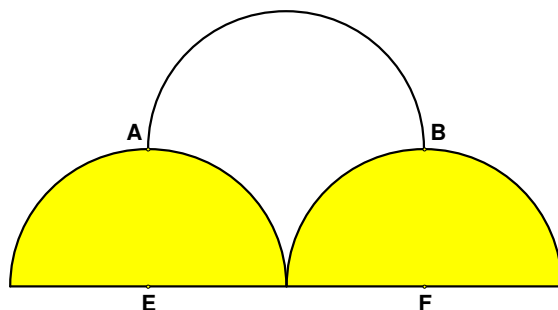


### Zadatak 101 (Marino i Medax, srednja škola)

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 2 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **nebojenog** dijela slike?



- A.  $8 \text{ cm}^2$       B.  $7 \text{ cm}^2$       C.  $2 \cdot \pi \text{ cm}^2$       D.  $(2 \cdot \pi + 1) \text{ cm}^2$       E.  $(2 \cdot \pi + 2) \text{ cm}^2$

### Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju  $r > 0$  (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera  $r$  iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od  $180^\circ$ .

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

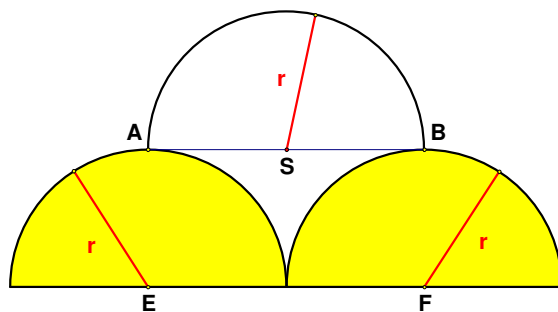
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima  $90^\circ$ ).

Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine  $a$  i širine  $b$ .

$$P = a \cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

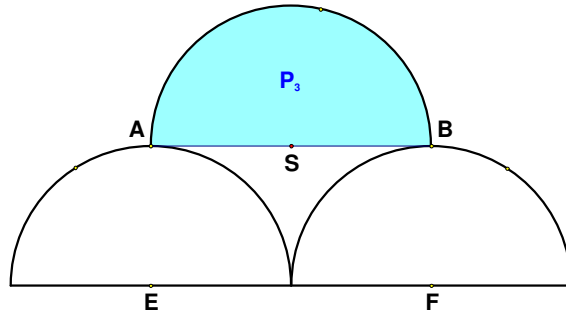
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



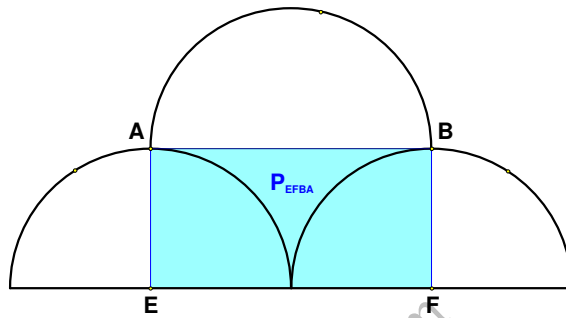
Sa slike vidi se:

$$r = 2 \text{ cm}, \quad |EF| = |AB| = 2 \cdot r = 4 \text{ cm}, \quad |FB| = |EA| = r = 2 \text{ cm}$$

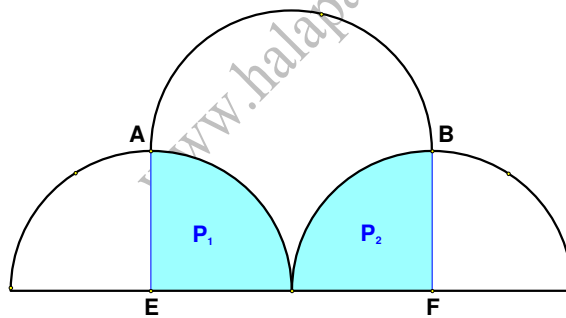
Slike nam govore sve!



$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$$

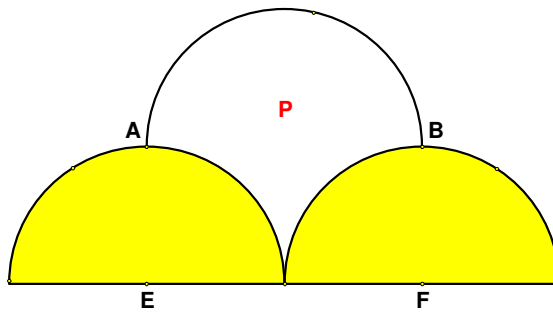


$$P_{EFBA} = |EF| \cdot |FB| = 2 \cdot r \cdot r = 2 \cdot r^2$$



$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$$

Ploština **nebojenog** dijela iznosi:



$$P = P_3 + P_{EFBA} - P_1 - P_2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{2}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{2}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

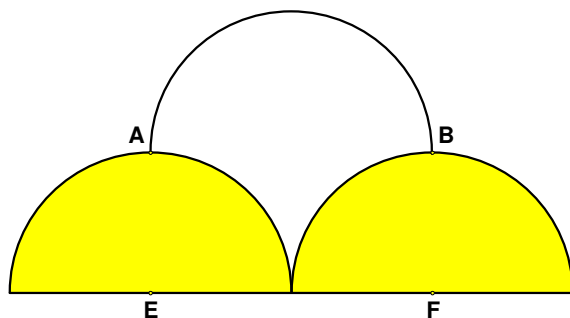
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 2 \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot (2 \text{ cm})^2 \Rightarrow P = 8 \text{ cm}^2.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 101

Zadana su 3 polukruga svaki polumjera 3 cm (slika). Četverokut EFBA je pravokutnik, a točke E i F središta su donjih polukrugova. Kolika je ploština **nebojenog** dijela slike?

