Zadatak 061 (Nenad, gimnazija)

Iz točke P povučene su tangente na kružnicu. Dirališta su točke A i B. Tangenta na kružnicu položena u nekoj točki luka AB siječe dužine $\overline{PA}$, odnosno $\overline{PB}$ u točkama M i N. Ako je $|PA| = 10$ cm, opseg trokuta ΔMPN jednak je:

$A.\ 20\ cm \qquad B.\ 15\ cm \qquad C.\ 22\ cm \qquad D.\ 18\ cm$

Rješenje 061

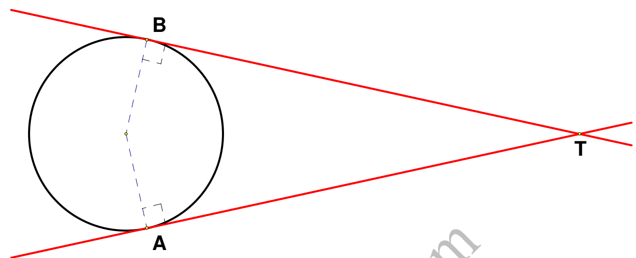
Ponovimo!

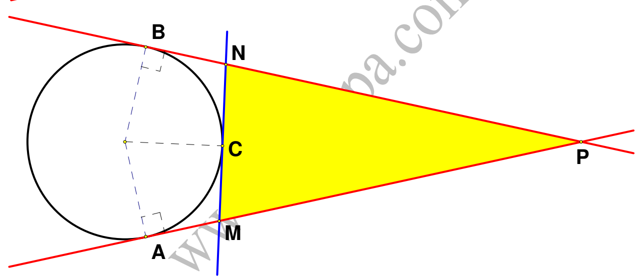
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha. Opseg trokuta je zbroj duljina svih stranica. Ako su duljine stranica trokuta a, b i c, opseg je jednak:

$$O = a + b + c.$$

Ako tangente povučene iz točke T izvan kružnice na tu kružnicu diraju kružnicu u točkama A i B, tada vrijedi

$$|TA| = |TB|.$$





Sa slike vidi se:

$$|AP| = |PB| = 10 \ , \ |AM| = |MC| \ , \ |CN| = |NB| \ , \ |NM| = |MC| + |CN|$$

$$|MP| = |AP| - |AM| \ , \ |PN| = |PB| - |NB|$$

Opseg trokuta △MPN iznosi:

$$O = |MP| + |PN| + |NM| \Rightarrow O = |AP| - |AM| + |PB| - |NB| + |MC| + |CN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} |AM| = |MC| \\ |NB| = |CN| \end{bmatrix} \Rightarrow O = |AP| - |MC| + |PB| - |CN| + |MC| + |CN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = |AP| - |MC| + |PB| - |CN| + |MC| + |CN| \Rightarrow O = |AP| + |PB| \Rightarrow O = 10 + 10 \Rightarrow O = 20.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 061

Iz točke P povučene su tangente na kružnicu. Dirališta su točke A i B. Tangenta na kružnicu položena u nekoj točki luka AB siječe dužine $\overline{PA}$, odnosno $\overline{PB}$ točkama M i N. Ako je $|PA| = 20$ cm, opseg trokuta ΔMPN jednak je:

$A.\ 28\ cm \qquad B.\ 40\ cm \qquad C.\ 35\ cm \qquad D.\ 38\ cm$

Rezultat: B.

Zadatak 062 (Josip, srednja škola)

Izračunaj ploštinu kružnog isječka kojemu odgovarajući luk ima duljinu 4 · π. Polumjer kruga je 4.

Rješenje 062

Ponovimo!

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha,$$

a ploština kružnog isječka s istim središnjim kutom α dana je s

$$P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha.$$

Najprije izračunamo središnji kut α iz formule za duljinu luka.

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha\;\Rightarrow\; l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha\;/\cdot\frac{180^{0}}{r\cdot\pi}\;\Rightarrow\;\alpha=\frac{l(\alpha)\cdot180^{0}}{r\cdot\pi}\;\Rightarrow\;\alpha=\frac{4\cdot\pi\cdot180^{0}}{4\cdot\pi}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\alpha=\frac{4\cdot\pi\cdot180^{0}}{4\cdot\pi}\;\Rightarrow\;\alpha=180^{0}.$$

Ploština kružnog isječka iznosi:

$$P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha\;\Rightarrow\;P(\alpha)=\frac{4^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot180^{0}\;\Rightarrow\;P(\alpha)=\frac{16\cdot\pi}{360^{0}}\cdot180^{0}\;\Rightarrow\;P(\alpha)=\frac{16\cdot\pi}{360^{0}}\cdot180^{0}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;P(\alpha)=\frac{16\cdot\pi}{2}\;\Rightarrow\;P(\alpha)=8\cdot\pi.$$

Vježba 062

Izračunaj ploštinu kružnog isječka kojemu odgovarajući luk ima duljinu 4 · π. Polumjer kruga je 2.

Rezultat: 2 · π.

Zadatak 063 (Ante, gimnazija)

Oko vrhova na hipotenuzi jednakokračnog pravokutnog trokuta opisane su dvije jednake kružnice koje se međusobno diraju. Oko vrha pravog kuta opisana je kružnica koja dira prve dvije izvana. Kolika je ploština krivocrtnog trokuta između ovih triju kružnica, ako je duljina hipotenuze jednaka $2\cdot\sqrt{2}\ dm$.

Rješenje 063

Ponovimo!

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha,$$

a ploština kružnog isječka s istim središnjim kutom α dana je s

$$P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

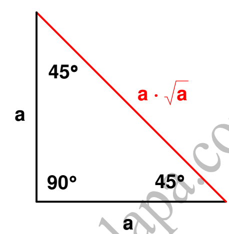
Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º) i vrijedi:

$$\gamma=90^{0} \quad , \quad \alpha+\beta=90^{0}.$$

Trokut kojemu je jedan kut pravi zove se pravokutan. Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza.
Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.

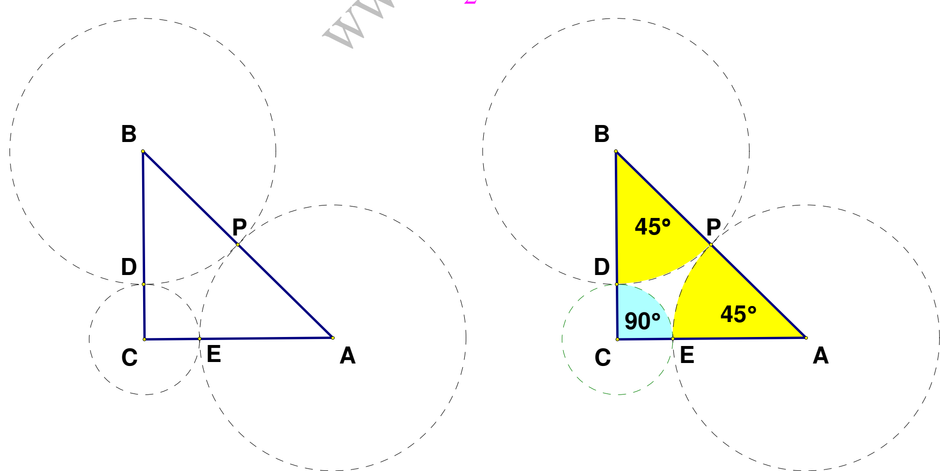
$$\begin{cases} a=b \;\Rightarrow\; \alpha=\beta \\ a=c \;\Rightarrow\; \alpha=\gamma \\ b=c \;\Rightarrow\; \beta=\gamma \\ a=b=c \;\Rightarrow\; \alpha=\beta=\gamma. \end{cases}$$

Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.



Ploština pravokutnog jednakokračnog trokuta duljine stranice a dana je formulom

$$P=\frac{1}{2}\cdot a^{2}.$$



Sa slika vidi se:

$$|AB|=2\cdot\sqrt{2} \quad , \quad |CA|=|CB|=2 \quad , \quad |AE|=|AP|=\frac{1}{2}\cdot|AB|=\sqrt{2}$$

$$|BD|=|BP|=\frac{1}{2}\cdot|AB|=\sqrt{2} \quad , \quad |CD|=|CE|=|CA|-|AE|=2-\sqrt{2}$$

$$\angle BCA=90^{0} \quad , \quad \angle CAB=\angle ABC=45^{0}$$

Računamo ploštinu jednakokračnog pravokutnog trokuta ΔABC.

- $$\left.\begin{aligned} &a = |CA| = |CB| = 2 \\ &P_\Delta = \frac{1}{2}\cdot a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \Rightarrow P_\Delta = 2\ dm^2.$$

Računamo ploštine kružnih isječaka.

- kružni isječak DCE

$$\left.\begin{aligned} &r = |CE| = 2-\sqrt{2}\ ,\ \alpha = 90^0 \\ &P_1(\alpha) = \frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1(\alpha) = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 90^0 \Rightarrow P_1(\alpha) = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 90^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1(\alpha) = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{4}\ dm^2.$$

- kružni isječak EAP

$$\left.\begin{aligned} &r = |AP| = \sqrt{2}\ ,\ \alpha = 45^0 \\ &P_2(\alpha) = \frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_2(\alpha) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 45^0 \Rightarrow P_2(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{360^0}\cdot 45^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{8} \Rightarrow P_2(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{8} \Rightarrow P_2(\alpha) = \frac{\pi}{4}\ dm^2.$$

- kružni isječak PBD

$$\left.\begin{aligned} &r = |BP| = \sqrt{2}\ ,\ \alpha = 45^0 \\ &P_3(\alpha) = \frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_3(\alpha) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 45^0 \Rightarrow P_3(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{360^0}\cdot 45^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{8} \Rightarrow P_3(\alpha) = \frac{2\cdot\pi}{8} \Rightarrow P_3(\alpha) = \frac{\pi}{4}\ dm^2.$$

Ploština krivocrtnog trokuta između ovih triju kružnica jednaka razlici ploštine pravokutnog jednakokračnog trokuta i zbroja ploština kružnih isječaka. Dakle, rješenje je ploština trokuta umanjena za ploštine kružnih isječaka.

$$P = P_\Delta - \left(P_1(\alpha)+P_2(\alpha)+P_3(\alpha)\right) \Rightarrow P = 2-\left(\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2-\left(\frac{\left(4-4\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\cdot\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow P = 2-\left(\frac{\left(4-4\cdot\sqrt{2}+2\right)\cdot\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2-\frac{\left(4-4\cdot\sqrt{2}+2\right)\cdot\pi+\pi+\pi}{4} \Rightarrow P = 2-\frac{\left(4-4\cdot\sqrt{2}+2\right)\cdot\pi+2\cdot\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2-\frac{\pi\cdot\left(4-4\cdot\sqrt{2}+2+2\right)}{4} \Rightarrow P = 2-\frac{\pi\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{2}\right)}{4} \Rightarrow P = 2-\frac{\pi\cdot 4\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=2-\frac{\pi\cdot 4\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}\ \Rightarrow\ P=2-\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ P=\left(2-\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi\right)\ dm^2.$$

Vježba 063

Oko vrhova na hipotenuzi jednakokračnog pravokutnog trokuta opisane su dvije jednake kružnice koje se međusobno diraju. Oko vrha pravog kuta opisana je kružnica koja dira prve dvije izvana. Koliki je opseg krivocrtnog trokuta između ovih triju kružnica, ako je duljina hipotenuze jednaka $2\cdot\sqrt{2}\ dm$.

