Zadatak 041 (Marija, srednja škola)

Površina kružnog isječka iznosi 45, a duljina pripadnog luka 9. Nađite polumjer kruga.

Rješenje 041

$$P=\frac{r\cdot l}{2}\Rightarrow r=\frac{2\cdot P}{l}\Rightarrow r=\frac{2\cdot 45}{9}\Rightarrow r=10.$$

Vježba 041

Površina kružnog isječka iznosi 45, a duljina pripadnog luka 10. Nađite polumjer kruga.

Rezultat: 9.

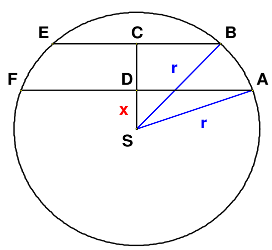
Zadatak 042 (Petar, maturant)

Dvije usporedne tetive duljina 18 cm i 24 cm s iste strane središta kruga udaljene su za 3 cm. Koliki je opseg kruga?

Rješenje 042

Ponovimo!

Pitagorin poučak: Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Sa slike vidi se:

$$|EB|=18\ cm\quad,\quad|FA|=24\ cm\quad,\quad|CB|=9\ cm\quad,\quad|DA|=12\ cm$$

$$|SA|=|SB|=r\quad,\quad|SD|=x\quad,\quad|SC|=3+x$$

Uočimo pravokutne trokute ΔSBC i ΔSAD i uporabom Pitagorina poučka postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}|SB|^2=|SC|^2+|CB|^2\\|SA|^2=|SD|^2+|DA|^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}r^2=(3+x)^2+9^2\\r^2=x^2+12^2\end{array}\right\}\Rightarrow(3+x)^2+9^2=x^2+12^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+6\cdot x+x^2+81=x^2+144\Rightarrow 9+6\cdot x+81=144\Rightarrow 6\cdot x=144-9-81\Rightarrow 6\cdot x=54\ /:6\Rightarrow x=9\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x=9\\r^2=x^2+12^2\end{array}\right\}\Rightarrow r^2=9^2+12^2\Rightarrow r^2=81+144\Rightarrow r^2=225\ /\sqrt{\ }\Rightarrow r=15\ cm.$$

Opseg kruga iznosi:

$$O=2\cdot r\cdot\pi\Rightarrow O=2\cdot 15\ cm\cdot\pi\Rightarrow O=30\cdot\pi\ cm.$$

Vježba 042

Dvije usporedne tetive duljina 18 cm i 24 cm s iste strane središta kruga udaljene su za 3 cm. Kolika je površina kruga?

Rezultat: 225 · π.

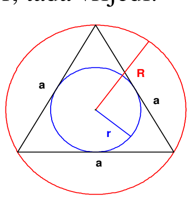
Zadatak 043 (Leona, gimnazija)

Krugu polumjera 2 cm upisan je jednakostranični trokut, a trokutu je upisan krug. Kolika je površina kružnog vijenca omeđenog ovim dvjema kružnicama?

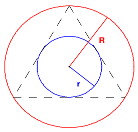
Rješenje 043

Ponovimo!

Ako je jednakostraničnom trokutu duljine stranice a opisan krug polumjera R i upisan krug polumjera r, tada vrijedi:



$$\left.\begin{array}{l}R=\dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\\r=\dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow r=\frac{1}{2}\cdot R.$$



1.inačica

Kružni vijenac je dio ravnine omeđen s dvije koncentrične kružnice. Kružnice koje imaju zajedničko središte nazivamo koncentrične kružnice.

Površina kružnog vijenca iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} R=2\ cm\ ,\ r=\frac{1}{2}\cdot R \\ P=R^{2}\cdot\pi-r^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=2\ cm\ ,\ r=\frac{1}{2}\cdot 2\ cm \\ P=R^{2}\cdot\pi-r^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=2\ cm\ ,\ r=1\ cm \\ P=R^{2}\cdot\pi-r^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow P=\left(R^{2}-r^{2}\right)\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=(R-r)\cdot(R+r)\cdot\pi \Rightarrow P=(2\ cm-1\ cm)\cdot(2\ cm+1\ cm)\cdot\pi \Rightarrow P=1\ cm\cdot 3\ cm\cdot\pi \Rightarrow P=3\cdot\pi\ cm^{2}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} R=2\ cm\ ,\ r=\frac{1}{2}\cdot R \\ P=R^{2}\cdot\pi-r^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=2\ cm \\ P=R^{2}\cdot\pi-\left(\frac{1}{2}\cdot R\right)^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=2\ cm \\ P=R^{2}\cdot\pi-\frac{1}{4}\cdot R^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R=2\ cm \\ P=\frac{3}{4}\cdot R^{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{3}{4}\cdot(2\ cm)^{2}\cdot\pi \Rightarrow P=\frac{3}{4}\cdot 4\ cm^{2}\cdot\pi \Rightarrow P=3\cdot\pi\ cm^{2}.$$

Vježba 043

Krugu polumjera 4 cm upisan je jednakostranični trokut, a trokutu je upisan krug. Kolika je površina kružnog vijenca omeđenog ovim dvjema kružnicama?

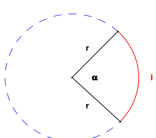
Rezultat: $12\cdot\pi\ cm^{2}$.

Zadatak 044 (Leona, gimnazija)

Tangente povučene iz točke P na kružnicu polumjera 5 cm zatvaraju kut 24º 30'. Kolika je duljina luka kružnice koji se vidi iz točke P?

Rješenje 044

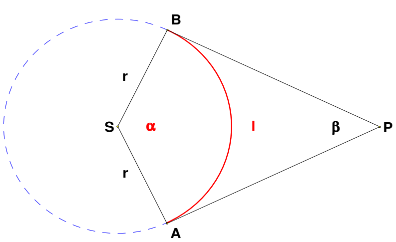
Ponovimo!



Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom:

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha.$$

Zbroj kutova u svakom četverokutu je 360º.



Budući da su dva kuta u četverokutu APBS prava kuta (< SAP = < PBS = 90º), ostala dva kuta α i β su suplementna:

α + β = 180º => α = 180º – β

pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \beta=24^{0}30' \\ \alpha=180^{0}-\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=180^{0}-24^{0}30' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=179^{0}60'-24^{0}30' \Rightarrow \alpha=155^{0}30' \Rightarrow \alpha=155^{0}+\left(\frac{30}{60}\right)^{0} \Rightarrow \alpha=155^{0}+0.5^{0} \Rightarrow \alpha=155.5^{0}.$$

Luku $\overset{\frown}{AB}=l$ pridružen je kut < ASB. Duljina luka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r=5\ cm\ ,\ \alpha=155.5^{0} \\ l=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l=\frac{5\ cm\cdot\pi}{180^{0}}\cdot 155.5^{0} \Rightarrow l=13.57\ cm.$$

Vježba 044

Tangente povučene iz točke P na kružnicu polumjera 10 cm zatvaraju kut 24º 30'. Kolika je duljina luka kružnice koji se vidi iz točke P?