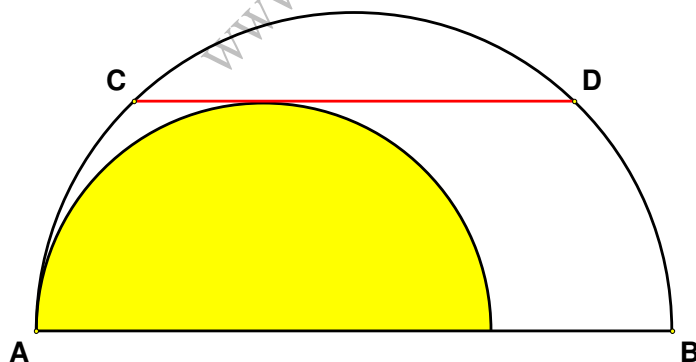


- A.  $18 \text{ cm}^2$     B.  $9 \text{ cm}^2$     C.  $3 \cdot \pi \text{ cm}^2$     D.  $(3 \cdot \pi + 3) \text{ cm}^2$     E.  $(9 \cdot \pi) \text{ cm}^2$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 102 (Marija, TUPŠ )

Nacrtna su dva polukruga. Tetiva je duga 4 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **nebojena (bijela)** površina?



- A.  $\pi$     B.  $1.5 \cdot \pi$     C.  $2 \cdot \pi$     D.  $3 \cdot \pi$

### Rješenje 102

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju  $r > 0$  (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera  $r$  iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kruga na tetivu raspolavlja je na dva jednaka dijela.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

### Pitagorin poučak

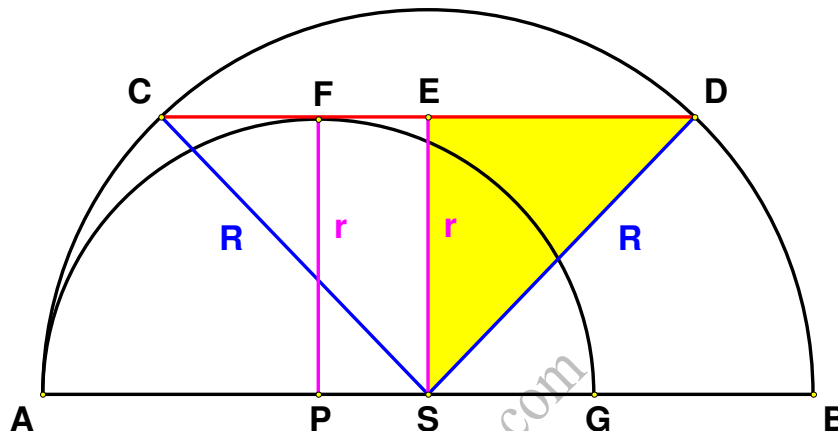
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$



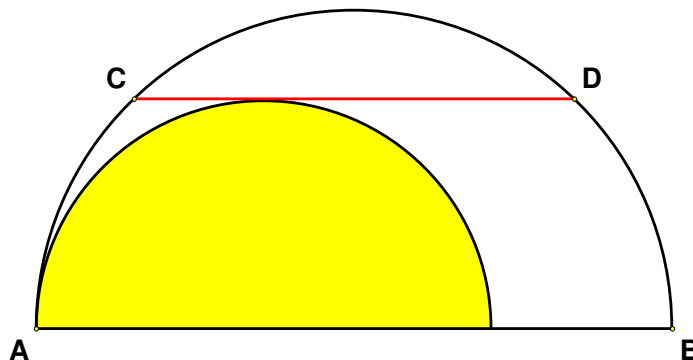
Iz slike izlazi:

$$|AB| = 2 \cdot R \quad , \quad |AS| = |SB| = |SC| = |SD| = R \quad , \quad |AG| = 2 \cdot r$$

$$|AP| = |PG| = |PF| = |SE| = r \quad , \quad |CD| = 4 \quad , \quad |CE| = |ED| = 2$$

Uočimo pravokutan trokut SDE i uporabom Pitagorina poučka dobijemo:

$$|SD|^2 = |SE|^2 + |ED|^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + 2^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + 4 \Rightarrow R^2 - r^2 = 4.$$



Ploština neobojenog (bijelog) dijela P jednaka je razlici ploština velikog i malog polukruga.

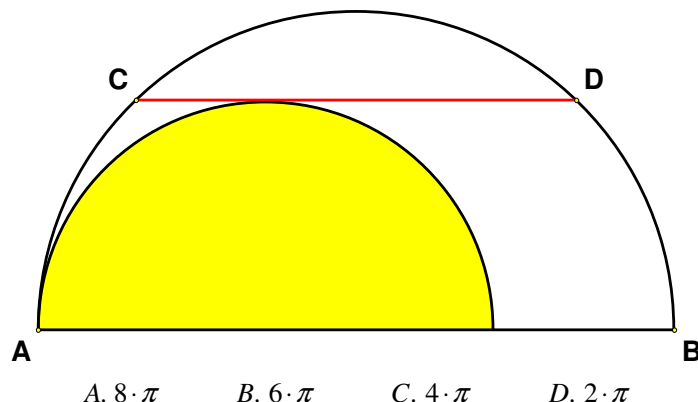
$$P = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow [R^2 - r^2 = 4] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 \Rightarrow P = 2 \cdot \pi.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 102

Nacrtna su dva polukruga. Tetiva je duga 8 i usporedna je promjeru velikog polukruga AB i dodiruje mali polukrug. Kolika je **nebojena (bijela)** površina?

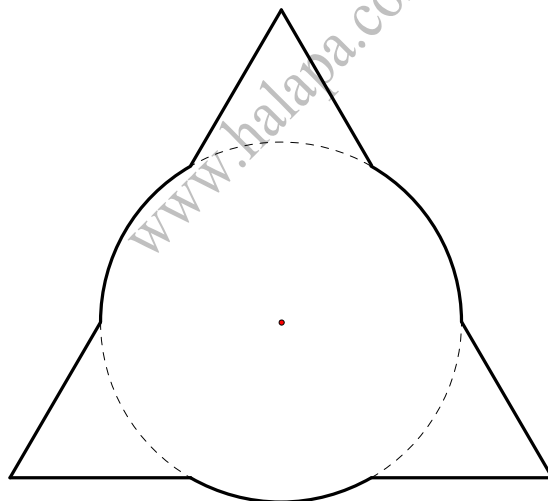


**Rezultat:** A.

### Zadatak 103 (Tina i Sonja, HAK)

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 und ein Kreis mit Radius 1 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groß ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

- A.  $6 + \pi$       B.  $3 + 2 \cdot \pi$       C.  $9 + \frac{\pi}{3}$       D.  $3 \cdot \pi$       E.  $9 + \pi$



Jednakostraničan trokut duljine stranice 3 i kružnica polumjera 1 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

### Rješenje 103

Ponovimo!