Rezultat:

$$l=l_1(\alpha)+l_2(\alpha)+l_3(\alpha)\ \Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{180^0}\cdot 90^0+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{180^0}\cdot 45^0+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{180^0}\cdot 45^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{180^0}\cdot 90^0+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{180^0}\cdot 45^0+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{180^0}\cdot 45^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\ \Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\ \Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi+\sqrt{2}\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l=\frac{\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=\frac{2\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=\frac{2\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ l=\pi\ dm.$$

Zadatak 064 (M – K – N, gimnazija)

Ploština kružnog vijenca jednaka je četvrtini ploštine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

$A.\ \sqrt{5}:2\qquad B.\ 4:1\qquad C.\ 5:2\qquad D.\ 3:1$

Rješenje 064

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad,\quad\frac{a}{b}=a:b.$$

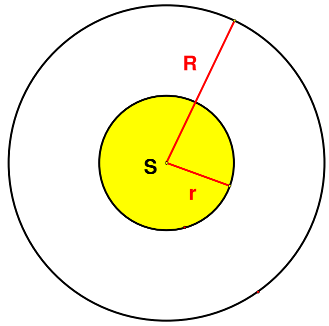
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.
Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.



Neka su r i R polumjeri manjeg i većeg kruga. Budući da je ploština kružnog vijenca jednaka četvrtini ploštine manjeg kruga, slijedi:

$$\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow \left(R^2-r^2\right)\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{\pi} \Rightarrow R^2-r^2=\frac{1}{4}\cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{1}{4}\cdot r^2+r^2 \Rightarrow R^2=\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{1} \Rightarrow R^2=\frac{r^2+4\cdot r^2}{4} \Rightarrow R^2=\frac{5\cdot r^2}{4} \Rightarrow R^2=\frac{5}{4}\cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{5}{4}\cdot r^2 \;/\cdot\frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{R^2}{r^2}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{5}{4} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \frac{R}{r}=\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R:r=\sqrt{5}:2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 064

Ploština kružnog vijenca jednaka je polovici ploštine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

$A.\ \sqrt{5}:\sqrt{2}$ $\quad B.\ \sqrt{3}:\sqrt{2}$ $\quad C.\ \sqrt{3}:2$ $\quad D.\ 3:\sqrt{2}$

Rezultat: B.

Zadatak 065 (Anamarija, srednja škola)

Ploština kružnog vijenca širine 6 cm je $120\cdot\pi$ cm^2. Koliki su polumjeri krugova koji tvore taj kružni vijenac?

Rješenje 065

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

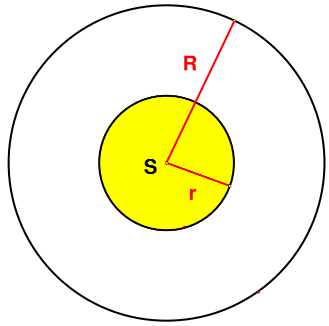
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.
Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.



Neka je r polumjer manjeg, a R polumjer većeg kruga. Tada je:

$$R = r + 6.$$

Budući da je zadana ploština kružnog vijenca, vrijedi:

$$\left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = 120 \cdot \pi \Rightarrow \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = 120 \cdot \pi \;/ : \pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r+6)^2 - r^2 = 120 \Rightarrow r^2 + 12 \cdot r + 36 - r^2 = 120 \Rightarrow r^2 + 12 \cdot r + 36 - r^2 = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot r + 36 = 120 \Rightarrow 12 \cdot r = 120 - 36 \Rightarrow 12 \cdot r = 84 \Rightarrow 12 \cdot r = 84 \;/ : 12 \Rightarrow r = 7.$$

Polumjer manjeg kruga je r = 7 cm, a polumjer većeg kruga iznosi:

$$R = r + 6 = 7 + 6 = 13 \ cm.$$

Vježba 065

Ploština kružnog vijenca širine 2 cm je 36 · π cm^2. Koliki su polumjeri kružnica koje tvore taj kružni vijenac?

Rezultat: 8 cm, 10 cm.

Zadatak 066 (Zvone, srednja škola)

Za koliko postotaka treba povećati polumjer kruga r = 5 cm da bi se njegova ploština povećala za 224%?

$A.\ 80\%$ $\quad B.\ 100\%$ $\quad C.\ 120\%$ $\quad D.\ 140\%$

Rješenje 066

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.
Na primjer,

$$9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547\ \% = \frac{547}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$$

Kod postotnog računa susrećemo sljedeće veličine:

- S – osnovna vrijednost
- p – postotak
- P – postotni iznos.

Osnovna veličina S je broj od kojeg se obračunava postotak. Postotni račun od 100 napisan u obliku razmjera glasi:

$$S : 100 = P : p \Rightarrow S \cdot p = 100 \cdot P.$$

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100}\cdot x.$$

Kako zapisati da je broj x povećan za p%?

$$x+\frac{p}{100}\cdot x=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x.$$

Neka je R veći polumjer kruga, P_1 ploština kruga polumjera r, a P_2 ploština kruga polumjera R. Tada vrijedi:

$$P_2=P_1+224\%\cdot P_1 \Rightarrow P_2=P_1+\frac{224}{100}\cdot P_1 \Rightarrow P_2=P_1+2.24\cdot P_1 \Rightarrow P_2=3.24\cdot P_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2\cdot\pi=3.24\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow R^2\cdot\pi=3.24\cdot r^2\cdot\pi \;/:\pi \Rightarrow R^2=3.24\cdot r^2 \Rightarrow R^2=3.24\cdot 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2=3.24\cdot 25 \Rightarrow R^2=81 \Rightarrow R^2=81 \;/\sqrt{} \Rightarrow R=\sqrt{81} \Rightarrow R=9.$$

Polumjer manjeg kruga je r = 5 cm, a većeg R = 9 cm. Postotak povećanja polumjera iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} S=5 \\ P=9-5=4 \\ p=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100\cdot P=S\cdot p \\ p=\dfrac{100\cdot P}{S} \end{bmatrix} \Rightarrow p=\frac{100\cdot 4}{5} \Rightarrow p=80.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 066

Za koliko postotaka treba povećati polumjer kruga r = 0.5 dm da bi se njegova ploština povećala za 224%?

$A.\ 80\%$ $B.\ 100\%$ $C.\ 120\%$ $D.\ 140\%$

Rezultat: A.

Zadatak 067 (Jelena, srednja škola)

Zadan je trokut ABC. Mjera kuta u vrhu A je 46°, a kuta u vrhu C je 60°. Simetrala kuta u vrhu C siječe trokutu opisanu kružnicu u točkama C i D. Kolika je mjera kuta $\angle CBD$?

$A.\ 104^0$ $B.\ 120^0$ $C.\ 134^0$ $D.\ 150^0$

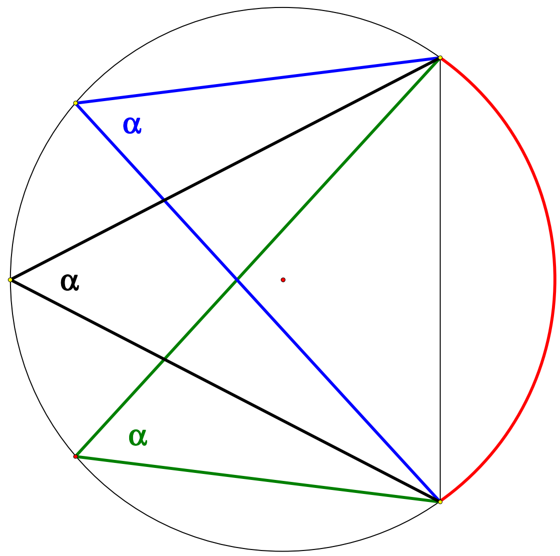
Rješenje 067

Ponovimo!

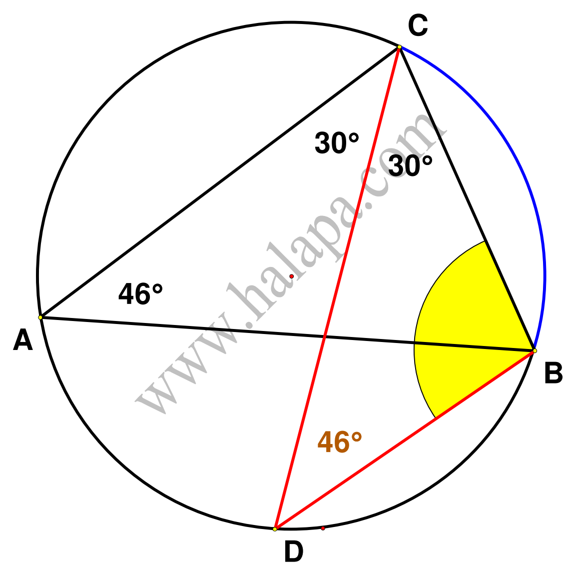
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Kut kojem je vrh na kružnici, a čiji krakovi sijeku tu kružnicu naziva se obodni kut.
Svi su obodni kutovi nad danim lukom kružnice sukladni.



Računamo mjeru kuta $\angle CBD$.



Simetrala kuta u vrhu C raspolavlja taj kut pa je:

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 60^0 = 30^0.$$

Budući da su obodni kutovi nad istim lukom kružnice međusobno jednaki, za luk $\widehat{BC}$ vrijedi:

$$\angle CDB = \angle CAB = 46^0.$$

Uočimo trokut CDB i izračunamo traženi kut.

$$\angle BCD + \angle CDB + \angle CBD = 180^0 \Rightarrow 30^0 + 46^0 + \angle CBD = 180^0 \Rightarrow 76^0 + \angle CBD = 180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CBD = 180^0 - 76^0 \Rightarrow \angle CBD = 104^0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 067

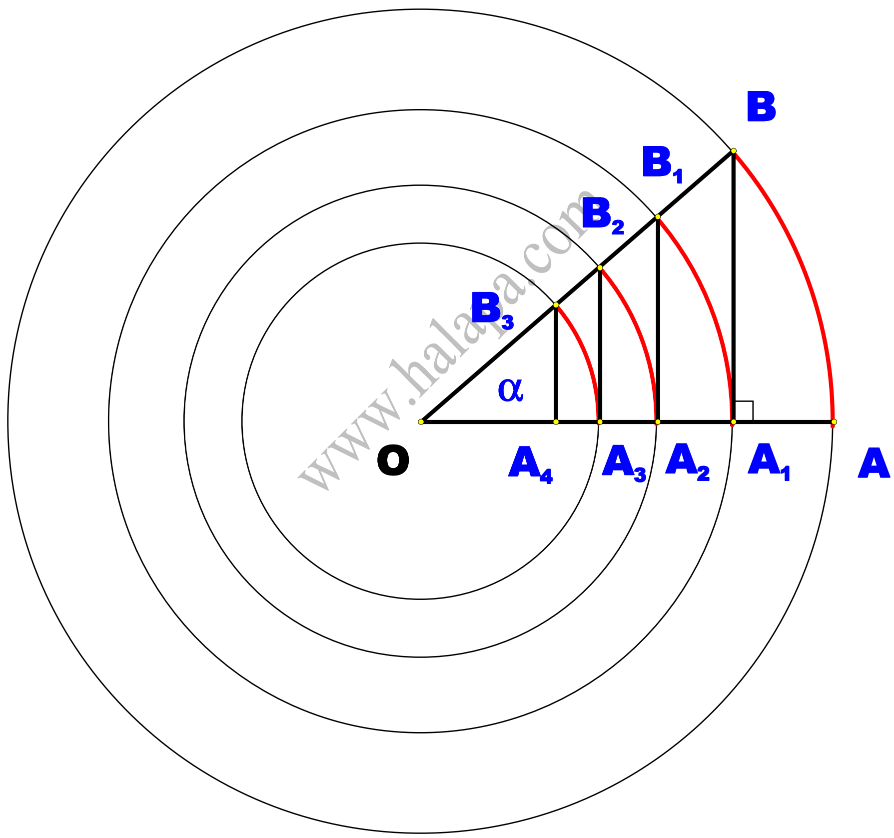
Zadan je trokut ABC. Mjera kuta u vrhu A je 36°, a kuta u vrhu C je 60°. Simetrala kuta u vrhu C siječe trokutu opisanu kružnicu u točkama C i D. Kolika je mjera kuta $\angle CBD$?

$$A.\ 136^0 \qquad B.\ 114^0 \qquad C.\ 124^0 \qquad D.\ 120^0$$

Rezultat: B.

