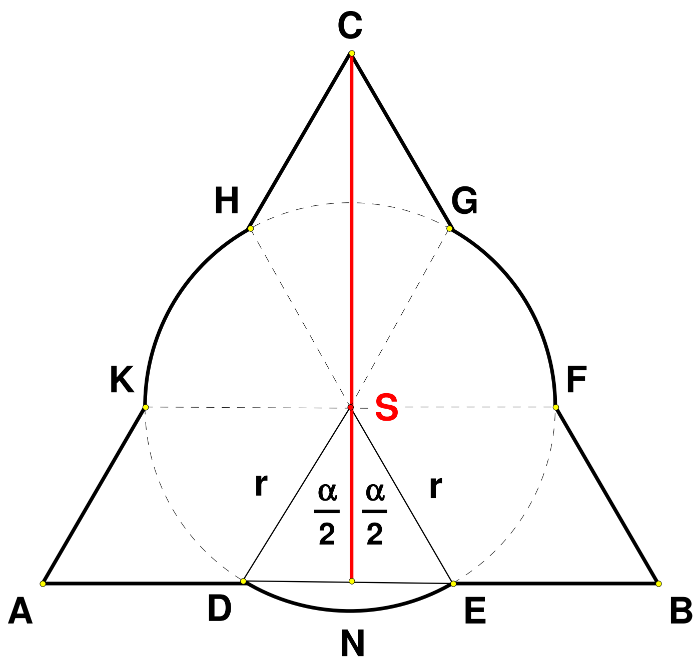
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Visina jednakostraničnog trokuta je:

$$v=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}.$$



www.halapa.com



Sa slike vidi se:

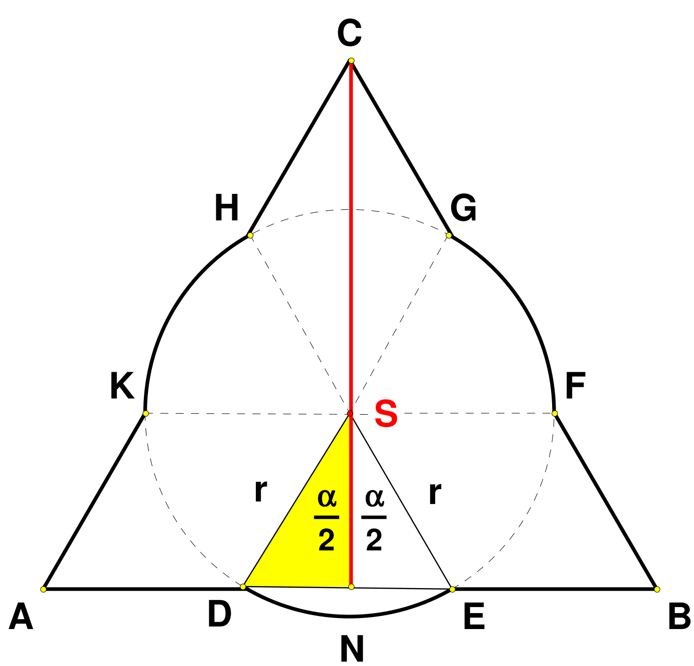
$$\left|AB\right| = \left|BC\right| = \left|CA\right| = a = 3 \ , \ \left|SD\right| = \left|SE\right| = r = 1 \ , \ \angle NSD = \angle ESN = \frac{\alpha}{2} \ , \ \angle ESD = \alpha$$

Trokut ABC je jednakostraničan pa je $\overline{CN}$ istodobno njegova težišnica, visina i simetrala kuta. Točka S je sjecište težišnica i visina pa vrijedi:

$$\left|SN\right| = \frac{1}{3} \cdot \left|CN\right| \Rightarrow \left|SN\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\ a = 3\ \right] \Rightarrow \left|SN\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|SN\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|SN\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

www.halapa.com



Uočimo pravokutan trokut DNS i pomoću funkcije kosinus izračunamo kut $\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{|SN|}{|SD|}\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \ /\cdot 2 \Rightarrow \alpha=60^\circ.$$