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{n}{1} = n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta  $\alpha = 60^\circ$  i tri jednake stranice.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

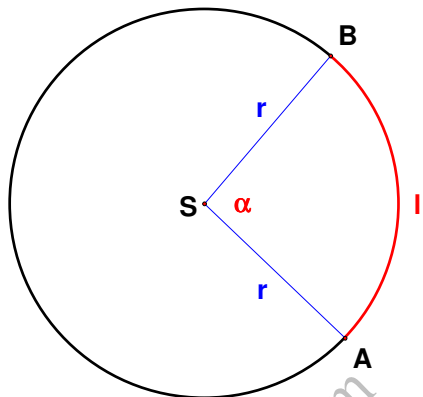
**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

**Visine** su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

**Težišnica** trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom  $r$ .



Ako je  $r$  polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od  $\alpha$  stupnjeva dana formulom

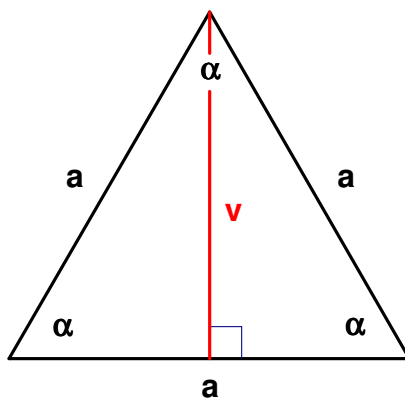
$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180} \alpha.$$

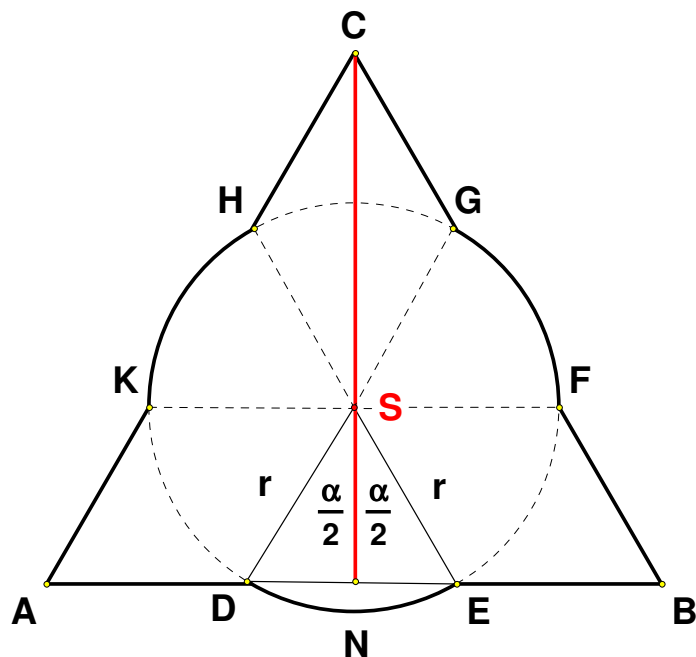
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Visina jednakokraničnog trokuta je:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$





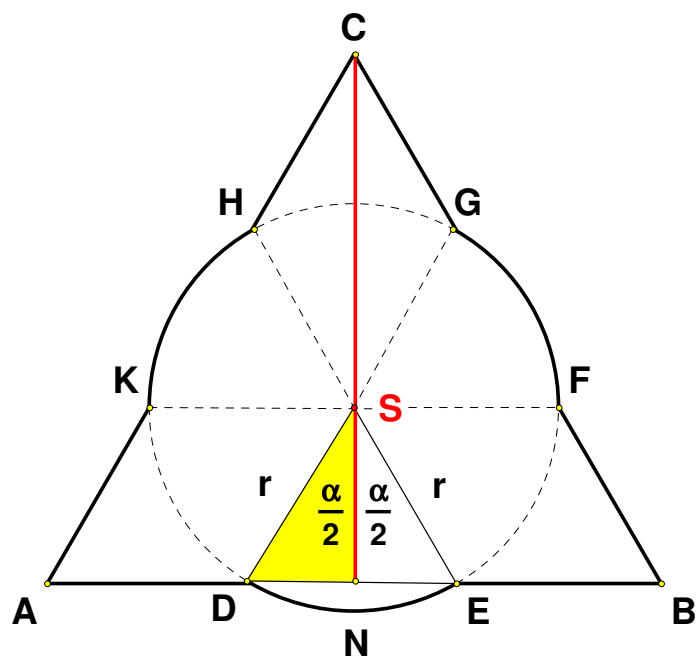
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a = 3, \quad |SD| = |SE| = r = 1, \quad \angle NSD = \angle ESN = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ESD = \alpha$$