Zadatak 068 (TP, gimnazija)

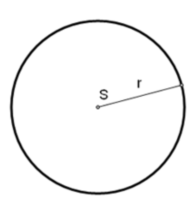
Na slici je prikazan niz koncentričnih kružnica sa središtem u točki O. α je mjera kuta $\angle AOB$ izražena u stupnjevima, a $|OA| = 10$ cm. Na polumjeru $\overline{OA}$ leži niz točaka A_1, A_2, A_3, …, a na polumjeru $\overline{OB}$ niz točaka B_1, B_2, B_3, …. Točka A_1 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B na taj polumjer. Točka A_2 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B_1 na taj polumjer itd. Zbroj duljina svih kružnih lukova $\left|\overset{\frown}{AB}\right| + \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| + \left|\overset{\frown}{A_2B_2}\right| + \left|\overset{\frown}{A_3B_3}\right| + \left|\overset{\frown}{A_4B_4}\right| + \ldots$ jednak je $\frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18}\ cm.$ Odredite α.

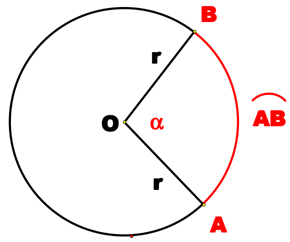


Rješenje 068

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.





Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Trokut kojemu je jedan kut pravi zove se pravokutan. Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Geometrijski red

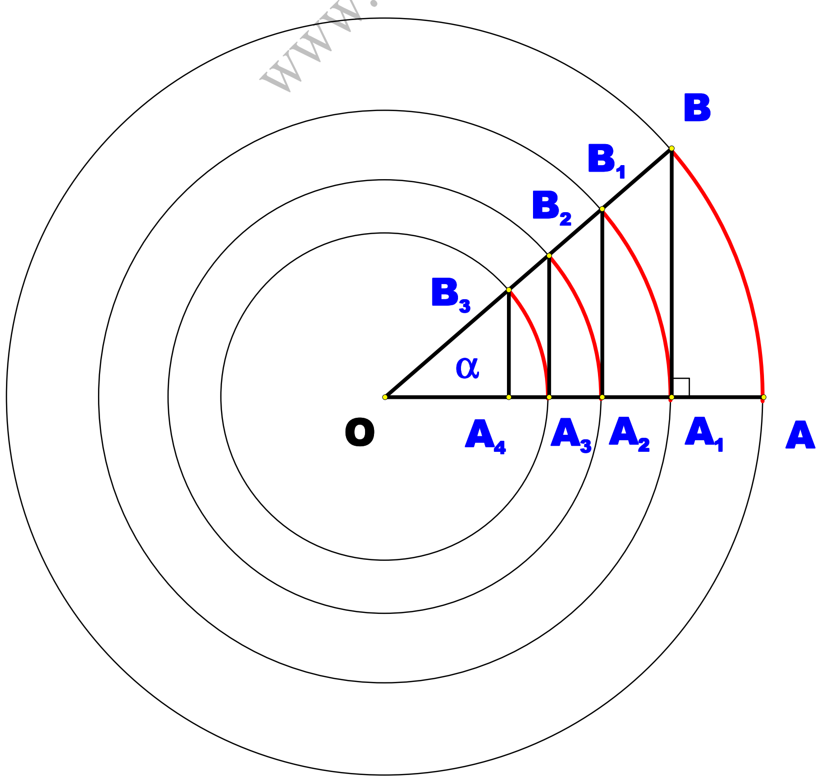
$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ldots+a_1\cdot q^n+\ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$



Sa slike vidi se:

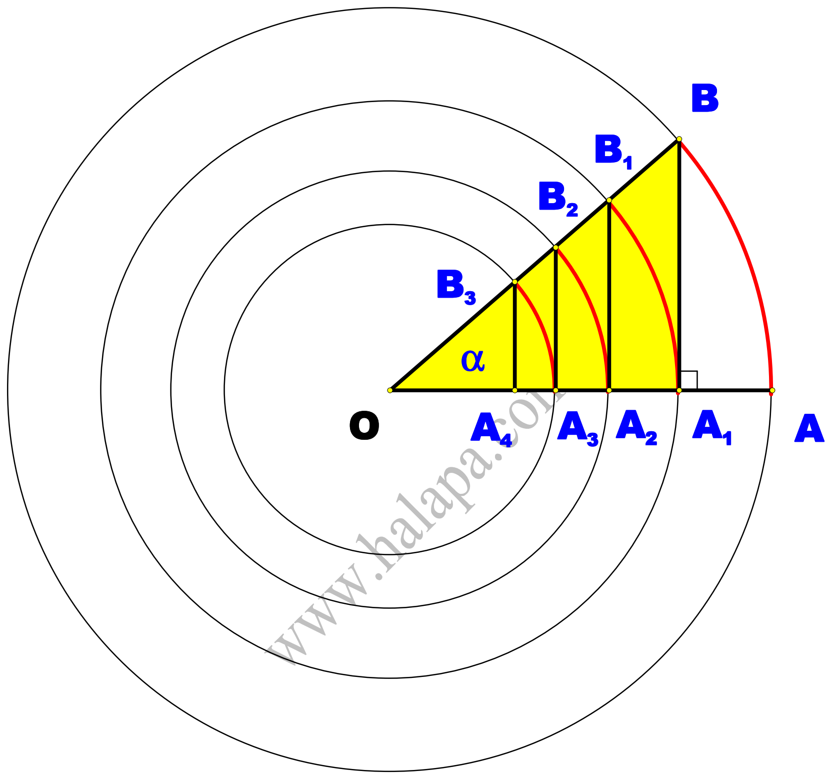
$$|OA| = |OB| = 10\ cm\ ,\ |OA_1| = |OB_1|\ ,\ |OA_2| = |OB_2|\ ,\ |OA_3| = |OB_3|\ ,\ ...\ ,\ |OA_n| = |OB_n|\ ,\ ...$$

$$\alpha = \angle AOB = \angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2 = \angle A_3OB_3 = ... = \angle A_nOB_n = ...$$

- Računamo duljinu kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$.

$$\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{|OA| \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{\pi \cdot \alpha}{18}.$$

- Računamo duljinu kružnog luka $\overset{\frown}{A_1B_1}$.



Uočimo pravokutan trokut OA_1B čija je jedna kateta $\overline{OA_1}$, a hipotenuza $\overline{OB}$. Pomoću funkcije kosinus dobije se:

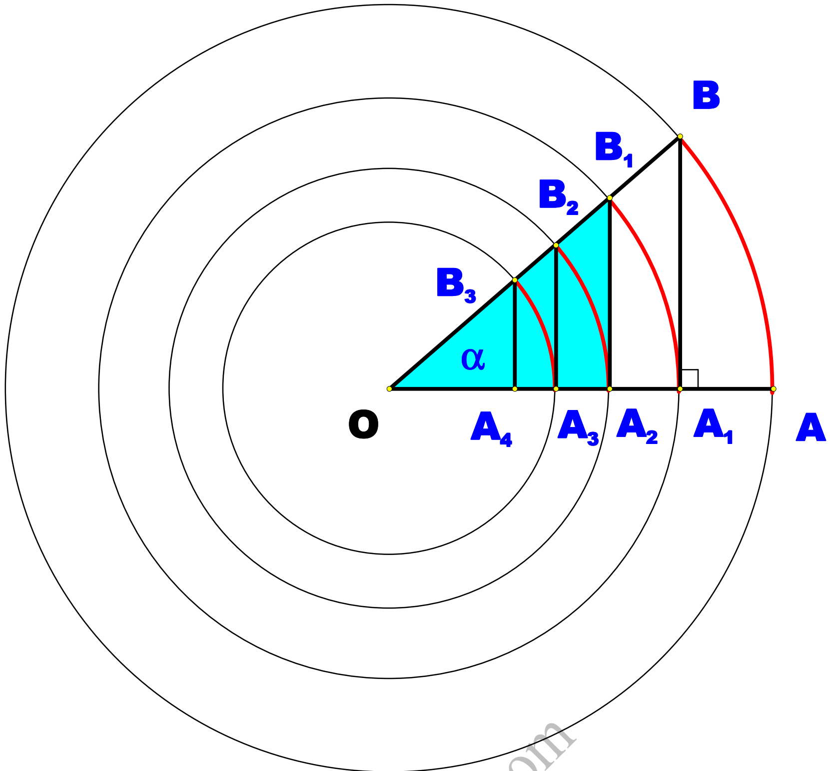
$$\cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OB|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OB|}\ / \cdot |OB| \Rightarrow |OA_1| = |OB| \cdot \cos\alpha \Rightarrow |OA_1| = 10 \cdot \cos\alpha.$$

Tada duljina kružnog luka $\overset{\frown}{A_1B_1}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| = \dfrac{|OA_1| \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \\ |OA_1| = 10 \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| = \frac{10 \cdot \cos\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| = \frac{10 \cdot \cos\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18}.$$

- Računamo duljinu kružnog luka $\overset{\frown}{A_2B_2}$.



Uočimo pravokutan trokut OA_2B_1 čija je jedna kateta $\overline{OA_2}$, a hipotenuza $\overline{OB_1}$. Pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} \; / \cdot |OB_1| \Rightarrow |OA_2| = |OB_1| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[|OB_1| = |OA_1| = 10 \cdot \cos\alpha \right] \Rightarrow |OA_2| = 10 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow |OA_2| = 10 \cdot \cos^2\alpha.$$

Tada duljina kružnog luka $\overset{\frown}{A_2B_2}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} |\overset{\frown}{A_2B_2}| = \dfrac{|OA_2| \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \\ |OA_2| = 10 \cdot \cos^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow |\overset{\frown}{A_2B_2}| = \frac{10 \cdot \cos^2\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overset{\frown}{A_2B_2}| = \frac{10 \cdot \cos^2\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow |\overset{\frown}{A_2B_2}| = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18}.$$

Analognim zaključivanjem slijedi:

$$|\overset{\frown}{A_3B_3}| = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} \quad , \quad |\overset{\frown}{A_4B_4}| = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^4\alpha}{18} \text{ itd.}$$

Budući da je zbroj duljina svih kružnih lukova jednak $\frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18}$, vrijedi jednadžba:

$$|\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{A_1B_1}| + |\overset{\frown}{A_2B_2}| + |\overset{\frown}{A_3B_3}| + |\overset{\frown}{A_4B_4}| + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^4\alpha}{18} + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^4\alpha}{18} + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \;/\cdot \frac{18}{\pi \cdot \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots = 5.$$

Uočimo da je na lijevoj strani jednadžbe beskonačan geometrijski red

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots$$

čiji je količnik

$$q = \cos\alpha .$$

Budući da je

$$\left|\cos\alpha\right| < 1$$

red je konvergentan i njegova suma iznosi:

$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots = \frac{1}{1 - \cos\alpha}.$$

Sada računamo kut α.