Zaključujemo da je trokut SDE jednakostraničan pa je

$$|DE|=1.$$

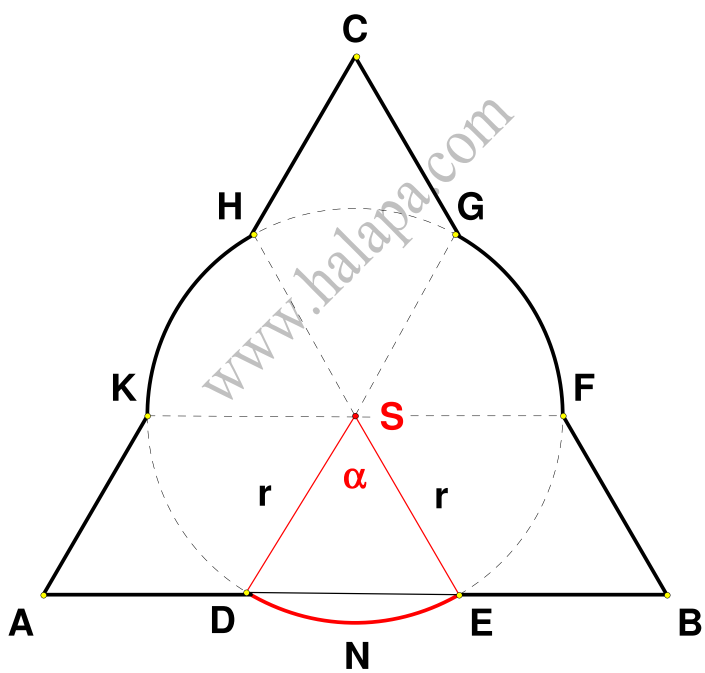
Analogno su i trokuti ΔSFG i ΔSHK jednakostranični i slijedi:

$$|FG|=|HK|=1.$$

Zbog simetričnosti vrijedi:

$$|AD|=|EB|=|BF|=|GC|=|CH|=|KA|=1.$$

Računamo duljinu luka $\widehat{DE}$.



$$|\widehat{DE}|=\frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^\circ}\Rightarrow\begin{bmatrix} r=1\\ \alpha=60^\circ\end{bmatrix}\Rightarrow |\widehat{DE}|=\frac{1\cdot\pi\cdot 60^\circ}{180^\circ}\Rightarrow |\widehat{DE}|=\frac{\pi\cdot 60^\circ}{180^\circ}\Rightarrow |\widehat{DE}|=\frac{\pi}{3}.$$

Također je

$$|\widehat{FG}|=|\widehat{HK}|=\frac{\pi}{3}.$$

Opseg lika iznosi:

$$O=|AD|+|\widehat{DE}|+|EB|+|BF|+|\widehat{FG}|+|GC|+|CH|+|\widehat{HK}|+|KA|\Rightarrow$$

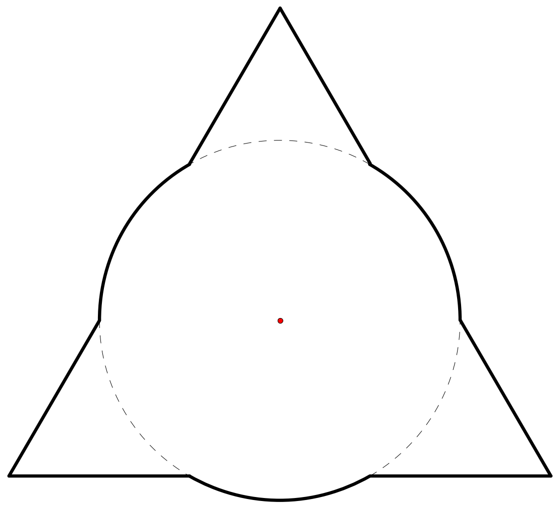
$$\Rightarrow O=1+\frac{\pi}{3}+1+1+\frac{\pi}{3}+1+1+\frac{\pi}{3}+1\Rightarrow O=6+3\cdot\frac{\pi}{3}\Rightarrow O=6+3\cdot\frac{\pi}{3}\Rightarrow O=6+\pi.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 103