Rezultat: 27.14 cm.

Zadatak 045 (Leona, gimnazija)

Na kružnici sa središtem S zadane su točke A, B, C tako da je < ABC = 83º 24'. Koliki je < ACS?

Rješenje 045

Ponovimo!

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

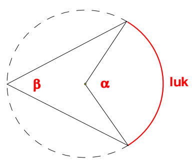
Nasuprot jednakim kutovima u trokutu nalaze se jednake stranice trokuta:

$$\alpha=\beta \Rightarrow a=b \quad , \quad \alpha=\gamma \Rightarrow a=c \quad , \quad \beta=\gamma \Rightarrow b=c.$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake.

Poučak o obodnom i središnjem kutu:

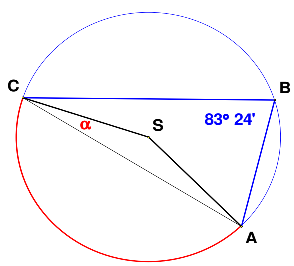
Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.



$$\alpha=2\cdot\beta$$

$$\beta=\frac{1}{2}\cdot\alpha$$

1.inačica



Uočimo luk $\overset{\frown}{CA}$. Pripadni središnji kut nad lukom $\overset{\frown}{CA}$ je kut ASC. Obodni kut nad tim lukom je kut ABC koji iznosi 83º 24'. Budući da je središnji kut nad lukom kružnice jednak dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom, slijedi:

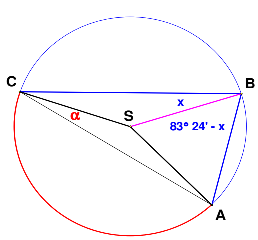
$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC=83^{0}24' \\ \angle ASC=2\cdot\angle ABC\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ASC=2\cdot 83^{0}24' \Rightarrow \angle ASC=166^{0}48'.$$

Budući da je trokut ASC jednakokračan, traženi kut α = < ACS, iznosi:

$$\angle CAS+\angle ASC+\angle ACS=180^{0} \Rightarrow \alpha+166^{0}48'+\alpha=180^{0} \Rightarrow 2\cdot\alpha=180^{0}-166^{0}48' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha=179^{0}60'-166^{0}48' \Rightarrow 2\cdot\alpha=13^{0}12' \Rightarrow \left[1^{0}=60'\right] \Rightarrow 2\cdot\alpha=12^{0}72' \;/:2 \Rightarrow \alpha=6^{0}36'.$$

2.inačica



Uočimo da su trokuti ΔABS, ΔBCS i ΔCAS jednakokračni. Sa slike vidi se:

- za trokut ABS vrijedi

$$\angle SAB+\angle ABS+\angle BSA=180^{0} \Rightarrow 83^{0}24'-x+83^{0}24'-x+\angle BSA=180^{0} \Rightarrow$$

$$\angle BSA=180^{0}-83^{0}24'+x-83^{0}24'+x \Rightarrow \angle BSA=180^{0}-166^{0}48'+2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BSA=179^{0}60'-166^{0}48'+2\cdot x \Rightarrow \angle BSA=13^{0}12'+2\cdot x.$$

- za trokut BCS vrijedi

$$\angle SBC+\angle BCS+\angle CSB=180^{0} \Rightarrow x+x+\angle CSB=180^{0} \Rightarrow \angle CSB=180^{0}-2\cdot x.$$

Budući da je

$$\angle CSA+\angle BSA+\angle CSB=360^{0},$$

slijedi

$$\angle CSA = 360^0 - \angle BSA - \angle CSB \Rightarrow \angle CSA = 360^0 - \left(13^0 12' + 2\cdot x\right) - \left(180^0 - 2\cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\angle CSA = 360^0 - 13^0 12' - 2\cdot x - 180^0 + 2\cdot x \Rightarrow \angle CSA = 180^0 - 13^0 12' \Rightarrow \angle CSA = 179^0 60' - 13^0 12' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CSA = 166^0 48'.$$

Traženi kut α = < ACS, iznosi:

$$\angle CAS + \angle CSA + \angle ACS = 180^0 \Rightarrow \alpha + 166^0 48' + \alpha = 180^0 \Rightarrow 2\cdot\alpha = 180^0 - 166^0 48' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha = 179^0 60' - 166^0 48' \Rightarrow 2\cdot\alpha = 13^0 12' \Rightarrow \left[1^0 = 60'\right] \Rightarrow 2\cdot\alpha = 12^0 72' \ /:2 \Rightarrow \alpha = 6^0 36'.$$

Vježba 045

Na kružnici sa središtem S zadane su točke A, B, C tako da je < ABC = 80º. Odredite < ACS.

Rezultat: 10º.

Zadatak 046 (Ivana, gimnazija)

Dvije koncentrične kružnice polumjera 1 i 7 cm određuju kružni vijenac. Koliki je polumjer treće, prvim dvjema koncentrične kružnice, koja ovaj kružni vijenac dijeli na dva vijenca jednakih površina?

Rješenje 046

Ponovimo!

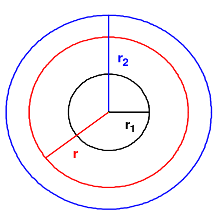
Površina kruga polumjera r:

$$P = r^2\cdot\pi.$$

Površina kružnog vijenca određenog koncentričnim kružnicama (imaju zajedničko središte) polumjera r_1 i r_2 ($r_2 > r_1$):

$$P = r_2^2\cdot\pi - r_1^2\cdot\pi \Rightarrow P = \left(r_2^2 - r_1^2\right)\cdot\pi.$$

Budući da treća koncentrična kružnica polumjera r mora dijeliti zadani kružni vijenac na dva vijenca jednakih površina, slijedi:



$$r^2\cdot\pi - r_1^2\cdot\pi = r_2^2\cdot\pi - r^2\cdot\pi \ /:\pi \Rightarrow r^2 - r_1^2 = r_2^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + r^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow 2\cdot r^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{(1\ cm)^2 + (7\ cm)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1\ cm^2 + 49\ cm^2}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{50\ cm^2}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{25\ cm^2} \Rightarrow r = 5\ cm.$$

Vježba 046

Dvije koncentrične kružnice polumjera $\sqrt{2}$ i 4 cm određuju kružni vijenac. Koliki je polumjer treće, prvim dvjema koncentrične kružnice, koja ovaj kružni vijenac dijeli na dva vijenca jednakih površina?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 047 (Marijan, gimnazija)

Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine manjeg kruga. Odredi omjer duljina polumjera veće i manje kružnice.