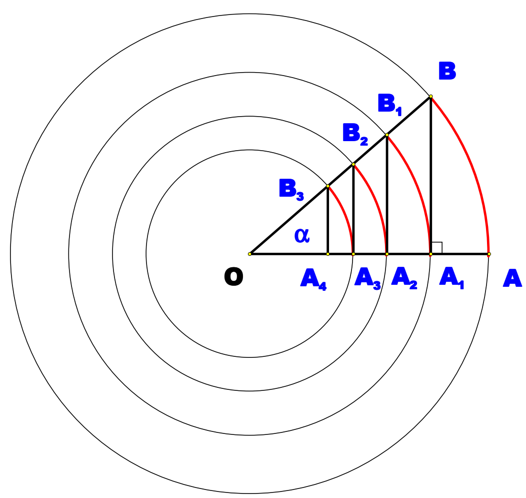
$$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots = 5 \Rightarrow \frac{1}{1-\cos\alpha} = 5 \Rightarrow \frac{1}{1-\cos\alpha} = 5 \;/\cdot (1-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 5 \cdot (1 - \cos\alpha) \Rightarrow 1 = 5 - 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 5 - 1 \Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 4 \;/ : 5 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \alpha = 36^0 52'12''.$$

Vježba 068

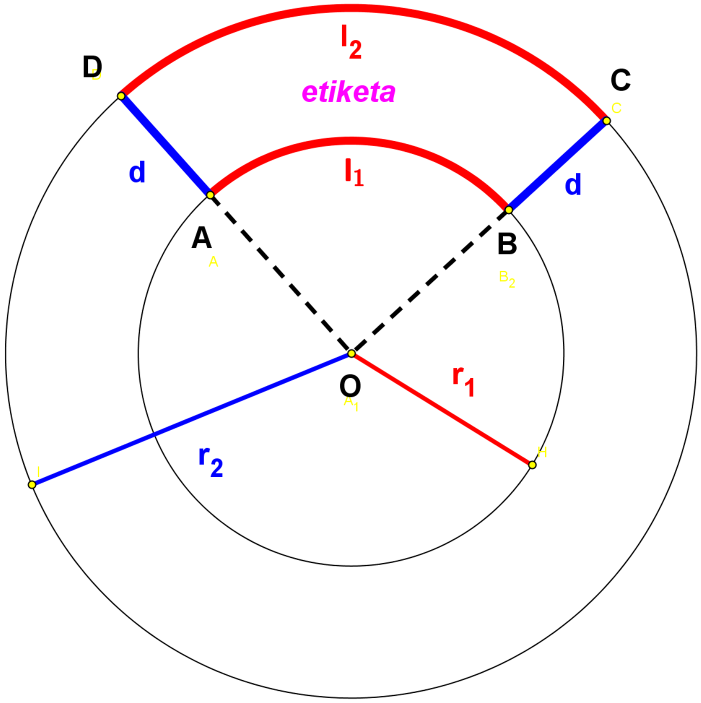
Na slici je prikazan niz koncentričnih kružnica sa središtem u točki O. α je mjera kuta $\angle AOB$ izražena u stupnjevima, a $|OA| = 10$ cm. Na polumjeru $\overline{OA}$ leži niz točaka A_1, A_2, A_3, …, a na polumjeru $\overline{OB}$ niz točaka B_1, B_2, B_3, …. Točka A_1 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B na taj polumjer. Točka A_2 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B_1 na taj polumjer itd. Zbroj duljina svih kružnih lukova $\left|\overset{\frown}{AB}\right| + \left|\overset{\frown}{A_1B_1}\right| + \left|\overset{\frown}{A_2B_2}\right| + \left|\overset{\frown}{A_3B_3}\right| + \left|\overset{\frown}{A_4B_4}\right| + \ldots$ jednak je $\frac{\pi \cdot \alpha}{9}$ *cm.* Odredite α.



Rezultat: 60°.

Zadatak 069 (TP, gimnazija)

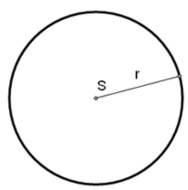
Etikete za omatanje mliječnih proizvoda izrezane su iz recikliranog kartona oblika kružnog vijenca. Dimenzije jedne etikete su l_1 = 14.6 cm, l_2 = 21.6 cm, d = 9.3 cm. Koliko kvadratnih centimetara kartona je ostalo nakon što je iz kružnog vijenca izrezan maksimalni broj etiketa?



Rješenje 069

Ponovimo!

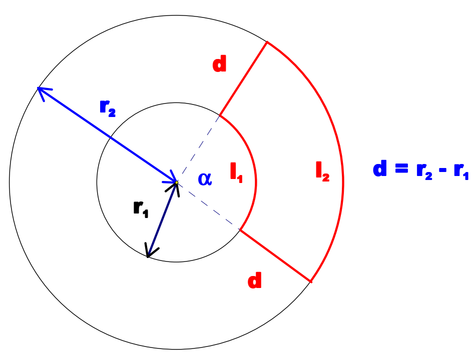
Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.



Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga). Opseg kružnice i kruga polumjera r:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi .$$

Kružni vijenac je dio ravnine omeđen kružnicama koje imaju zajedničko središte (koncentrične kružnice).

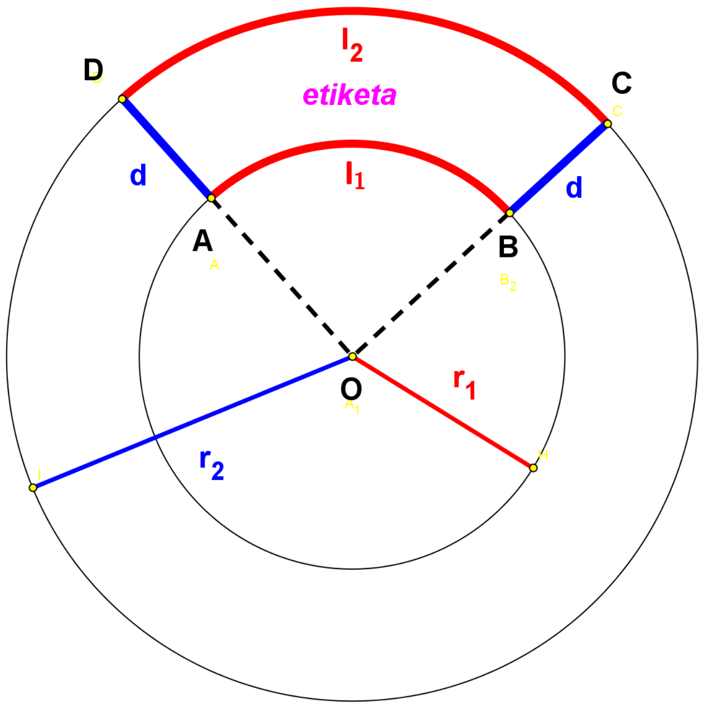


Površina isječka kružnog vijenca računa se formulama

$$P = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot d \quad , \quad P = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot (r_2 - r_1),$$

gdje su l_1 i l_2 pripadni kružni lukovi, d širina kružnog vijenca, r_1 i r_2 polumjeri manjeg i većeg kruga. Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$



Sa slike vidi se:

$$d = r_2 - r_1$$

Etiketa (geometrijski lik ABCD), izrezana iz kartona oblika kružnog vijenca, ima oblik isječka kružnog vijenca pa njezina površina iznosi:

$$P_e = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot (r_2 - r_1) \Rightarrow P_e = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot d \Rightarrow P_e = \frac{21.6\ cm + 14.6\ cm}{2} \cdot 9.3\ cm \Rightarrow P = 168.33\ cm^2.$$

Moramo odrediti maksimalni broj N etiketa koje se mogu isjeći iz kartona oblika kružnog vijenca.

- Za vanjsku kružnicu čiji je opseg

$$2 \cdot r_2 \cdot \pi$$

vrijedi

$$2 \cdot r_2 \cdot \pi = N \cdot l_2.$$

- Za unutarnju kružnicu čiji je opseg

$$2 \cdot r_1 \cdot \pi$$

vrijedi

$$2 \cdot r_1 \cdot \pi = N \cdot l_1.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo N.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot r_2 \cdot \pi = N \cdot l_2 \\ 2 \cdot r_1 \cdot \pi = N \cdot l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot r_2 \cdot \pi = N \cdot l_2 \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \\ 2 \cdot r_1 \cdot \pi = N \cdot l_1 \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_2 = \frac{N \cdot l_2}{2 \cdot \pi} \\ r_1 = \frac{N \cdot l_1}{2 \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{N \cdot l_2}{2 \cdot \pi} - \frac{N \cdot l_1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \left(l_2 - l_1\right) \Rightarrow d = \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \left(l_2 - l_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \left(l_2 - l_1\right) \; / \cdot \frac{2 \cdot \pi}{l_2 - l_1} \Rightarrow N = \frac{2 \cdot \pi \cdot d}{l_2 - l_1} \Rightarrow N = \frac{2 \cdot \pi \cdot 9.3 \; cm}{21.6 \; cm - 14.6 \; cm} \Rightarrow N = 8.35.$$

Budući da je površina jedne etikete

$$P_e = 168.33 \; cm^2,$$

površina cijelog kružnog vijenca iznosi:

$$P_v = N \cdot P_e \Rightarrow P_v = 8.35 \cdot 168.33 \; cm^2 \Rightarrow P_v = 1405.56 \; cm^2.$$

Iz kružnog vijenca može se maksimalno izrezati 8 cijelih etiketa čija je ukupna površina

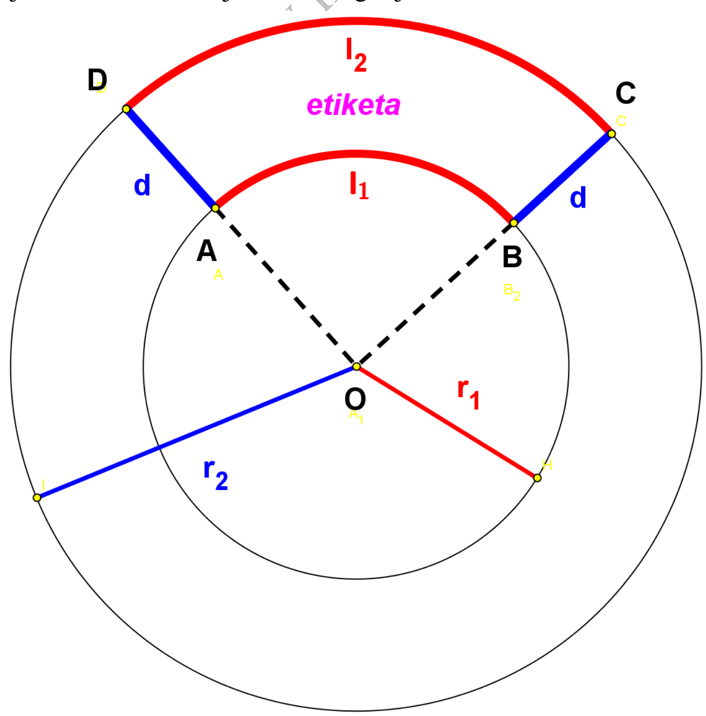
$$P_8 = 8 \cdot P_e \Rightarrow P_8 = 8 \cdot 168.33 \; cm^2 \Rightarrow P_8 = 1346.64 \; cm^2.$$

Neiskorištena površina kartona jednaka je razlici površine kružnog vijenca P_v i površina 8 etiketa P_8.

$$\Delta P = P_v - P_8 \Rightarrow \Delta P = 1405.56 \; cm^2 - 1346.64 \; cm^2 \Rightarrow \Delta P = 58.92 \; cm^2.$$

Vježba 069

Etikete za omatanje mliječnih proizvoda izrezane su iz recikliranog kartona oblika kružnog vijenca. Dimenzije jedne etikete su l_1 = 1.46 dm, l_2 = 2.16 dm, d = 93 mm. Koliko kvadratnih centimetara kartona je ostalo nakon što je iz kružnog vijenca izrezan maksimalni broj etiketa?