Trokut ABC je jednakostraničan pa je  $\overline{CN}$  istodobno njegova težišnica, visina i simetrala kuta. Točka S je sjecište težišnica i visina pa vrijedi:

$$|SN| = \frac{1}{3} \cdot |CN| \Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow [a = 3] \Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow |SN| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Uočimo pravokutan trokut DNS i pomoću funkcije kosinus izračunamo kut  $\frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{|SN|}{|SD|} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \cdot 2 \Rightarrow \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je trokut SDE jednakokraničan pa je

$$|DE| = 1.$$

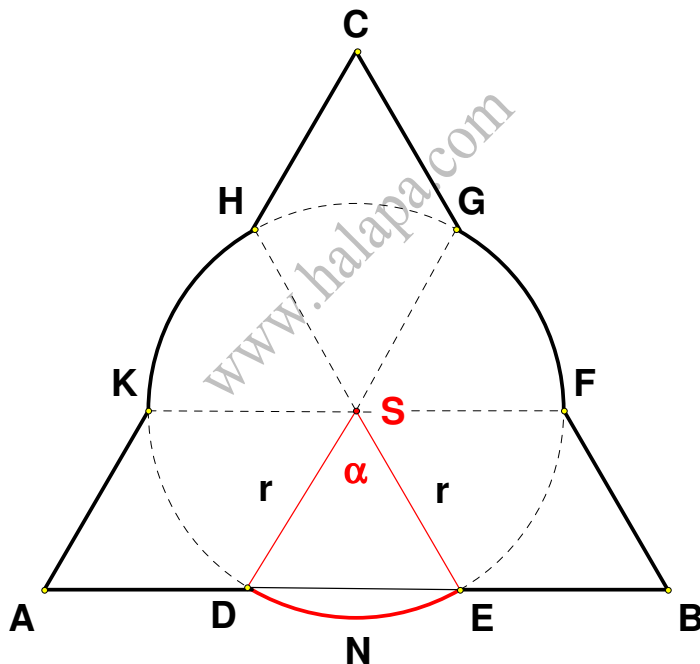
Analogno su i trokuti  $\triangle SFG$  i  $\triangle SHK$  jednakokranični i slijedi:

$$|FG| = |HK| = 1.$$

Zbog simetričnosti vrijedi:

$$|AD| = |EB| = |BF| = |GC| = |CH| = |KA| = 1.$$

Računamo duljinu luka  $\widehat{DE}$ .



$$\left| \widehat{DE} \right| = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} r = 1 \\ \alpha = 60^\circ \end{array} \right] \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{1 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \left| \widehat{DE} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

Također je

$$\left| \widehat{FG} \right| = \left| \widehat{HK} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

Opseg lika iznosi:

$$\begin{aligned} O &= |AD| + \left| \widehat{DE} \right| + |EB| + |BF| + \left| \widehat{FG} \right| + |GC| + |CH| + \left| \widehat{HK} \right| + |KA| \Rightarrow \\ &\Rightarrow O = 1 + \frac{\pi}{3} + 1 + 1 + \frac{\pi}{3} + 1 + 1 + \frac{\pi}{3} + 1 \Rightarrow O = 6 + 3 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow O = 6 + 3 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow O = 6 + \pi. \end{aligned}$$

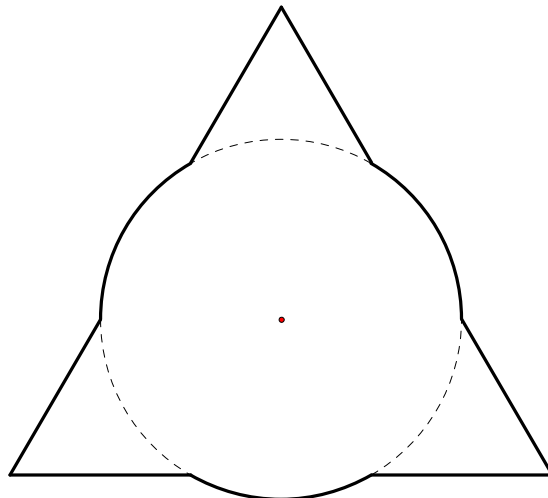
Odgovor je pod A.



### Vježba 103

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 6 und ein Kreis mit Radius 2 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groß ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?

- A.  $12 + 2 \cdot \pi$     B.  $6 + 4 \cdot \pi$     C.  $18 + \frac{\pi}{3}$     D.  $6 \cdot \pi$     E.  $9 + 2 \cdot \pi$

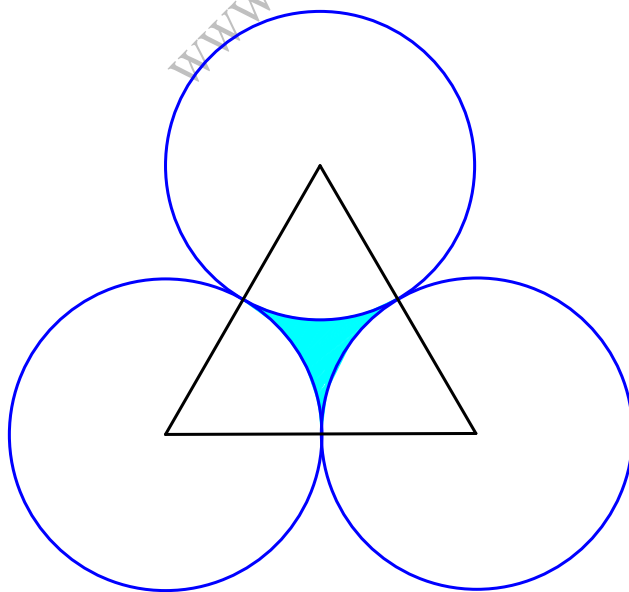


Jednakostraničan trokut duljine stranice 6 i kružnica polumjera 2 imaju zajedničko središte. Koliki je opseg lika omeđenog crnom linijom?

**Rezultat:** A.

### Zadatak 104 (Sonja, HAK)

Jeder von drei Kreisen mit Radius  $r$  berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom  $r$  dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

### Rješenje 104

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.

Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta  $\alpha = 60^\circ$  i tri jednake stranice.

Površina jednakostraničnog trokuta duljine stranice  $a$

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke  $S$  manja ili jednaka zadanom broju  $r > 0$  (polumjeru kruga).