Rješenje 047

Ponovimo!

Površina kruga polumjera r:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Površina kružnog vijenca određenog koncentričnim kružnicama (imaju zajedničko središte) polumjera R i r (R > r):

$$P = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi.$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \; / \cdot \frac{4}{\pi} \Rightarrow 4 \cdot R^2 - 4 \cdot r^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot R^2 = r^2 + 4 \cdot r^2 \Rightarrow 4 \cdot R^2 = 5 \cdot r^2 \; / \cdot \frac{1}{4 \cdot r^2} \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{5}{4} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vježba 047

Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine većeg kruga. Odredi omjer duljina polumjera veće i manje kružnice.

Rezultat: $\frac{R}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Zadatak 048 (Hana Hana, srednja škola)

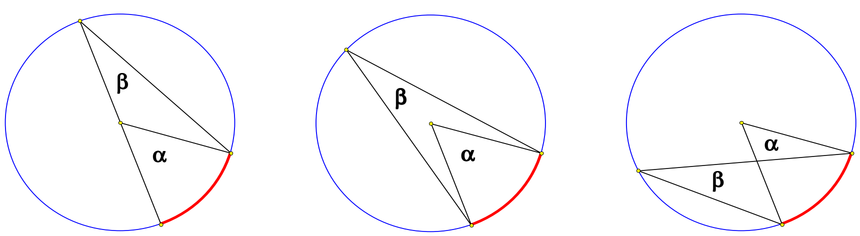
Točke A, B i C su točke kružnice sa središtem u točki S. Ako je kut ACB = 30º, te | AS | = 3 cm, kolika je površina kružnog isječka ASB i kolika je duljina kružnog luka ACB?

Rješenje 048

Ponovimo!

Poučak o obodnom i središnjem kutu:

Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.



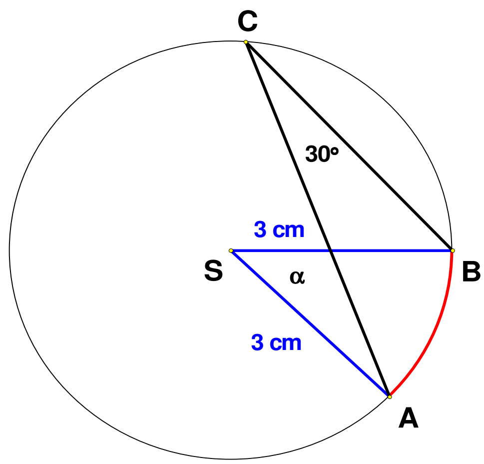
$$\alpha = 2 \cdot \beta \quad , \quad \beta = \frac{1}{2} \cdot \alpha.$$

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha,$$

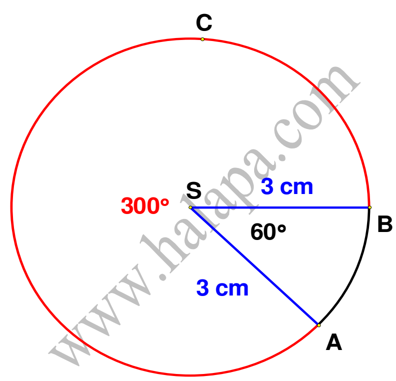
a površina kružnog isječka s istim središnjim kutom α dana je s

$$P(\alpha) = \frac{r^2 \cdot \pi}{360^0} \cdot \alpha \quad \text{ili} \quad P = \frac{l \cdot r}{2}.$$



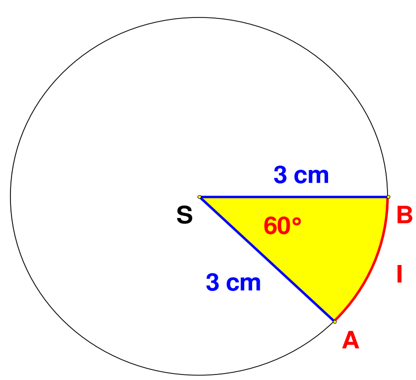
Sa slike vidi se da je kut ASB = α središnji kut pa je dva put veći od obodnog kuta ACB nad istim lukom $\overset{\frown}{AB}$:

$$\alpha = 60^0.$$



Duljina kružnog luka $\overset{\frown}{ACB}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 3\ cm\ ,\ \alpha = 300^0 \\ l(\alpha) = \dfrac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l(\alpha) = \frac{3\ cm \cdot \pi}{180^0} \cdot 300^0 \Rightarrow l(\alpha) = \frac{900^0 \cdot \pi}{180^0}\ cm \Rightarrow l(\alpha) = 5 \cdot \pi\ cm.$$



Površina kružnog isječka ASB iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} l=\dfrac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha\ ,\ r=3\ cm\ ,\ \alpha=60^0 \\ P=\dfrac{l\cdot r}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} l=\dfrac{3\ cm\cdot\pi}{180^0}\cdot 60^0\ ,\ r=3\ cm \\ P=\dfrac{l\cdot r}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} l=\dfrac{180^0\cdot\pi}{180^0}\ cm\ ,\ r=3\ cm \\ P=\dfrac{l\cdot r}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} l=\pi\ cm\ ,\ r=3\ cm \\ P=\dfrac{l\cdot r}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow P=\frac{\pi\ cm\cdot 3\ cm}{2}\Rightarrow P=\frac{3}{2}\cdot\pi\ cm^2.$$

Vježba 048

Točke A, B i C su točke kružnice sa središtem u točki S. Ako je kut ACB = 30º, te | AS | = 6 cm, kolika je površina kružnog isječka ASB?

Rezultat: $6\cdot\pi\ cm^2$.

Zadatak 049 (Zoran, gimnazija)

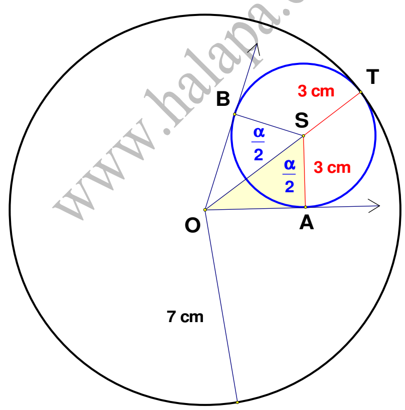
Dvije se kružnice dodiruju iznutra. Manjoj je polumjer 3 cm, a većoj 7 cm. Kolika je duljina luka manje kružnice koji se vidi iz središta veće kružnice?

Rješenje 049

Ponovimo!