Rezultat: 58.92 cm^2.

Zadatak 070 (4A, TUPŠ)

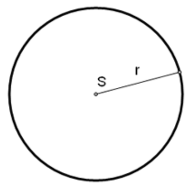
Automobil je vozio kružnim tokom i načinio puni krug. Lijevi kotač automobila prešao je pritom put od 188.50 m. Koliki je put pritom prešao desni kotač automobila ako razmak između lijevoga i desnoga kotača na automobilu iznosi 1.56 m? Napomena: Lijevi kotač bliži je središtu kružnog toka od desnoga kotača.

$A.\ 198.30\ m \qquad B.\ 201.06\ m \qquad C.\ 263.54\ m \qquad D.\ 272.07\ m$

Rješenje 070

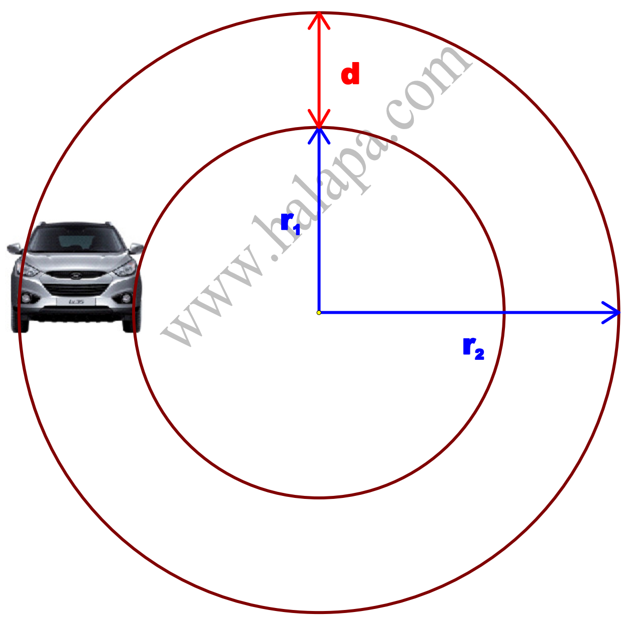
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.



Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga). Opseg kružnice i kruga polumjera r:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$



Automobil je vozio kružnim tokom i načinio puni krug pa je njegov lijevi kotač opisao krug opsega O_1 i polumjera r_1, a desni kotač krug opsega O_2 i polumjera r_2. Lijevi kotač prešao je put od 188.50 m pa za polumjer r_1 vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi \\ O_1 = 188.50\ m \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot r_1 \cdot \pi = 188.50\ m \Rightarrow 2 \cdot r_1 \cdot \pi = 188.50\ m \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow r_1 = 30\ m.$$

Razmak između kotača je d = 1.56 m pa polumjer r_2 iznosi:

$$r_2 = r_1 + d \Rightarrow r_2 = 30\ m + 1.56\ m \Rightarrow r_2 = 31.56\ m.$$

Put koji je prešao desni kotač automobila jednak je opsegu O_2 kruga polumjera r_2.

$$\left.\begin{array}{l} O_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi \\ r_2 = 31.56\ m \end{array}\right\} \Rightarrow O_2 = 2 \cdot 31.56\ m \cdot \pi \Rightarrow O_2 = 198.30\ m.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 070

Automobil je vozio kružnim tokom i načinio puni krug. Lijevi kotač automobila prešao je pritom put od 1885 dm. Koliki je put pritom prešao desni kotač automobila ako razmak između lijevoga i desnoga kotača na automobilu iznosi 15.6 dm? Napomena: Lijevi kotač bliži je središtu kružnog toka od desnoga kotača.

$A.\ 198.30\ m \qquad B.\ 201.06\ m \qquad C.\ 263.54\ m \qquad D.\ 272.07\ m$

Rezultat: A.

Zadatak 071 (4A, 4B, TUPŠ)

Tri petine površine male pizze odgovara površini jedne osmine jumbo pizze. Koliki je polumjer jumbo pizze ako je polumjer male pizze 10 cm?

Rješenje 071

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga). Ploština kruga polumjera r:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Kako zapisati $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b} \cdot x.$$

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

Neka je:

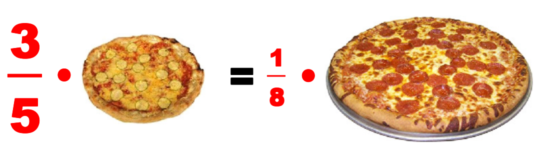
r – polumjer male pizze , P_m = površina male pizze
R – polumjer jumbo pizze , P_j = površina jumbo pizze.

Budući da tri petine površine male pizze odgovara površini jedne osmine jumbo pizze, vrijedi jednakost:

$$\frac{3}{5} \cdot P_m = \frac{1}{8} \cdot P_j \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot R^2 \cdot \pi \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot R^2 \cdot \pi \ / \cdot \frac{8}{\pi} \Rightarrow R^2 = \frac{24}{5} \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{24}{5} \cdot r^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow R = \sqrt{\frac{24}{5} \cdot r^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{24}{5}} \cdot \sqrt{r^2} \Rightarrow R = r \cdot \sqrt{\frac{24}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ r = 10\ cm\ \right] \Rightarrow R = 10\ cm \cdot \sqrt{\frac{24}{5}} \Rightarrow R = 21.91\ cm.$$



Vježba 071

Šest desetina površine male pizze odgovara površini jedne osmine jumbo pizze. Koliki je polumjer jumbo pizze ako je polumjer male pizze 10 cm?

Rezultat: 21.91 cm.

Zadatak 072 (Robert, gimnazija)

Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

$$A.\ \sqrt{5}:2 \qquad B.\ 4:1 \qquad C.\ 5:2 \qquad D.\ 3:1$$

Rješenje 072

Ponovimo!

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga). Ploština kruga polumjera r:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

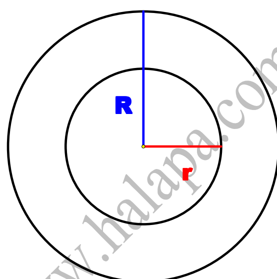
Kako zapisati da je broj a n – ti dio broja b?

$$a = \frac{b}{n} \quad , \quad a \cdot n = b \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Površina kružnog vijenca:

$$P_{kv} = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi \Rightarrow P_{kv} = \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi.$$



Budući da je površina kružnog vijenca P_v jednaka četvrtini površine manjeg kruga P_k, slijedi:

$$P_v = \frac{P_k}{4} \Rightarrow \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \ / \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 \Rightarrow R^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{1} \Rightarrow R^2 = \frac{r^2 + 4 \cdot r^2}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{5 \cdot r^2}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{5 \cdot r^2}{4} \ / \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{5}{4} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R : r = \sqrt{5} : 2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 072

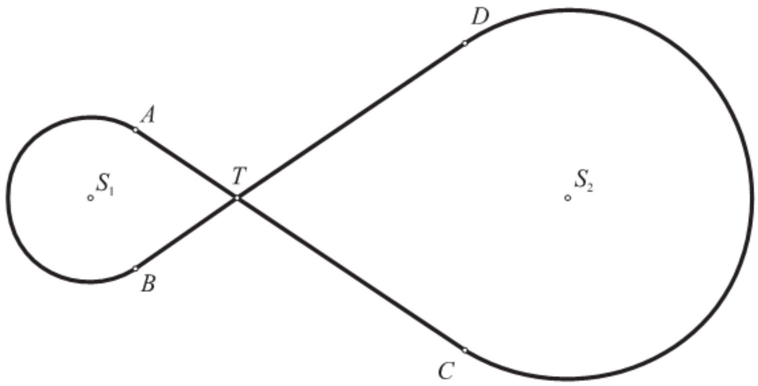
Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine manjeg kruga. Omjer polumjera manjeg i većeg kruga jednak je:

$$A.\ 2:\sqrt{5} \qquad B.\ 1:4 \qquad C.\ 2:5 \qquad D.\ 1:3$$

Rezultat: A.

Zadatak 073 (Dado, gimnazija)

Trkaća je staza oblika "osmice" kao na slici. Sastoji se od kružnih lukova i ravnih dijelova. Lukovi $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{CD}$ su lukovi kružnica sa središtima S_1 i S_2. Polumjeri su tih kružnica $r_1 = 30$ m i $r_2 = 60$ m. Udaljenost središta tih dviju kružnica iznosi 180 m. Ravni dijelovi trkaće staze $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ leže na zajedničkim tangentama tih dviju kružnica, pri čemu su točke A, B i C, D dirališta tangenta. Izračunajte duljinu trkaće staze.



Rješenje 073

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad a=a_1 \ , \ b=b_1 \ , \ c=c_1.$$

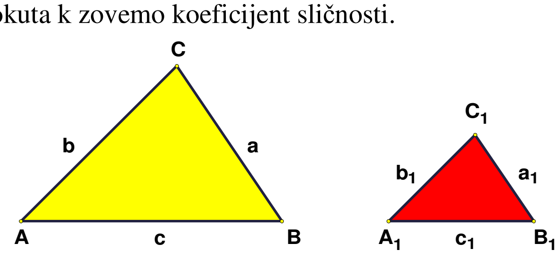
Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice. Zbroj veličina svih kutova u četverokutu ABCD iznosi 360°.