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 6 und ein Kreis mit Radius 2 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groβ ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

$A.\ 12+2\cdot\pi$ $\quad B.\ 6+4\cdot\pi$ $\quad C.\ 18+\frac{\pi}{3}$ $\quad D.\ 6\cdot\pi$ $\quad E.\ 9+2\cdot\pi$



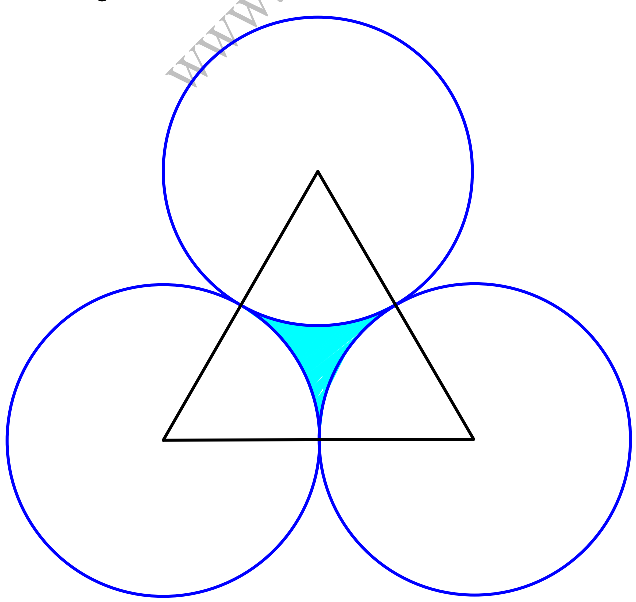
Jednakostraničan trokut duljine stranice 6 i kružnica polumjera 2 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

Rezultat: A.

www.halapa.com

Zadatak 104 (Sonja, HAK)

Jeder von drei Kreisen mit Radius r berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom r dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rješenje 104

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n .$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60°$ i tri jednake stranice.
Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice a

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).
Ako je r polumjer kruga, tada je površina kružnog isječka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

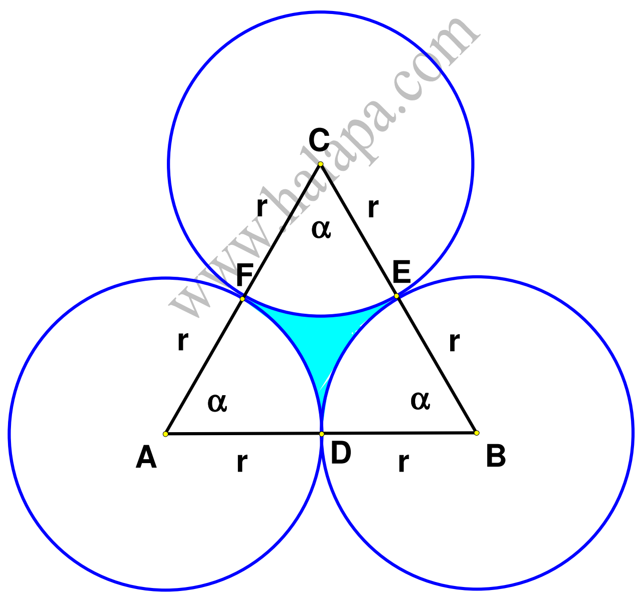
$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

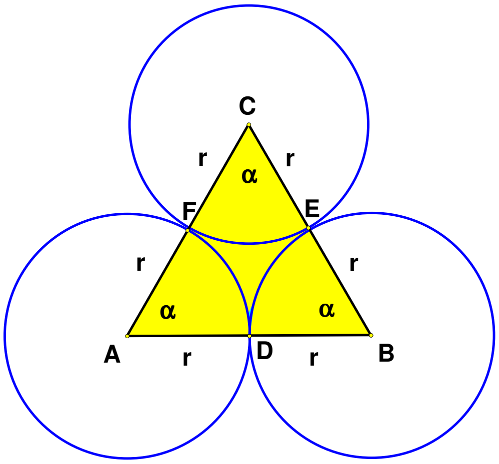
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