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha.$$



Sa slike vidi se:

$$|SA|=|SB|=|ST|=3\ ,\ |OT|=7\ ,\ |OS|=|OT|-|ST|=7-3=4.$$

Uočimo pravokutan trokut OAS i pomoću funkcije kosinus izračunamo središnji kut α:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{|SA|}{|OS|}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=41.41^0\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=41.41^0\ /\cdot 2\Rightarrow\alpha=82.82^0.$$

Duljina luka manje kružnice koji se vidi iz središta veće kružnice iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r=3\ cm\ ,\ \alpha=82.82^0 \\ l=\dfrac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow l=\frac{3\ cm\cdot\pi}{180^0}\cdot 82.82^0\Rightarrow l=4.34\ cm.$$

Vježba 049

Dvije se kružnice dodiruju iznutra. Manjoj je polumjer 3 cm, a većoj 7 cm. Kolika je duljina luka manje kružnice koji se ne vidi iz središta veće kružnice?

Rezultat: 14.51 cm.

Zadatak 050 (Malena, gimnazija)

Kružnica je točkama A, B, C podijeljena na 3 dijela koji se odnose kao 2 : 3 : 5. Koliki su kutovi trokuta ABC?

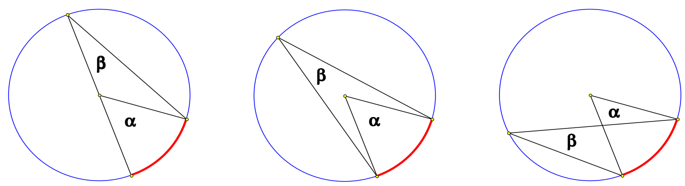
Rješenje 050

Ponovimo!

Poučak o obodnom i središnjem kutu:

Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.

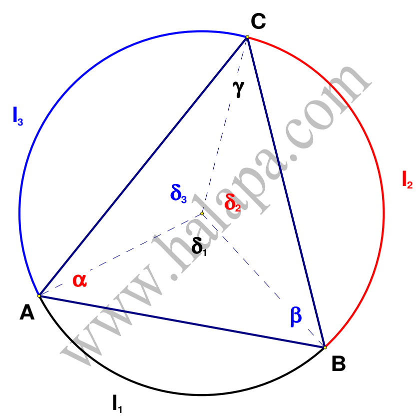
$$\alpha = 2 \cdot \beta \quad , \quad \beta = \frac{1}{2} \cdot \alpha.$$



Puni kut ima 360°.

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha.$$



Budući da su duljina luka kružnice i pripadni središnji kut proporcionalni, vrijedi:

$$l_1 : l_2 : l_3 = 2 : 3 : 5 \Rightarrow \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 2 : 3 : 5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \delta_1 = 2 \cdot k \\ \delta_2 = 3 \cdot k \\ \delta_3 = 5 \cdot k \end{matrix}\right\} - k \text{ koeficijent proporcionalnosti.}$$

Računamo središnje kutove σ1, σ2 i σ3:

$$\left.\begin{matrix} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 360^0 \\ \delta_1 = 2 \cdot k \ , \ \delta_2 = 3 \cdot k \ , \ \delta_3 = 5 \cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot k + 3 \cdot k + 5 \cdot k = 360^0 \Rightarrow 10 \cdot k = 360^0 \ /:10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 36^0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \delta_1 = 2 \cdot 36^0 \\ \delta_2 = 3 \cdot 36^0 \\ \delta_3 = 5 \cdot 36^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \delta_1 = 72^0 \\ \delta_2 = 108^0 \\ \delta_3 = 180^0 \end{matrix}\right\}.$$

Kutovi trokuta ABC iznose:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\frac{1}{2}\cdot\delta_2 \\ \beta=\frac{1}{2}\cdot\delta_3 \\ \gamma=\frac{1}{2}\cdot\delta_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=\frac{1}{2}\cdot 108^0 \\ \beta=\frac{1}{2}\cdot 180^0 \\ \gamma=\frac{1}{2}\cdot 72^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=54^0 \\ \beta=90^0 \\ \gamma=36^0 \end{array}\right\}.$$

Vježba 050

Kružnica je točkama A, B, C podijeljena na 3 dijela koji se odnose kao 4 : 6 : 10. Koliki su kutovi trokuta ABC?

Rezultat: $\alpha = 54°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 36°$.

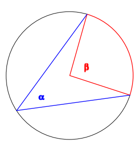
Zadatak 051 (Miro, gimnazija)

Kolika je duljina tetive koja pripada obodnom kutu od 15° u kružnici polumjera 10 cm?

Rješenje 051

Ponovimo!

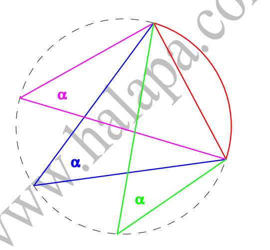
Poučak o obodnom i središnjem kutu



Središnji kut nad lukom kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.

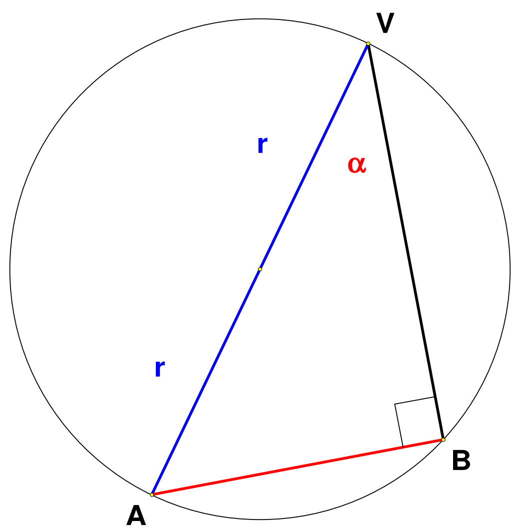
$\alpha=\frac{1}{2}\cdot\beta$, $\beta=2\cdot\alpha$.

Svi su obodni kutovi nad danom tetivom kružnice sukladni. Pritom su njihovi vrhovi na kružnici s iste strane tetive.



Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.



Budući da su svi obodni kutovi nad danom tetivom kružnice sukladni, odabrat ćemo onaj obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$ kojem jedan krak prolazi središtem kružnice. Zbog Talesova poučka slijedi da je trokut Δ ABV pravokutan, a kut $\angle ABV$ je pravi. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} |AV| = 2 \cdot r \\ \sin\alpha = \dfrac{|AB|}{|AV|} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{|AB|}{2 \cdot r} \;/\cdot 2 \cdot r \Rightarrow |AB| = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = 2 \cdot 10 \; cm \cdot \sin 15^0 \Rightarrow |AB| = 5.18 \; cm.$$

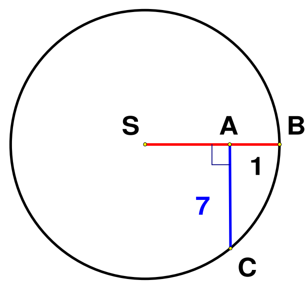
Vježba 051

Kolika je duljina tetive koja pripada obodnom kutu od 15° u kružnici polumjera 20 cm?