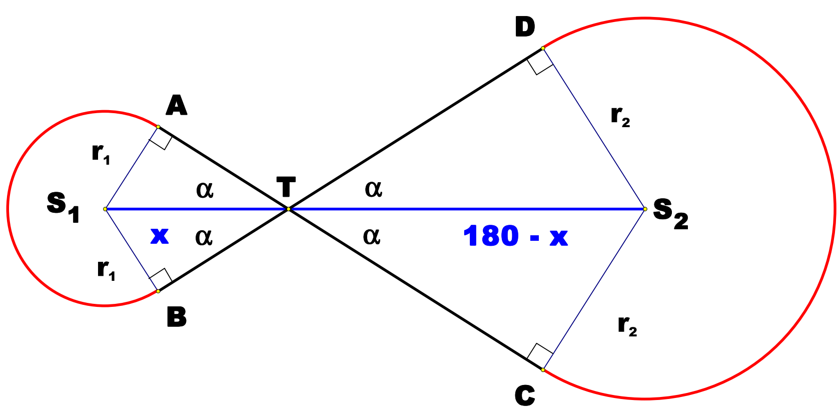
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

Puni kut ima 360°.
Vršni kutovi su dva kuta koji imaju zajednički vrh, a kraci jednoga leže u produžetcima krakova drugog. Vršni kutovi imaju jednaku veličinu.
Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

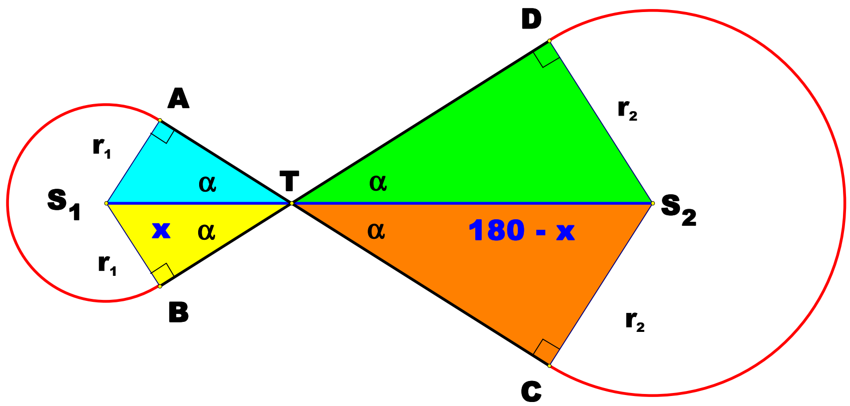
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|S_1A\right| = \left|S_1B\right| = r_1 = 30 \;,\; \left|S_1S_2\right| = 180 \;,\; \left|S_1T\right| = x \;,\; \left|TS_2\right| = 180 - x \;,\; \left|S_2C\right| = \left|S_2D\right| = r_2 = 60$$

$$\angle BTS_1 = \angle S_1TA = \angle S_2TC = \angle S_2TD = \alpha$$

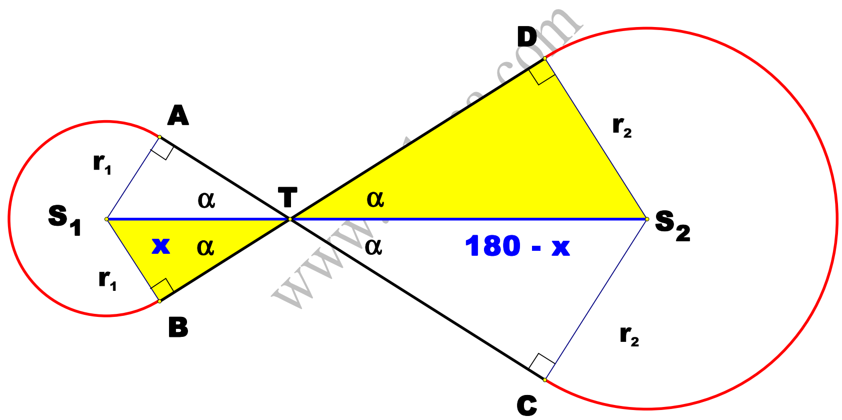


Trokuti ΔS_1BT i ΔS_1TA sukladni su jer se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici (S – S – K) pa vrijedi

$$|AT| = |BT|.$$

Trokuti ΔS_2DT i ΔS_2TC sukladni su jer se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici (S – S – K) pa vrijedi

$$|CT| = |DT|.$$



Uočimo da su trokuti ΔS_1BT i ΔS_2DT slični jer imaju jednake kutova pa vrijedi razmjer:

$$|S_1T| : |S_1B| = |TS_2| : |S_2D| \Rightarrow x : 30 = (180 - x) : 60 \Rightarrow 60 \cdot x = 30 \cdot (180 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 \cdot x = 30 \cdot (180 - x) \; /:30 \Rightarrow 2 \cdot x = 180 - x \Rightarrow 2 \cdot x + x = 180 \Rightarrow 3 \cdot x = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 180 \; /:3 \Rightarrow x = 60.$$

Tada je:

$$\left. \begin{aligned} |S_1T| &= x \\ |TS_2| &= 180 - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\, x = 60 \,] \Rightarrow \left. \begin{aligned} |S_1T| &= 60 \\ |TS_2| &= 180 - 60 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |S_1T| &= 60 \\ |TS_2| &= 120 \end{aligned} \right\}.$$

Duljine $|BT|$ i $|TD|$ izračunat ćemo pomoću Pitagorina poučka primijenjenog na pravokutne trokute ΔS_1BT i ΔS_2DT:

- $|BT|^2 = |S_1T|^2 - |S_1B|^2 \Rightarrow |BT|^2 = |S_1T|^2 - |S_1B|^2 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{|S_1T|^2 - |S_1B|^2} \Rightarrow |BT| = \sqrt{60^2 - 30^2} \Rightarrow |BT| = 51.962.$$

- $|TD|^2 = |S_2T|^2 - |S_2D|^2 \Rightarrow |TD|^2 = |S_2T|^2 - |S_2D|^2 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |TD| = \sqrt{|S_2T|^2 - |S_2D|^2} \Rightarrow |TD| = \sqrt{120^2 - 60^2} \Rightarrow |TD| = 103.923.$$

Još trebamo izračunati duljine lukova $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{CD}$. Uočimo pravokutan trokut S_1BT. Pomoću funkcije sinus dobije se mjera kuta α.

$$\sin\alpha = \frac{|S_1B|}{|S_1T|} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{30}{60} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{30}{60} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

Sada je:

- $\angle BTA = 2 \cdot \alpha \Rightarrow \angle BTA = 2 \cdot 30^0 \Rightarrow \angle BTA = 60^0$
- $\angle BS_1A = 180^0 - \angle BTA \Rightarrow \angle BS_1A = 180^0 - 60^0 \Rightarrow \angle BS_1A = 120^0$
- $\angle AS_1B = 360^0 - \angle BS_1A \Rightarrow \angle AS_1B = 360^0 - 120^0 \Rightarrow \angle AS_1B = 240^0.$

Duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ iznosi:

$$\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{r_1 \cdot \pi \cdot \angle AS_1B}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{r_1 \cdot \pi \cdot \alpha}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{30 \cdot \pi \cdot 240^0}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{AB}\right| = 125.664.$$

Analogno je i za duljinu luka $\overset{\frown}{CD}$.

- $\angle DTC = 2 \cdot \alpha \Rightarrow \angle DTC = 2 \cdot 30^0 \Rightarrow \angle DTC = 60^0$
- $\angle DS_2C = 180^0 - \angle DTC \Rightarrow \angle DS_2C = 180^0 - 60^0 \Rightarrow \angle DS_2C = 120^0$
- $\angle CS_2D = 360^0 - \angle DS_2C \Rightarrow \angle CS_2D = 360^0 - 120^0 \Rightarrow \angle CS_2D = 240^0.$

Duljina luka $\overset{\frown}{CD}$ iznosi:

$$\left|\overset{\frown}{CD}\right| = \frac{r_2 \cdot \pi \cdot \angle CS_2D}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{CD}\right| = \frac{r_2 \cdot \pi \cdot \alpha}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{CD}\right| = \frac{60 \cdot \pi \cdot 240^0}{180^0} \Rightarrow \left|\overset{\frown}{CD}\right| = 251.327.$$

Duljina kružne staze je:

$$O = \left|\overset{\frown}{AB}\right| + |BD| + \left|\overset{\frown}{CD}\right| + |AC| \Rightarrow \left[\,|BD| = |AC|\,\right] \Rightarrow O = \left|\overset{\frown}{AB}\right| + 2 \cdot |BD| + \left|\overset{\frown}{CD}\right| \Rightarrow$$

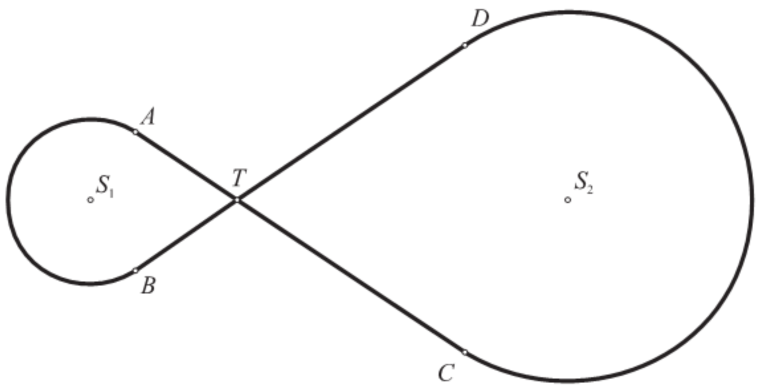
$$\Rightarrow \left[\,|BD| = |BT| + |TD|\,\right] \Rightarrow O = \left|\overset{\frown}{AB}\right| + 2 \cdot \left(|BT| + |TD|\right) + \left|\overset{\frown}{CD}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 125.664 + 2 \cdot (51.962 + 103.923) + 251.327 \Rightarrow O = 125.664 + 2 \cdot 155.885 + 251.327 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 688.761 \Rightarrow O \approx 688.76.$$

Vježba 073

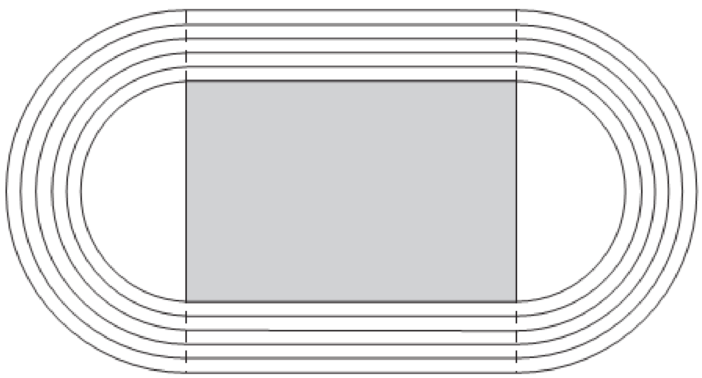
Trkaća je staza oblika "osmice" kao na slici. Sastoji se od kružnih lukova i ravnih dijelova. Lukovi $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{CD}$ su lukovi kružnica sa središtima S_1 i S_2. Polumjeri su tih kružnica $r_1 = 60$ m i $r_2 = 120$ m. Udaljenost središta tih dviju kružnica iznosi 360 m. Ravni dijelovi trkaće staze $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ leže na zajedničkim tangentama tih dviju kružnica, pri čemu su točke A, B i C, D dirališta tangenta. Izračunajte duljinu trkaće staze.



Rezultat: 1377.52.

Zadatak 074 (Ivan, strukovna škola)

Nogometno igralište dugo je 110 m i široko 70 m. Nad kraćim stranicama igrališta nalazi se dio terena u obliku polukruga, a teren okružuje atletska staza s pet traka za trčanje. Svaka traka za trčanje široka je 1 m. Izračunajte razliku u duljini najdulje i najkraće trake za trčanje uz pretpostavku da trkači uvijek trče unutarnjim rubom svoje staze. Zaokružite rezultat na dvije decimale.

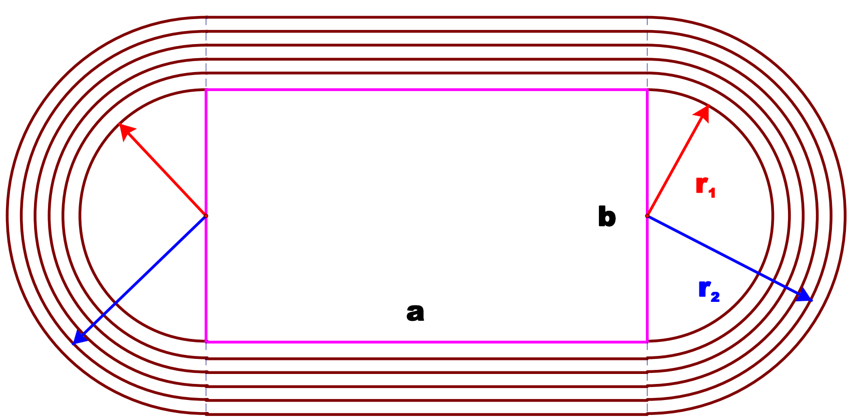


Rješenje 074

Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta) te ravnine. Opseg kružnice polumjera r izračunava se po formuli:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$



Sa slike vidi se:

$$a = 110 \ m \quad , \quad b = 70 \ m \quad , \quad r_1 = \frac{1}{2} \cdot b = 35 \ m \quad , \quad r_2 = r_1 + 4 \ m = 39 \ m$$

Zajednički dio koji obojica trkača moraju pretrčati jednak je dvostrukoj duljini nogometnog igrališta.