Ako je  $r$  polumjer kruga, tada je površina kružnog isječka sa središnjim kutom od  $\alpha$  stupnjeva dana formulom

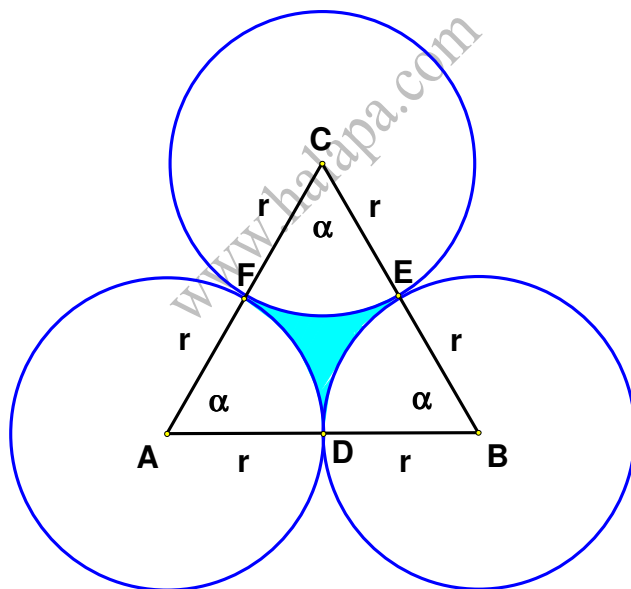
$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

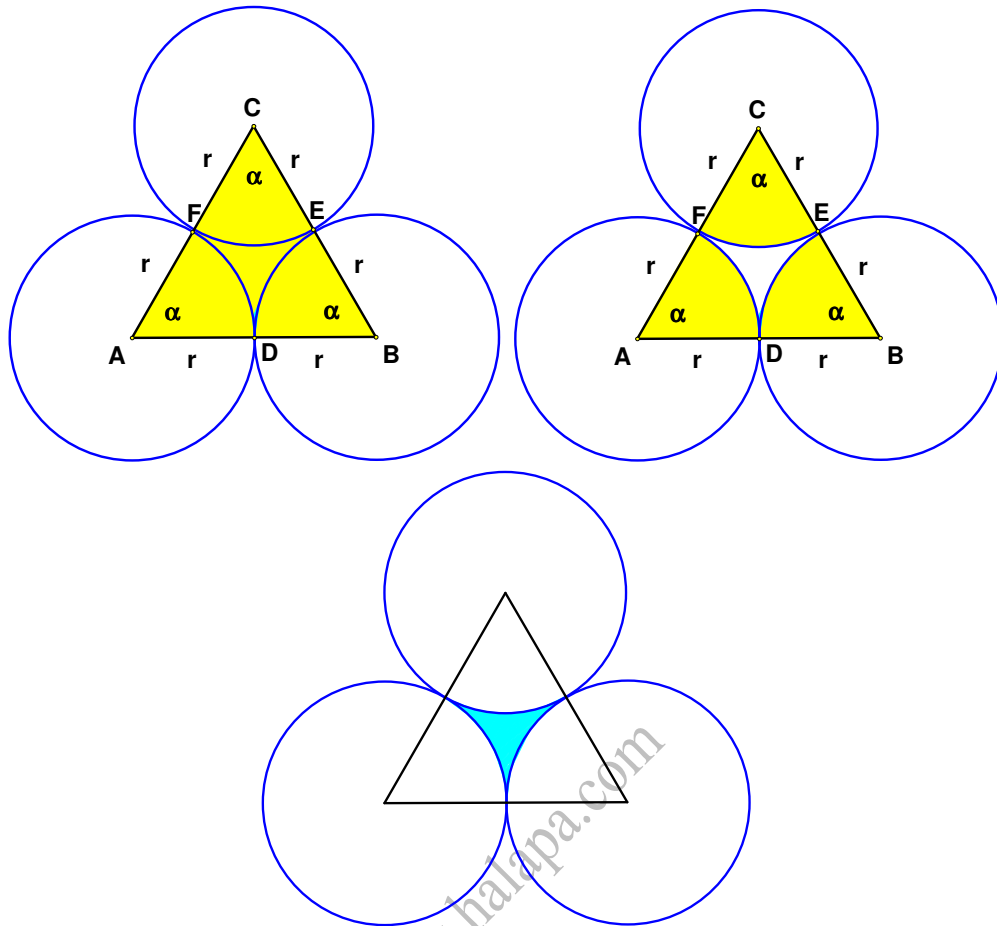
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r, \quad |AD| = |DB| = |BE| = |EC| = |CF| = |FA| = r$$

$$\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = \alpha = 60^\circ$$

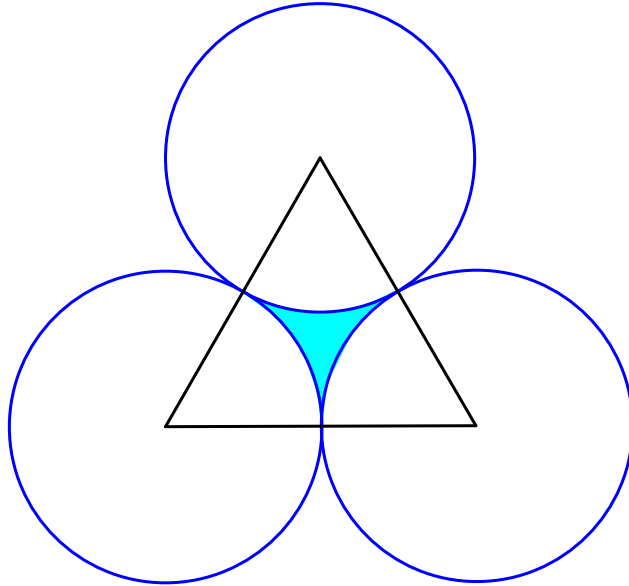


Površina osjenčanog dijela (plava boja među krugovima) jednaka je razlici površine jednakostraničnog trokuta i trostruke površine kružnog isječka (sva tri kružna isječka jednake su površine)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} \Rightarrow [\alpha = 60^\circ] \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3} - r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = \frac{r^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - \pi)}{2}.
 \end{aligned}$$

#### Vježba 104

Jeder von drei Kreisen mit Radius 1 berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



(Svaki od tri kruga sa polumjerom 1 dodiruje drugi krug. Kolika je obojena površina između krugova?)

**Rezultat:**  $P = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - \pi}{2}$ .

**Zadatak 105 (Marta, srednja škola)**

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 2 cm, tijekom 24 sata približno je jednak:

- A. 1.81 m      B. 18.1 m      C. 181 m      D. 1810 m

**Rješenje 105**

Ponovimo!