Rezultat: 10.35 cm.

Zadatak 052 (Ivana, THK)

Odredite polumjer kružnice sa slike.



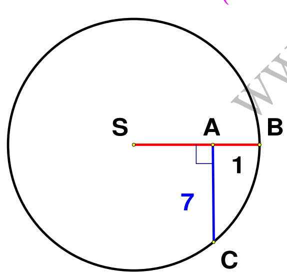
Rješenje 052

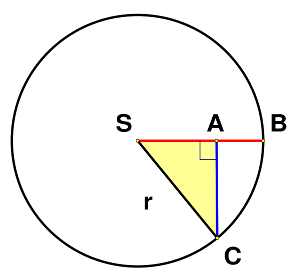
Ponovimo!

Pitagorin poučak:

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$





Sa slike vidi se:

$$|SB| = |SC| = r \quad , \quad |AB| = 1 \; cm \quad , \quad |CA| = 7 \; cm \quad , \quad |SA| = |SB| - |AB| = r - 1.$$

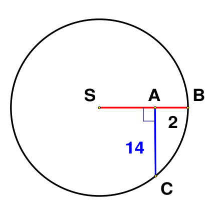
Uočimo pravokutan trokut SCA i pomoću Pitagorina poučka izračunamo polumjer r.

$$|SC|^2 = |CA|^2 + |SA|^2 \Rightarrow r^2 = 7^2 + (r-1)^2 \Rightarrow r^2 = 49 + r^2 - 2 \cdot r + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 49 + r^2 - 2 \cdot r + 1 \Rightarrow 2 \cdot r = 49 + 1 \Rightarrow 2 \cdot r = 50 \;/: 2 \Rightarrow r = 25 \Rightarrow r = 25 \; cm.$$

Vježba 052

Odredite polumjer kružnice sa slike.



Rezultat: 50.

Zadatak 053 (MARY ENI, gimnazija)

U kružni odsječak središnjeg kuta 120° upisan je kvadrat duljine stranice 3 cm. Koliki je polumjer kruga?

Rješenje 053

Ponovimo!

Pitagorin poučak:

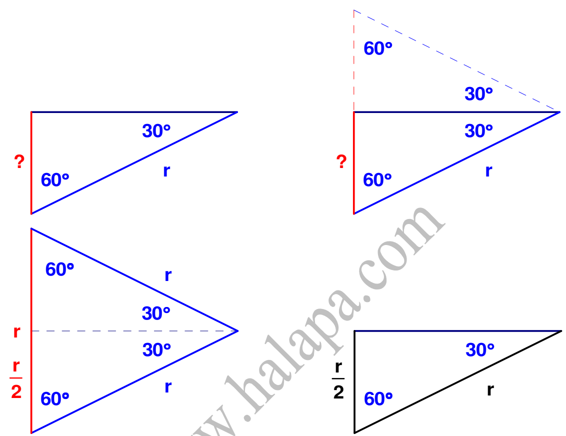
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

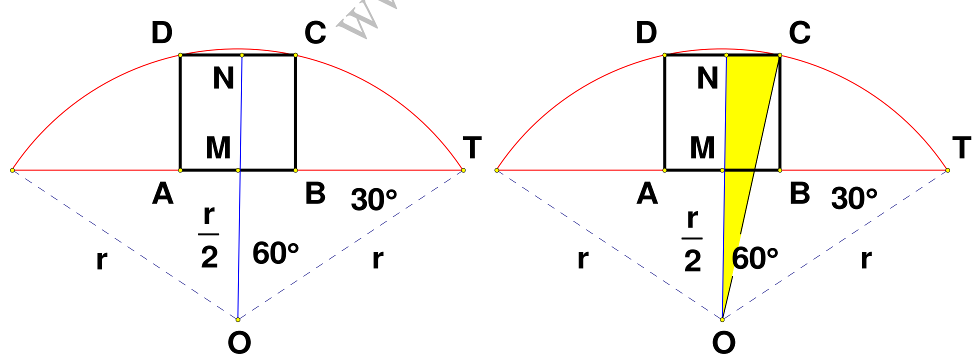
$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Trokut kojemu su sve tri stranice sukladne zove se jednakostraničan trokut.

Za pravokutan trokut sa šiljastim kutovima od 30° i 60° vrijedi da je duljina kraće katete jednaka polovici duljine hipotenuze.





Sa slika vidi se:

$$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=|MN|=3 \quad , \quad |CN|=\frac{3}{2} \quad , \quad |OT|=|OC|=r.$$

$$|OM|=\frac{r}{2} \quad , \quad \angle MOT=60^0 \quad , \quad \angle OTM=30^0.$$

Uočimo pravokutan trokut OCN i pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$|ON|^2=|OC|^2-|CN|^2 \Rightarrow |ON|^2=r^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow |ON|^2=r^2-\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |ON|^2 = r^2 - \frac{9}{4} \;/\sqrt{\;} \quad \Rightarrow \quad |ON| = \sqrt{r^2 - \frac{9}{4}}.$$

Također vrijedi:

$$|ON| = |OM| + |MN| \quad \Rightarrow \quad |ON| = \frac{r}{2} + 3.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se polumjer kruga r.

$$\left.\begin{array}{l} |ON| = \sqrt{r^2 - \frac{9}{4}} \\ |ON| = \frac{r}{2} + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{r^2 - \frac{9}{4}} = \frac{r}{2} + 3 \Rightarrow \sqrt{r^2 - \frac{9}{4}} = \frac{r}{2} + 3 \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{r^2 - \frac{9}{4}}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + 3\right)^2 \Rightarrow r^2 - \frac{9}{4} = \frac{r^2}{4} + 3 \cdot r + 9 \Rightarrow r^2 - \frac{9}{4} = \frac{r^2}{4} + 3 \cdot r + 9 \;/ \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot r^2 - 9 = r^2 + 12 \cdot r + 36 \Rightarrow 4 \cdot r^2 - 9 - r^2 - 12 \cdot r - 36 = 0 \Rightarrow 3 \cdot r^2 - 12 \cdot r - 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot r^2 - 12 \cdot r - 45 = 0 \;/ : 3 \Rightarrow r^2 - 4 \cdot r - 15 = 0.$$

Kvadratnu jednadžbu možemo riješiti na dva načina.