Osim toga:

- prvi trkač još mora pretrčati dvostruku polukružnu stazu polumjera r_1 što odgovara opsegu kružnice polumjera r_1

$$O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi \Rightarrow O_1 = 2 \cdot 35 \cdot \pi \Rightarrow O_1 = 70 \cdot \pi$$

- drugi trkač još mora pretrčati dvostruku polukružnu stazu polumjera r_2 što odgovara opsegu kružnice polumjera r_2

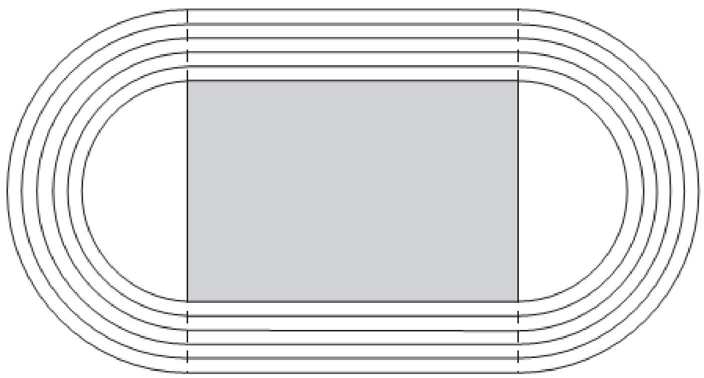
$$O_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi \Rightarrow O_2 = 2 \cdot 39 \cdot \pi \Rightarrow O_2 = 78 \cdot \pi.$$

Razlika u prevaljenim putovima dvojice trkača jednaka je razlici opsega O_2 i O_1 kružnica.

$$s = O_2 - O_1 \Rightarrow s = 78 \cdot \pi - 70 \cdot \pi \Rightarrow s = 8 \cdot \pi \Rightarrow s = 25.13 \; m.$$

Vježba 074

Nogometno igralište dugo je 150 m i široko 70 m. Nad kraćim stranicama igrališta nalazi se dio terena u obliku polukruga, a teren okružuje atletska staza s pet traka za trčanje. Svaka traka za trčanje široka je 1 m. Izračunajte razliku u duljini najdulje i najkraće trake za trčanje uz pretpostavku da trkači uvijek trče unutarnjim rubom svoje staze. Zaokružite rezultat na dvije decimale.



Rezultat: 25.13 m.

Zadatak 075 (Ante, gimnazija)

Neka je S središte upisane kružnice trokutu ABC, a T točka u kojoj simetrala kuta ACB siječe kružnicu opisanu tom trokutu. Izrazite kutove četverokuta ATBS pomoću kutova trokuta α, β i γ.

Rješenje 075

Ponovimo!

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c} \quad , \quad a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokut je geometrijski lik koji ima tri stranice, tri kuta i tri vrha.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice. Zbroj veličina svih kutova u četverokutu iznosi 360°.

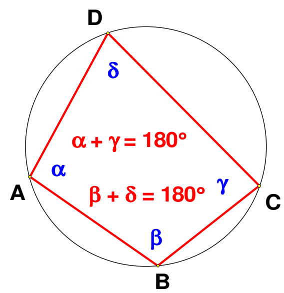
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

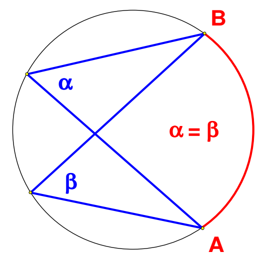
Tetivni četverokut je četverokut čiji su vrhovi točke jedne kružnice.
Tetivni četverokut je četverokut:

- čiji su vrhovi točke jedne kružnice,

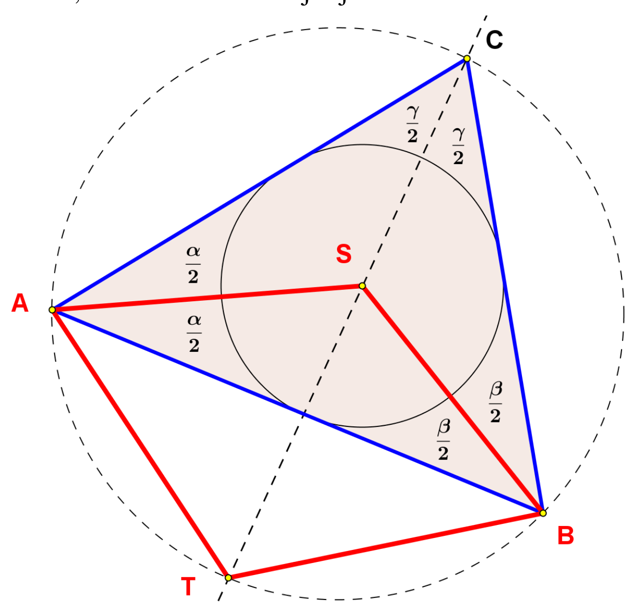
- kojem se može opisati kružnica,
- čije su stranice tetive jedne kružnice,
- kojem je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180°.

Svaki kut s vrhom na kružnici čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo obodni kut. Svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice međusobno su sukladni.





Pravac koji prolazi vrhom i dijeli unutarnji kut trokuta pri tom vrhu na dva sukladna kuta zove se simetrala unutarnjeg kuta trokuta. Simetrale kutova sijeku se u jednoj točki koja je središte trokutu upisane kružnice.
Pravac koji prolazi polovištem jedne stranice trokuta i okomit je na nju jest simetrala stranice trokuta.
Za svaki trokut postoji samo jedna kružnica koja prolazi vrhovima trokuta. Ta se kružnica zove opisana kružnica tom trokutu, a središte kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.



Sa slike vidi se:

$$\angle CAB = \alpha \ , \ \angle ABC = \beta \ , \ \angle BCA = \gamma$$

$$\angle CAS = \angle SAB = \frac{\alpha}{2} \ , \ \angle ABS = \angle SBC = \frac{\beta}{2} \ , \ \angle BCS = \angle SCA = \frac{\gamma}{2}$$

Uočimo da je četverokut ATBC tetivni četverokut pa vrijedi:

$$\angle BCA + \angle ATB = 180^0 \ \Rightarrow \ \gamma + \angle ATB = 180^0 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{svojstvo trokuta} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma + \angle ATB = \alpha + \beta + \gamma \ \Rightarrow \ \cancel{\gamma} + \angle ATB = \alpha + \beta + \cancel{\gamma} \ \Rightarrow \ \angle ATB = \alpha + \beta .$$

Budući da su nad lukom svi obodni kutovi jednaki, slijedi:

- za luk $\overset{\frown}{AT}$

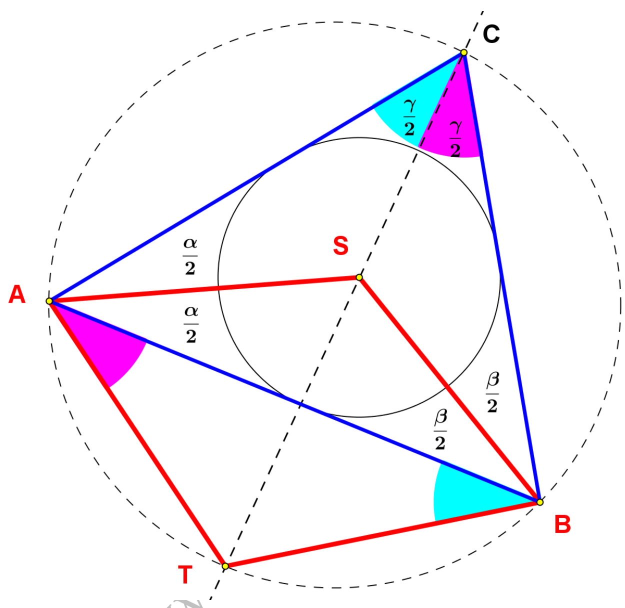
$$\angle ACT = \angle ABT = \frac{\gamma}{2}$$

- za luk $\overset{\frown}{TB}$

$$\angle TAB = \angle TCB = \frac{\gamma}{2}.$$

Sada za kutove $\angle SAT$ i $\angle TBS$ u četverokutu ATBS vrijedi:

- $\angle SAT = \angle SAB + \angle BAT \;\Rightarrow\; \angle SAT = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; \angle SAT = \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\gamma).$
- $\angle TBS = \angle TBA + \angle ABS \;\Rightarrow\; \angle TBS = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; \angle TBS = \frac{1}{2}\cdot(\gamma+\beta).$



Četvrti kut BSA četverokuta ATBS možemo izračunati na više načina.

1.inačica

Uočimo trokut ABS.

$$\angle BSA + \angle SAB + \angle ABS = 180^0 \;\Rightarrow\; \angle BSA + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{svojstvo trokuta} \\ \alpha+\beta+\gamma = 180^0. \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \angle BSA + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \alpha+\beta+\gamma \;\Rightarrow\; \angle BSA = \alpha+\beta+\gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; \angle BSA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma.$$

2.inačica

Uočimo četverokut ATBS.

$$\angle BSA + \angle SAT + \angle ATB + \angle TBS = 360^0 \;\Rightarrow\; \angle BSA + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \alpha + \beta + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \angle BSA + \frac{3\cdot\alpha}{2} + \frac{3\cdot\beta}{2} + \gamma = 2\cdot 180^0 \;\Rightarrow\; \angle BSA + \frac{3\cdot\alpha}{2} + \frac{3\cdot\beta}{2} + \gamma = 2\cdot(\alpha+\beta+\gamma) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \angle BSA = 2\cdot(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{3\cdot\alpha}{2} - \frac{3\cdot\beta}{2} - \gamma \;\Rightarrow\; \angle BSA = 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta + 2\cdot\gamma - \frac{3\cdot\alpha}{2} - \frac{3\cdot\beta}{2} - \gamma \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \angle BSA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma.$$

Kutovi četverokuta ATBS pomoću kutova trokuta α, β i γ glase:

$$\angle ATB = \alpha + \beta \quad , \quad \angle SAT = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \gamma) \quad , \quad \angle TBS = \frac{1}{2} \cdot (\gamma + \beta) \quad , \quad \angle BSA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma.$$

Vježba 075

Neka je S središte upisane kružnice trokutu ABC, a T točka u kojoj simetrala kuta ABC siječe kružnicu opisanu tom trokutu. Izrazite kutove četverokuta ASCT pomoću kutova trokuta α, β i γ.

Rezultat: $\angle ASC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \beta \; , \; \angle SCT = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \; , \; \angle CTA = \alpha + \gamma \; , \; \angle TAS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$

Zadatak 076 (Ana, gimnazija)

Koliki je polumjer kružnice koja dira stranicu $\overline{AB}$ kvadrata i prolazi njegovim vrhovima C i D, ako je duljina stranice kvadrata 12 cm?