$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$  ,  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ .

Opseg kružnice polumjera r iznosi:

$O = 2 \cdot r \cdot \pi$ .

U jednoj minuti vrh sekundne kazaljke sata jednom prijede kružnicu. Za 24 sata on će obići kružnicu 1440 puta.

$n = 24 \cdot 60 = 1440$ .

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata tijekom 24 sata približno iznosi:

$$s = n \cdot O \Rightarrow s = n \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} n = 1440 \\ r = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m} \end{array} \right] \Rightarrow s = 1440 \cdot 2 \cdot 0.02 \text{ m} \cdot \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow s = 180.96 \text{ m} \Rightarrow s \approx 181 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.



**Vježba 105**

Put koji prijede vrh sekundne kazaljke sata, koja ima duljinu 20 mm, tijekom 24 sata približno je jednak:

- A. 1.81 m      B. 18.1 m      C. 181 m      D. 1810 m

**Rezultat:** C.

### Zadatak 106 (4B, TUPŠ)

Geografska širina Zagreba je  $45^{\circ} 45'$ . Kolika je udaljenost Zagreba od ekvatora? (polumjer Zemlje  $r = 6370$  km)

### Rješenje 106

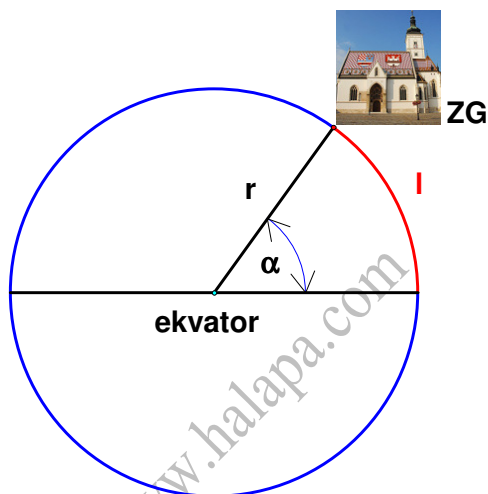
Ponovimo!

$$1^{\circ} = 60' \quad , \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} .$$

Formula za duljinu kružnog luka  $l$  koji je pridružen središnjem kutu  $\alpha$ , u krugu polumjera  $r$ , glasi:

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} .$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.



$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} r = 6370 \text{ km} \\ \alpha = 45^{\circ} 45' = 45^{\circ} + \left(\frac{45}{60}\right)^{\circ} = 45.75^{\circ} \end{array} \right] \Rightarrow l = \frac{6370 \text{ km} \cdot \pi \cdot 45.75^{\circ}}{180^{\circ}} \Rightarrow l = 5086.37 \text{ km} .$$

### Vježba 106

Pronađite geografsku širinu Vašeg mjesta. Kolika je njegova udaljenost od ekvatora? (polumjer Zemlje  $r = 6370$  km)

**Rezultat:** ?

### Zadatak 107 (4B, TUPŠ)

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produlji za 1 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

### Rješenje 107

Ponovimo!

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} .$$

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

Opseg kružnice polumjera  $r$  iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi .$$

Ekvator predstavlja zamišljenu liniju povučenu oko planeta (ili drugog nebeskog tijela) na jednakoj udaljenosti od polova.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je  $r$  polumjer Zemlje njezin opseg oko ekvatora je

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Povećamo li polumjer za  $x$ , opseg će se produžiti za  $d$ .

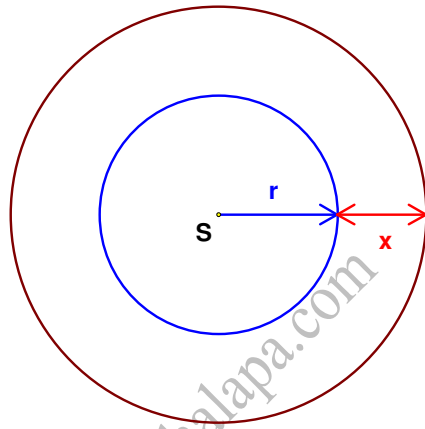
$$d + O = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi.$$

Slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ d + O = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot (r+x) \cdot \pi \Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow d = 2 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot \pi = d \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{d}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = \frac{100 \text{ cm}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow x = 15.92 \text{ cm}.$$



### Vježba 107

Ako se oko ekvatora postavi žica, a zatim ta žica produži za 0.5 m i podjednako udalji od Zemlje, kolika je udaljenost žice od Zemlje?

**Rezultat:** 7.96 cm.

### Zadatak 108 (Borna, gimnazija)

Zbroj polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 36 cm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 36 cm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Polumjer veće kružnice iznosi

- A. 18 cm      B. 19 cm      C. 20 cm      D. 22 cm

### Rješenje 108

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

**Koncentrične kružnice** su kružnice koje imaju isto središte.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.

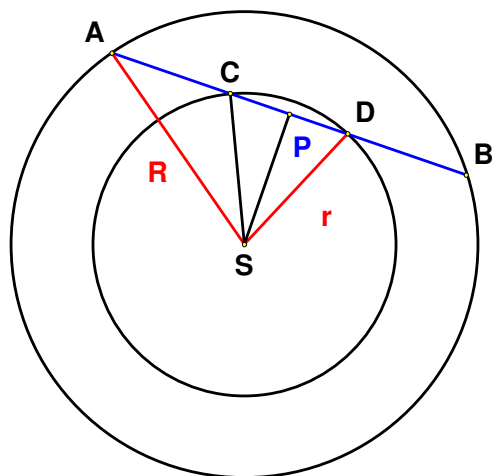
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

### Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, n \neq 0, n \neq 1.$$

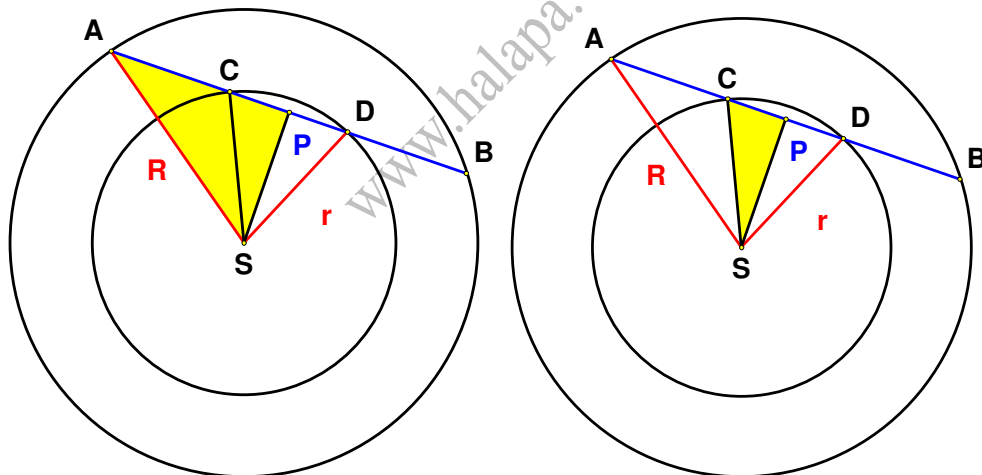


Sa slike vidi se:

$$|AB| = 36 \text{ cm}, |AC| = |CD| = |DB| = \frac{1}{3} \cdot |AB| = \frac{1}{3} \cdot 36 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$|CP| = |PD| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} = 6 \text{ cm}, |AP| = |AC| + |CP| = 12 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$|SA| = R, |SC| = |SD| = r$$



Uočimo pravokutne trokute čiji su vrhovi središte tetive, središte kružnica te točke na tetivi i kružnicama:  $\triangle SPA$  i  $\triangle SPC$ .

Dva put uporabimo Pitagorin poučak.

$$\left. \begin{aligned} |SP|^2 &= |SA|^2 - |AP|^2 \\ |SP|^2 &= |SC|^2 - |CP|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |SP|^2 &= R^2 - 18^2 \\ |SP|^2 &= r^2 - 6^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 18^2 = r^2 - 6^2 \Rightarrow R^2 - 324 = r^2 - 36 \Rightarrow R^2 - r^2 = -36 + 324 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = 288 \Rightarrow (R+r) \cdot (R-r) = 324 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{uvjet} \\ R+r=36 \end{array} \right] \Rightarrow 36 \cdot (R-r) = 288 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 \cdot (R-r) = 288 \quad /: 36 \Rightarrow R-r = 8.$$

Iz sustava jednačba izračunamo R.

$$\left. \begin{array}{l} R + r = 36 \\ R - r = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot R = 44 \Rightarrow 2 \cdot R = 44 / : 2 \Rightarrow R = 22 \text{ cm.}$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 108

Zbroj polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 3.6 dm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 3.6 dm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Polumjer veće kružnice iznosi

- A. 18 cm      B. 19 cm      C. 20 cm      D. 22 cm

**Rezultat:** D.

### Zadatak 109 (Katarina, maturantica)

Koliki je polumjer kružnice ako je nad njezinom tetivom duljine 10 cm obodni kut mjere  $15^\circ$ ?

### Rješenje 109

Ponovimo!

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

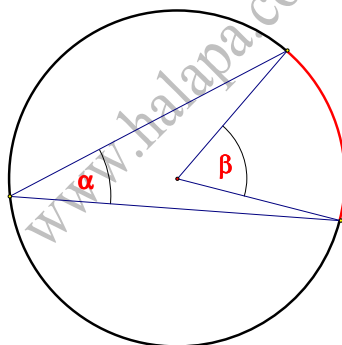
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

Dužina koja spaja dvije točke kružnice zove se tetiva. Okomica iz središta kružnice na tetivu dijeli je na dva jednaka dijela.

Kut kojem je vrh na kružnici, a čiji krakovi sijeku tu kružnicu naziva se obodni kut.

Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.

Središnji kut  $\beta$  nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu  $\alpha$  nad tim istim lukom.



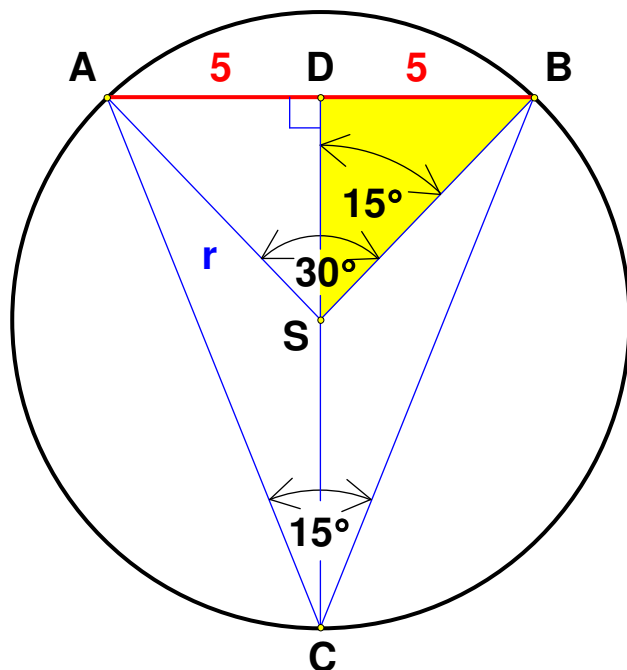
$$\beta = 2 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Sinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.





Sa slike vidi se:

$$|AB| = 10, \quad |AD| = |DB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5, \quad |SA| = |SB| = |SC| = r$$

$$\angle ACB = 15^\circ \text{ obodni kut}, \quad \angle ASB = 2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ \text{ središnji kut}$$

$$\angle DSB = \frac{1}{2} \cdot \angle ASB = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$$

Uočimo pravokutan trokut DSB i pomoću funkcije sinus dobije se:

$$\sin \angle DSB = \frac{|DB|}{|SB|} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{5}{r} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{5}{r} \quad / \cdot \frac{r}{\sin 15^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{5}{\sin 15^\circ} \Rightarrow r = 19.3185 \text{ cm.}$$

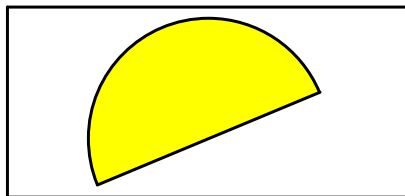
### Vježba 109

Koliki je polumjer kružnice ako je nad njezinom tetivom duljine 10 cm obodni kut mjere  $15^\circ$ ?