1.inačica (dopunjavanje do potpunog kvadrata, iz prva dva člana kvadratnog trinoma nalazimo treći član tako da cijeli trinom bude potpuni kvadrat)

$$r^2 - 4 \cdot r - 15 = 0 \Rightarrow r^2 - 4 \cdot r + 4 - 4 - 15 = 0 \Rightarrow \left(r^2 - 4 \cdot r + 4\right) - 4 - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(r^2 - 4 \cdot r + 4\right) - 4 - 15 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 - 19 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 19 \Rightarrow (r-2)^2 = 19 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r - 2 = \pm\sqrt{19} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{19} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = 2 + \sqrt{19} \\ r_2 = 2 - \sqrt{19} \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 2 + \sqrt{19} \Rightarrow r = 6.359.$$

2.inačica (koristimo formulu)

$$r^2 - 4 \cdot r - 15 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2 - 4 \cdot r - 15 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -4 \;,\; c = -15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -4 \;,\; c = -15 \\ r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 60}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{19}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(2 \pm \sqrt{19}\right)}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(2 \pm \sqrt{19}\right)}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{19} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = 2 + \sqrt{19} \\ r_2 = 2 - \sqrt{19} \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 2 + \sqrt{19} \Rightarrow r = 6.359.$$

Vježba 053

U kružni odsječak središnjeg kuta 120° i polumjera kruga $2 + \sqrt{19}$ upisan je kvadrat. Kolika je duljina stranice kvadrata?

Rezultat: 3.

Zadatak 054 (Josipa, srednja škola)

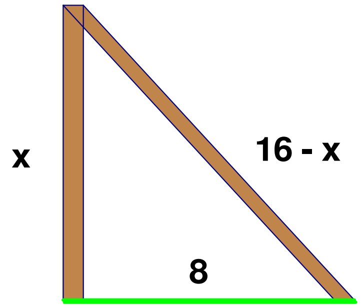
Oluja slomi stup visine 16 m i pritom mu vrh dodirne zemlju 8 m daleko od podnožja. Na kojoj se visini slomio stup?

Rješenje 054

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Neka je x visina na kojoj se stup slomio. Sa slike vidi se:



$$(16-x)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow 256 - 32\cdot x + x^2 = x^2 + 64 \Rightarrow 256 - 32\cdot x + x^2 = x^2 + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 256 - 32\cdot x = 64 \Rightarrow -32\cdot x = 64 - 256 \Rightarrow -32\cdot x = -192 \Rightarrow -32\cdot x = -192 \; /:(-32) \Rightarrow x = 6.$$

Stup se slomio na visini 6 m od zemlje.

Vježba 054

Oluja slomi stablo visine 18 m i pritom mu vrh dodirne zemlju 6 m daleko od podnožja. Na kojoj se visini slomilo stablo?

Rezultat: 8 m.

Zadatak 055 (Ivana, gimnazija)

Polumjeri triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana odnose se kao 3 : 5 : 7. Nađi omjer udaljenosti njihovih središta.

Rješenje 055

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a\cdot n) : (b\cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

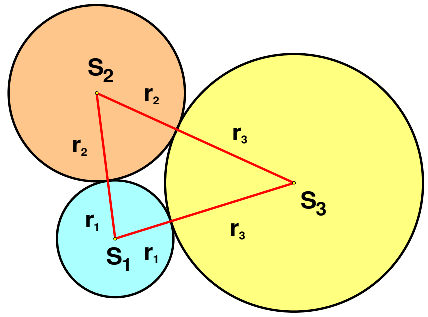
a : b = c : d.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$



Za polumjere triju kružnica vrijedi omjer:

$$r_1 : r_2 : r_3 = 3 : 5 : 7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = 3 \cdot t \\ r_2 = 5 \cdot t \\ r_3 = 7 \cdot t \end{array}\right\}.$$

Središta kružnica su vrhovi trokuta $S_1S_2S_3$. Budući da su duljine stranica tog trokuta udaljenosti središta kružnica, slijedi:

$$\left|S_1S_2\right| = r_1 + r_2 = 3 \cdot t + 5 \cdot t = 8 \cdot t,$$

$$\left|S_1S_3\right| = r_1 + r_3 = 3 \cdot t + 7 \cdot t = 10 \cdot t,$$

$$\left|S_2S_3\right| = r_2 + r_3 = 5 \cdot t + 7 \cdot t = 12 \cdot t.$$

Omjer udaljenosti središta kružnica iznosi:

$$\left|S_1S_2\right| : \left|S_1S_3\right| : \left|S_2S_3\right| = (8 \cdot t) : (10 \cdot t) : (12 \cdot t) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{članove razmjera} \\ \text{podijelimo sa } 2 \cdot t \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|S_1S_2\right| : \left|S_1S_3\right| : \left|S_2S_3\right| = 4 : 5 : 6.$$

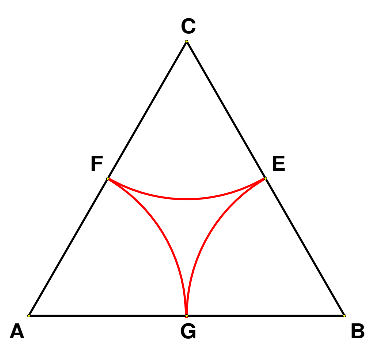
Vježba 055

Polumjeri triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana odnose se kao 6 : 10 : 14. Nađi omjer udaljenosti njihovih središta.

Rezultat: 4 : 5 : 6.

Zadatak 056 (Crnka, gimnazija)

Neka je ABC jednakostraničan trokut stranice a. Odredi opseg krivocrtnog trokuta nacrtanog na slici.



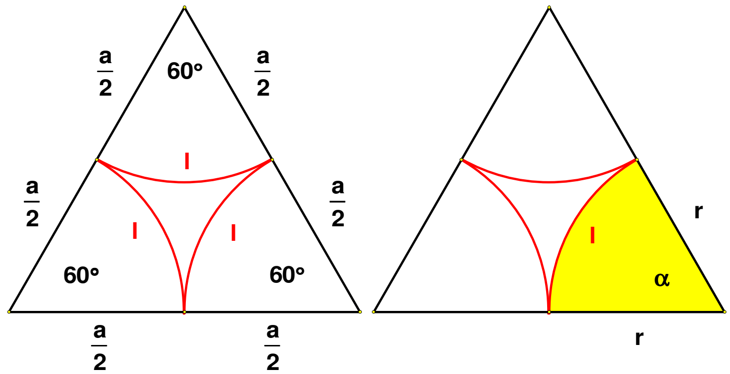
Rješenje 056

Ponovimo!

Zbroj svih kutova u trokutu je 180°. Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Svi kutovi jednakostraničnog trokuta jednaki su i svaki kut iznosi 60°.