Rješenje 076

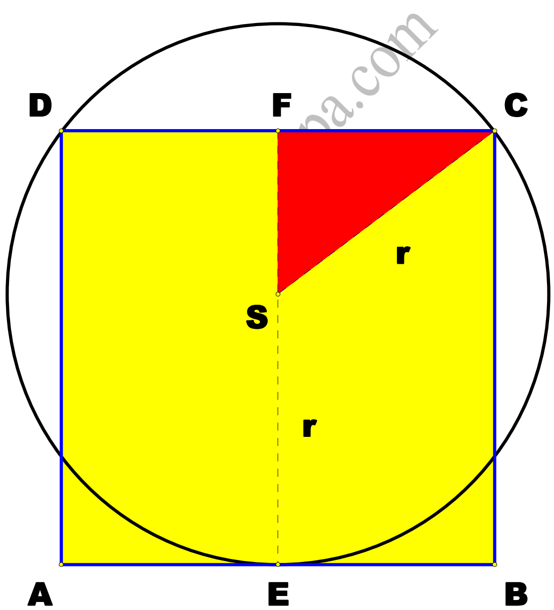
Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |EF| = 12 \; , \; |SE| = |SC| = r \; , \; |FC| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = 6$$

$$|SF| = |EF| - |SE| = 12 - r$$

Uočimo pravokutni trokut ΔSCF i primijenimo Pitagorin poučak.

$$|SC|^2 = |SF|^2 + |FC|^2 \Rightarrow r^2 = (12-r)^2 + 6^2 \Rightarrow r^2 = 144 - 24 \cdot r + r^2 + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 144 - 24 \cdot r + r^2 + 36 \Rightarrow 0 = 144 - 24 \cdot r + 36 \Rightarrow 24 \cdot r = 144 + 36 \Rightarrow 24 \cdot r = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 \cdot r = 180 \; / : 24 \Rightarrow r = 7.5 \; cm.$$

Vježba 076

Koliki je polumjer kružnice koja dira stranicu $\overline{AB}$ kvadrata i prolazi njegovim vrhovima C i D, ako je duljina stranice kvadrata 24 cm?

Rezultat: 15 cm.

Zadatak 077 (MX, tehnička škola)

Odredi polumjer kruga kojemu je površina jednaka duljini promjera.

Rješenje 077

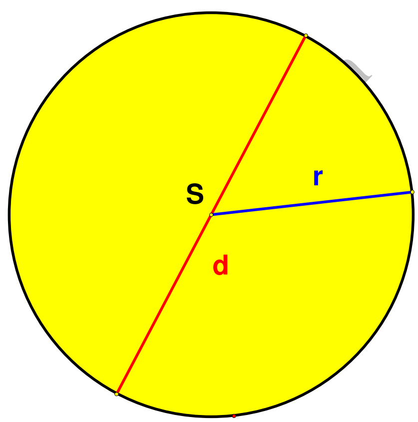
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom. Polumjer (radijus) je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r**.** Promjer (dijametar) je dužina koja prolazi kroz središte kružnice i čiji krajevi se nalaze na kružnici. Duljinu promjera označavamo slovom d. Sveza promjera i polumjera:

$$d = 2 \cdot r.$$

Krug je skup svih točaka u ravnini čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kruga, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kruga.
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$



$$\left.\begin{array}{l} P = r^2 \cdot \pi \\ d = 2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ P = d \end{array}\right] \Rightarrow r^2 \cdot \pi = 2 \cdot r \Rightarrow r^2 \cdot \pi = 2 \cdot r \; / \cdot \frac{1}{r \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}.$$

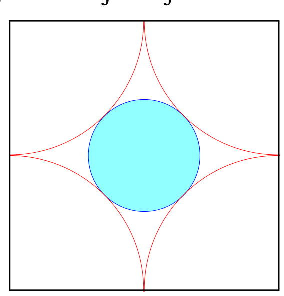
Vježba 077

Odredi polumjer kruga kojemu je površina jednaka duljini polumjera.

Rezultat: $r = \frac{1}{\pi}.$

Zadatak 078 (Tonka, gimnazija)

Izračunaj površinu osjenčanog lika ako je duljina stranice kvadrata jednaka a.



Rješenje 078

Ponovimo!

$$\left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(a-b\right)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom. Polumjer (radijus) je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r**.** Promjer (dijametar) je dužina koja prolazi kroz središte kružnice i čiji krajevi se nalaze na kružnici. Duljinu promjera označavamo slovom d. Sveza promjera i polumjera:

$$d=2\cdot r.$$

Krug je skup svih točaka u ravnini čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kruga, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kruga.
Opseg kružnice i kruga polumjera r iznosi:

$$O=2\cdot r\cdot \pi.$$

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot \pi.$$

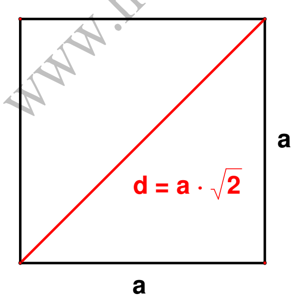
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

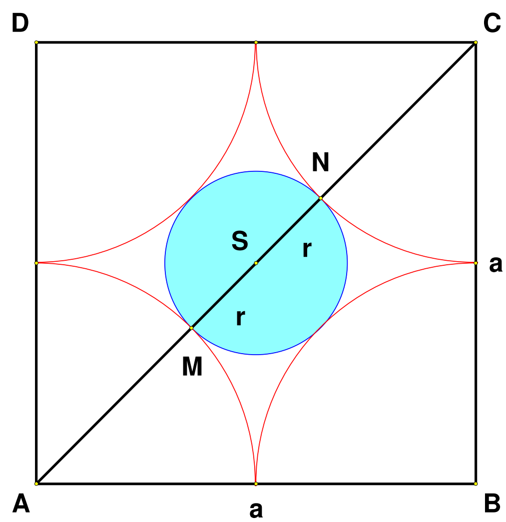
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Kvadrat je četverokut s četiri prava kuta i četiri sukladne stranice. Stranice su jednake duljine, a nasuprotne stranice su paralelne.
Dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.





Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \;,\; |AM| = |NC| = \frac{a}{2} \;,\; |AC| = a \cdot \sqrt{2} \;,\; |MN| = 2 \cdot r$$

Uočimo da je duljina dijagonale $|AC|$ kvadrata ABCD jednaka zbroju duljine promjera kruga $|MN|$ i dvostrukog polumjera malih krugova $|AM| + |NC|$.

$$|AC| = |AM| + |MN| + |NC| \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2} + 2 \cdot r + \frac{a}{2} \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot r + 2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot r + 2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot r + a \Rightarrow 2 \cdot r + a = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 2 \cdot r = a \cdot \sqrt{2} - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow 2 \cdot r = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \; / : 2 \Rightarrow r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right).$$

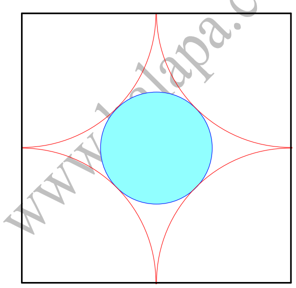
Ploština kruga iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \\ P = r^2 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow P = \left(\frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{4} \cdot \left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1\right) \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{a^2}{4} \cdot \left(2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1\right) \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{a^2}{4} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \pi.$$

Vježba 078

Izračunaj opseg osjenčanog lika ako je duljina stranice kvadrata jednaka a.



Rezultat: $O = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \pi.$

Zadatak 079 (Tonka, gimnazija)

Kolika je ploština kružnog vijenca koji je omeđen s dvije koncentrične kružnice opsega $10 \cdot \pi$ i $28 \cdot \pi$.

Rješenje 079

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom. Polumjer (radijus) je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

Opseg kružnice i kruga polumjera r iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.

Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.
Odredimo duljine polumjera koncentričnih kružnica.

$$\left.\begin{array}{l} O_1=10\cdot\pi \\ O_2=28\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot r_1\cdot\pi=10\cdot\pi \\ 2\cdot r_2\cdot\pi=28\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot r_1\cdot\pi=10\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \\ 2\cdot r_2\cdot\pi=28\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1=5 \\ r_2=14 \end{array}\right\}.$$

Ploština kružnog vijenca iznosi:

$$P=r_2^2\cdot\pi-r_1^2\cdot\pi \Rightarrow P=\left(r_2^2-r_1^2\right)\cdot\pi \Rightarrow P=\left(r_2-r_1\right)\cdot\left(r_2+r_1\right)\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=(14-5)\cdot(14+5)\cdot\pi \Rightarrow P=9\cdot19\cdot\pi \Rightarrow P=171\cdot\pi.$$

Vježba 079

Kolika je ploština kružnog vijenca koji je omeđen s dvije koncentrične kružnice opsega $10\cdot\pi$ i $20\cdot\pi$.

Rezultat: $75\cdot\pi$.

Zadatak 080 (Tonka, gimnazija)

Širina kružnog vijenca je 12 cm, a zbroj polumjera koncentričnih kružnica je 28 cm. Kolika je ploština kružnog vijenca?

Rješenje 080

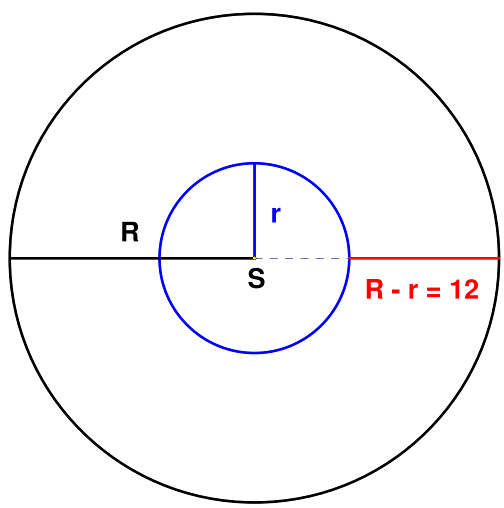
Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom. Polumjer (radijus) je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom **r**.
Ako su u ravnini zadana dva koncentrična kruga (imaju zajedničko središte), manji krug polumjera r i veći polumjera R, tada se skup svih točaka ravnine koje pripadaju većem krugu, a ne pripadaju unutrašnjosti manjeg kruga zove kružni vijenac.
Ploština kružnog vijenca izračunava se po formuli

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi,$$

gdje je R > r.



1.inačica

Pomoću uvjeta u zadatku formiramo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{matrix} R-r=12 \\ R+r=28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot R=40 \Rightarrow 2\cdot R=40 \ /:2 \Rightarrow R=20.$$

Računamo r.

$$\left.\begin{matrix} R=20 \\ R+r=28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 20+r=28 \Rightarrow r=28-20 \Rightarrow r=8.$$

Ploština kružnog vijenca iznosi:

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi \Rightarrow \begin{bmatrix} R=20 \\ r=8 \end{bmatrix} \Rightarrow P=\left(20^2-8^2\right)\cdot\pi \Rightarrow P=(400-64)\cdot\pi \Rightarrow 336\cdot\pi\ cm^2.$$

2.inačica

Uvjeti u zadatku glase:

$$\left.\begin{matrix} R-r=12 \\ R+r=28 \end{matrix}\right\}.$$

Ploština kružnog vijenca iznosi:

$$P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi \Rightarrow P=(R-r)\cdot(R+r)\cdot\pi \Rightarrow \begin{bmatrix} R-r=12 \\ R+r=28 \end{bmatrix} \Rightarrow P=12\cdot 28\cdot\pi \Rightarrow P=336\cdot\pi\ cm^2.$$

Vježba 080

Širina kružnog vijenca je 10 cm, a zbroj polumjera koncentričnih kružnica je 20 cm. Kolika je ploština kružnog vijenca?

Rezultat: $P=200\cdot\pi\ cm^2.$