**Rezultat:** 19.3185 cm.

### Zadatak 110 (Katarina, maturantica)

Na skici je prikazan pravokutnik dimenzija 12.8 cm x 5 cm u koji je ucrtan polukrug. Površina osjenčanoga dijela pravokutnika jednaka je površini ucrtanoga polukruga. Koliki je polumjer polukruga?



- A. 2.5 cm      B. 3.19 cm      C. 4.51 cm      D. 6.4 cm

### Rješenje 110

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju  $r > 0$  (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera  $r$  iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od  $180^\circ$ .

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima  $90^\circ$ ).

Ploština pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine  $a$  i širine  $b$ .

$$P = a \cdot b.$$

Budući da je površina osjenčanoga dijela pravokutnika (bijela boja) jednaka površini ucrtanoga polukruga (žuta boja), površina polukruga jednaka je polovici površine pravokutnika.

$$\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{2}{\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{a \cdot b}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{a \cdot b}{\pi}} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 12.8 \text{ cm} \\ b = 5 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow r = \sqrt{\frac{12.8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{\pi}} \Rightarrow r = 4.51 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod C.

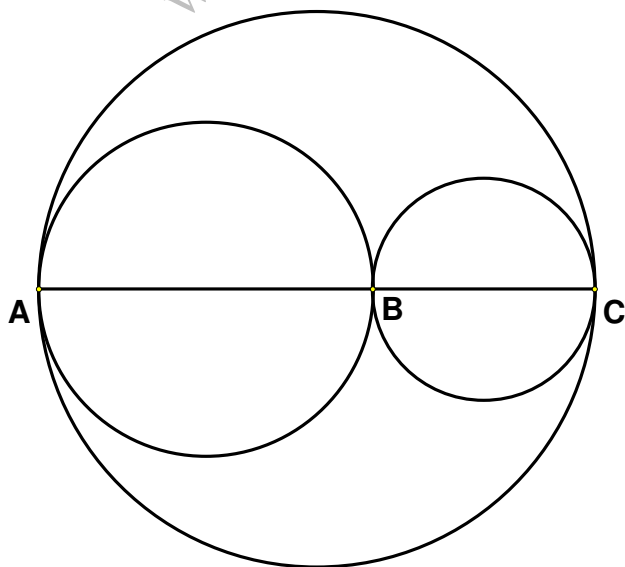
### Vježba 110

Odmor!

Rezultat: ...

### Zadatak 111 (Katarina, maturantica)

Na skici su prikazana tri kruga s promjerima  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$ . Duljina promjera  $\overline{AB}$  je 12 cm, a promjera  $\overline{BC}$  je 8 cm. Kolika je površina osjenčanoga dijela na skici?



A.  $18 \cdot \pi \text{ cm}^2$

B.  $20 \cdot \pi \text{ cm}^2$

C.  $34 \cdot \pi \text{ cm}^2$

D.  $48 \cdot \pi \text{ cm}^2$

### Rješenje 111

Ponovimo!

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom  $r$ .

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke  $S$  manja ili jednaka zadanom broju  $r > 0$  (polumjeru kruga).

Promjer kružnice:

$$d = 2 \cdot r.$$

**Ploština kruga** polumjera  $r$  iznosi:

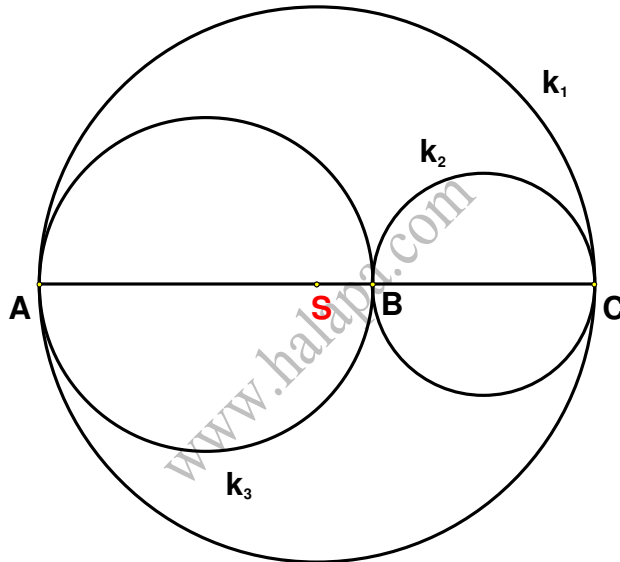
$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 12 \text{ cm} \quad , \quad |BC| = 8 \text{ cm} \quad , \quad |AC| = |AB| + |BC| = 12 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$|SA| = |SB| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

Određimo polumjere krugova:

- polumjer kruga  $k_1$

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 10 \text{ cm}$$

- polumjer kruga  $k_2$

$$r_2 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \Rightarrow r_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 4 \text{ cm}$$

- polumjer kruga  $k_3$

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow r_3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \Rightarrow r_3 = 6 \text{ cm}.$$

Površina osjenčanoga dijela jednaka je površini kruga  $k_1$  umanjena za površine krugova  $k_2$  i  $k_3$ .

$$\begin{aligned}
 P = P_1 - P_2 - P_3 &\Rightarrow P = r_1^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi \Rightarrow P = (r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) \cdot \pi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} r_1 = 10 \text{ cm} \\ r_2 = 4 \text{ cm} \\ r_3 = 6 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow P = ((10 \text{ cm})^2 - (4 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2) \cdot \pi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = (100 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2) \cdot \pi \Rightarrow P = 48 \cdot \pi \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 111

Odmor!

**Rezultat:** ...

www.halapa.com