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka l sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom:

$$l = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha .$$



Sa slika vidi se:

$$\alpha = 60^0 \quad , \quad r = \frac{a}{2}$$

Duljina luka l iznosi:

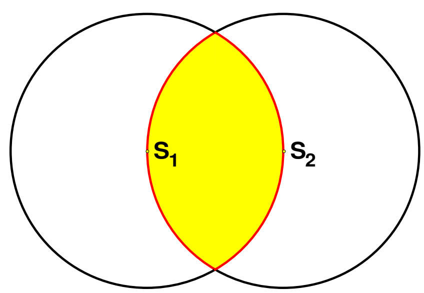
$$l = \frac{r \cdot \pi}{180^0} \cdot \alpha \Rightarrow l = \frac{\frac{a}{2} \cdot \pi}{180^0} \cdot 60^0 \Rightarrow l = \frac{\frac{a}{2} \cdot \pi}{180^0} \cdot 60^0 \Rightarrow l = \frac{\frac{a}{2} \cdot \pi}{3} \Rightarrow l = \frac{a \cdot \pi}{6}.$$

Opseg krivocrtnog trokuta je:

$$\left. \begin{array}{l} O = 3 \cdot l \\ l = \frac{a \cdot \pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow O = 3 \cdot \frac{a \cdot \pi}{6} \Rightarrow O = 3 \cdot \frac{a \cdot \pi}{6} \Rightarrow O = \frac{a \cdot \pi}{2}.$$

Vježba 056

Svaka od dviju kružnica jednakih polumjera prolazi središtem druge kružnice. Izračunaj opseg presjeka pripadnih krugova.



Rezultat: $\frac{4 \cdot r \cdot \pi}{3}.$

Zadatak 057 (Amazonka, gimnazija)

Dvije kružnice jednakog polumjera r diraju se izvana, a obje, jednu u točki A, drugu u točki B, dira treća kružnica polumjera 8 cm. Ako je $|AB| = 12$ cm, koliki je r?

Rješenje 057

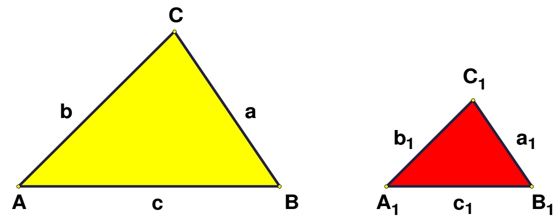
Ponovimo!

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1\quad ,\quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

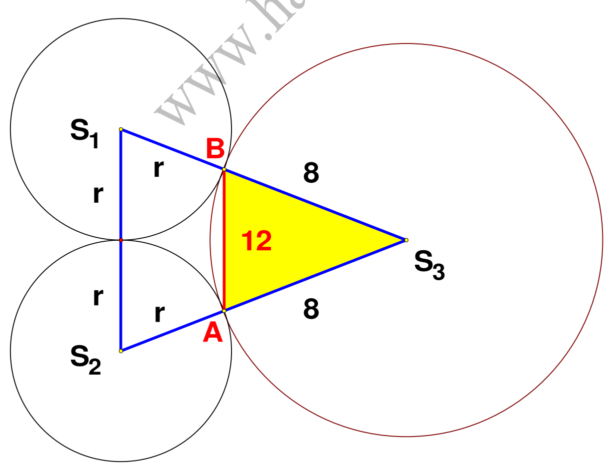
$$a:b=k\quad i\quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d\ \Rightarrow\ a\cdot d=b\cdot c.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|S_1S_2\right|=2\cdot r\quad ,\quad \left|AB\right|=12\quad ,\quad \left|S_1B\right|=\left|S_2A\right|=r\quad ,\quad \left|BS_3\right|=\left|AS_3\right|=8$$
$$\left|S_1S_3\right|=\left|S_1B\right|+\left|BS_3\right|=r+8\quad ,\quad \left|S_2S_3\right|=\left|S_2A\right|+\left|AS_3\right|=r+8.$$

Uočimo da su jednakokračni trokuti $\Delta S_1S_2S_3$ i ΔBAS_3 slični jer se podudaraju u dva kuta (K – K) pa vrijedi razmjer:

$$\left|S_1S_2\right|:\left|S_1S_3\right|=\left|BA\right|:\left|BS_3\right|\ \Rightarrow\ 2r:(r+8)=12:8\ \Rightarrow\ 8\cdot 2\cdot r=12\cdot(r+8)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 16\cdot r=12\cdot r+96\ \Rightarrow\ 16\cdot r-12\cdot r=96\ \Rightarrow\ 4\cdot r=96\ \Rightarrow\ 4\cdot r=96\ /:4\ \Rightarrow\ r=24.$$

Polumjer r iznosi 24 cm.

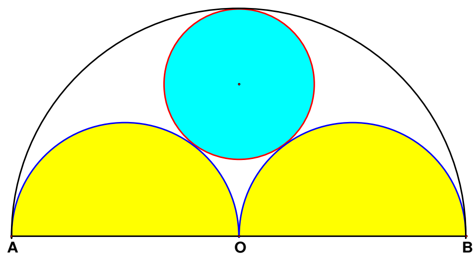
Vježba 057

Dvije kružnice jednakog polumjera r diraju se izvana, a obje, jednu u točki A, drugu u točki B, dira treća kružnica polumjera 16 cm. Ako je | AB | = 24 cm, koliki je r?

Rezultat: 48 cm.

Zadatak 058 (Amazonka, gimnazija)

Nad dužinom $\overline{AB}$, | AB | = a, opisana je polukružnica, a potom još dvije sukladne polukružnice. Potom je u dio ravnine što je omeđen tim trima polukružnicama upisana kružnica koja ih sve tri dira (vidi sliku). Koliki je polumjer te kružnice?



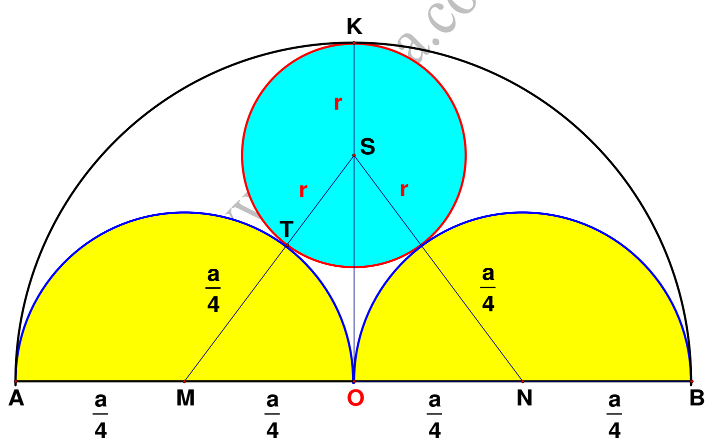
Rješenje 058

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Pitagorin poučak

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

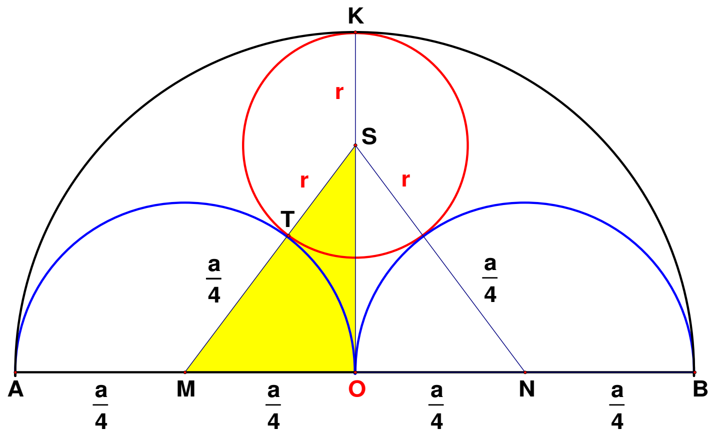


Sa slike vidi se:

$$|AB| = a \quad , \quad |OA| = |OB| = |OK| = \frac{1}{2} \cdot a \quad , \quad |MT| = \frac{1}{4} \cdot a \quad , \quad |TS| = |SK| = r$$

$$|MO| = \frac{1}{2} \cdot |OA| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{4} \cdot a \quad , \quad |MS| = |MT| + |TS| = \frac{1}{4} \cdot a + r$$

$$|OS| = |OK| - |SK| = \frac{1}{2} \cdot a - r.$$



Uočimo pravokutan trokut ΔMOS i uporabom Pitagorina poučka dobijemo polumjer r.

$$|MS|^2 = |MO|^2 + |OS|^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\cdot a + r\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\cdot a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot a - r\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16}\cdot a^2 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + r^2 = \frac{1}{16}\cdot a^2 + \frac{1}{4}\cdot a^2 - a\cdot r + r^2 \Rightarrow$$

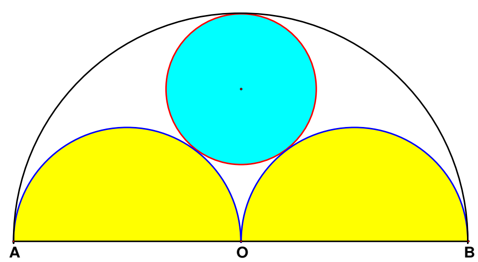
$$\Rightarrow \frac{1}{16}\cdot a^2 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + r^2 = \frac{1}{16}\cdot a^2 + \frac{1}{4}\cdot a^2 - a\cdot r + r^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot r = \frac{1}{4}\cdot a^2 - a\cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + a\cdot r = \frac{1}{4}\cdot a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot r + a\cdot r = \frac{1}{4}\cdot a^2 \ /\cdot\frac{4}{a} \Rightarrow 2\cdot r + 4\cdot r = a \Rightarrow 6\cdot r = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot r = a \ /\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow r = \frac{1}{6}\cdot a.$$

Vježba 058

Nad dužinom $\overline{AB}$, $|AB| = a$, opisana je polukružnica, a potom još dvije sukladne polukružnice. Potom je u dio ravnine što je omeđen tim trima polukružnicama upisana kružnica koja ih sve tri dira (vidi sliku). Koliki je opseg te kružnice?



Rezultat: $\frac{1}{3}\cdot a\cdot\pi.$

Zadatak 059 (Ella, gimnazija)

Površina kružnog isječka je $\frac{75}{2}\cdot\pi\ cm^2$. Izračunaj opseg kruga ako se duljina luka i polumjer odnose kao π : 3.

Rješenje 059

Ponovimo!

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha,$$

a površina kružnog isječka s istim središnjim kutom α dana je s

$$P=\frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot\alpha.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Računamo središnji kut α.

$$\left.\begin{array}{l} l:r=\pi:3 \\ l=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot l=r\cdot\pi \\ l=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot l=r\cdot\pi \;/:3 \\ l=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l=\frac{r\cdot\pi}{3} \\ l=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha=\frac{r\cdot\pi}{3} \Rightarrow \frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha=\frac{r\cdot\pi}{3} \;/\cdot\frac{180^0}{r\cdot\pi} \Rightarrow \alpha=60^0.$$

Polumjer kružnice iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=60^0 \\ P=\frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot\alpha \\ P=\frac{75}{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 60^0 \\ P=\frac{75}{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{r^2\cdot\pi}{360^0}\cdot 60^0 \\ P=\frac{75}{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{r^2\cdot\pi}{6} \\ P=\frac{75}{2}\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2\cdot\pi}{6}=\frac{75}{2}\cdot\pi \Rightarrow \frac{r^2\cdot\pi}{6}=\frac{75}{2}\cdot\pi \;/\cdot\frac{6}{\pi} \Rightarrow r^2=225 \Rightarrow r^2=225 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow r=\sqrt{225} \Rightarrow r=15\ cm.$$

Opseg kruga ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} r=15\ cm \\ O=2\cdot r\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot 15\ cm\cdot\pi \Rightarrow O=30\cdot\pi\ cm.$$

Vježba 059

Površina kružnog isječka je $\frac{75}{2}\cdot\pi\ cm^2$. Izračunaj površinu kruga ako se duljina luka i polumjer odnose kao π : 3.

Rezultat: $225\cdot\pi\ cm^2$.

Zadatak 060 (Sany, strukovna škola)

Kotač u obliku kruga prijeđe put od 12.56 km i napravi 5000 okretaja. Koliki je njegov polumjer?

Rješenje 060

Ponovimo!

$$1\ km=1000\ m.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Krug je geometrijski lik omeđen kružnicom.
Krug je skup svih točaka u ravnini čija je udaljenost od određene točke, koju zovemo središte kruga, manja ili jednaka određenom broju, koji zovemo polumjer kruga. Opseg kružnice i kruga:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Prijeđeni put s izražen u metrima je:

$$s = 12.56\ km = 12.56 \cdot 1000\ m = 12\,560\ m.$$

Na tom putu kotač napravi 5000 okretaja pa jedan okretaj iznosi:

$$\frac{s}{5\,000} = \frac{12\,560\ m}{5\,000} = 2.512\ m.$$

Budući da kotač ima oblik kruga, jedan njegov okretaj jednak je opsegu. Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ O = 2.512\ m \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi = 2.512\ m \Rightarrow 2 \cdot r \cdot \pi = 2.512\ m \ /\cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2.512\ m}{2 \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{2.512\ m}{2 \cdot 3.14} \Rightarrow r = 0.4\ m.$$

Vježba 060

Kotač u obliku kruga prijeđe put od 25.12 km i napravi 10000 okretaja. Koliki je njegov polumjer?

Rezultat: 0.4 m.