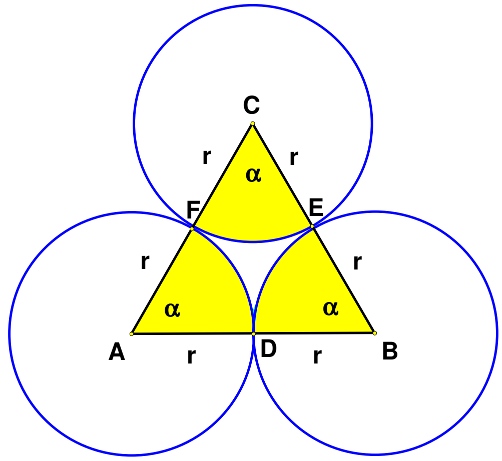


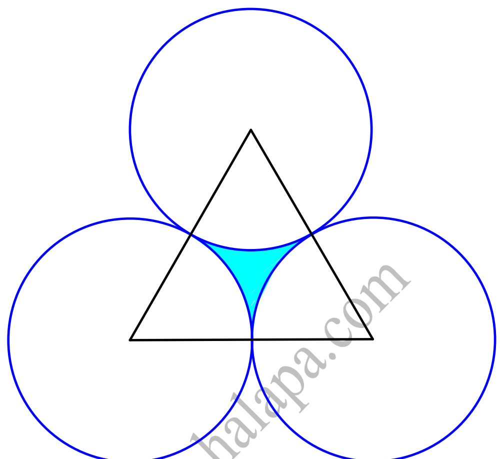
www.halapa.com

Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r \;,\; |AD| = |DB| = |BE| = |EC| = |CF| = |FA| = r$$
$$\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = \alpha = 60^\circ$$







www.halapa.com

Površina osjenčanog dijela (plava boja među krugovima) jednaka je razlici površine jednakostraničnog trokuta i trostruke površine kružnog isječka (sva tri kružna isječka jednake su površine)

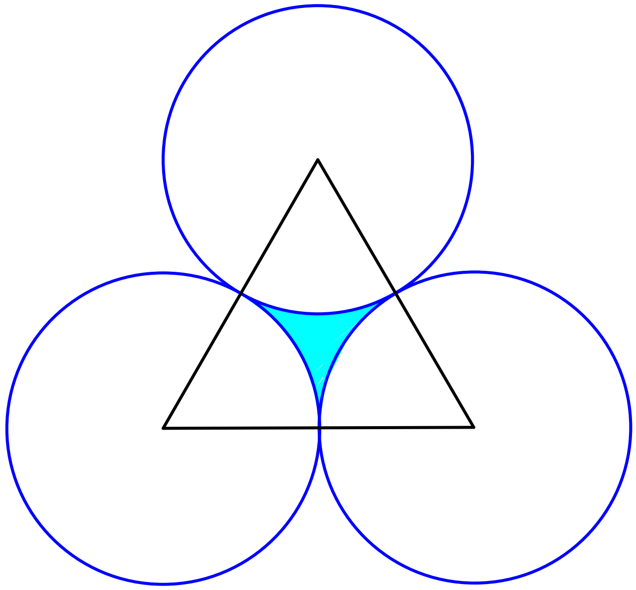
$$P=\frac{(2\cdot r)^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^\circ}\Rightarrow\left[\alpha=60^\circ\right]\Rightarrow P=\frac{4\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot 60^\circ}{360^\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{4\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{4}-3\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot 60^\circ}{360^\circ}\Rightarrow P=\frac{2\cdot r^2\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{r^2\cdot\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{2\cdot r^2\cdot\sqrt{3}-r^2\cdot\pi}{2}\Rightarrow P=\frac{r^2\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-\pi\right)}{2}.$$

Vježba 104

Jeder von drei Kreisen mit Radius 1 berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom 1 dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

Rezultat: $P = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - \pi}{2}.$

www.halapa.com