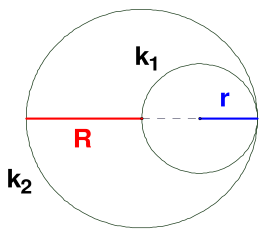
## Zadatak 021 (Ana, gimnazija)

Kružnica $k_1$ dodiruje kružnicu $k_2$ i prolazi kroz njezino središte. Ako je površina kruga određenog kružnicom $k_1$ jednaka 4, kolika je površina određena s $k_2$ ?

## Rješenje 021




Iz površine kruga određenog kružnicom $k_1$ nađemo njegov polumjer:

$$r^2 \cdot \pi = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \; /\sqrt{\phantom{x}} \; \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Površina kruga određenog kružnicom $k_2$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} R = 2 \cdot r \\ P = R^2 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow P = (2 \cdot r)^2 \cdot \pi = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \cdot \pi = 4 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \pi = 16.$$

## Vježba 021

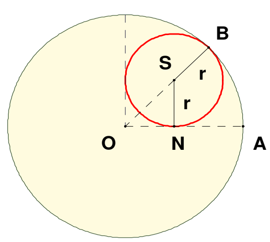
Kružnica $k_1$ dodiruje kružnicu $k_2$ i prolazi kroz njezino središte. Ako je površina kruga određenog kružnicom $k_1$ jednaka 16, kolika je površina određena s $k_2$ ?

**Rezultat:** 64.

## Zadatak 022 (Fredy, gimnazija)

U četvrtinu kruga polumjera $1+\sqrt{2}$ upisana je kružnica. Koliko iznosi polumjer te kružnice?

## Rješenje 022




$$|OB| = 1+\sqrt{2} \;,\; |SB| = r$$

Budući da je trokut ONS pravokutan i jednakokračan, vrijedi:

$$|OS| = r \cdot \sqrt{2}.$$

Traženi polumjer iznosi:

$$|OB| = |OS| + |SB| \Rightarrow 1+\sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2} + r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{2} = r \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) \; /:\left(\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow r = 1.$$



## Vježba 022

U četvrtinu kruga polumjera $2+2\cdot\sqrt{2}$ upisana je kružnica. Koliko iznosi polumjer te kružnice?

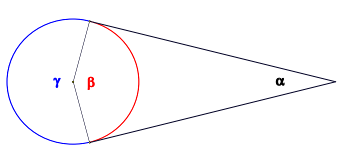
**Rezultat:** r =2.

## Zadatak 023 (Ana, gimnazija)

Kraci kuta α ($0 \le \alpha \le 90^\circ$) diraju kružnicu. Dirališta dijele luk kružnice u omjeru 3 : 5. Nađi kut α.

## Rješenje 023

Gledaj sliku!




1.inačica

Kutove β i γ izrazimo pomoću kuta α:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = 180^0 \\ \gamma+\beta = 360^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 180^0 - \alpha \\ \gamma = 360^0 - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 180^0 - \alpha \\ \gamma = 360^0 - \left(180^0 - \alpha\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 180^0 - \alpha \\ \gamma = 360^0 - 180^0 + \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 180^0 - \alpha \\ \gamma = 180^0 + \alpha \end{array}\right\}.$$

Pomoću zadanog omjera dobije se kut α:

$$\beta : \gamma = 3 : 5 \Rightarrow 5 \cdot \beta = 3 \cdot \gamma \Rightarrow 5 \cdot \left(180^0 - \alpha\right) = 3 \cdot \left(180^0 + \alpha\right) \Rightarrow 900^0 - 5 \cdot \alpha = 540^0 + 3 \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \cdot \alpha - 3 \cdot \alpha = 540^0 - 900^0 \Rightarrow -8 \cdot \alpha = -360^0 \; /:(-8) \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\beta+\gamma=360^0\\ \beta:\gamma=3:5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta+\gamma=360^0\\ \beta=3\cdot k\ ,\ \gamma=5\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot k+5\cdot k=360^0 \Rightarrow 8\cdot k=360^0 \ /:8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=45^0 \Rightarrow \beta=3\cdot 45^0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta=135^0\\ \alpha+\beta=180^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta=135^0\\ \alpha=180^0-\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=180^0-135^0=45^0.$$

**Vježba 023**

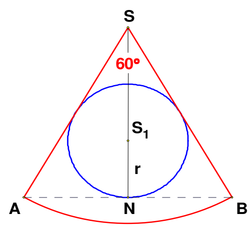
Kraci kuta α (0 ≤ α < 180º) diraju kružnicu. Dirališta dijele luk kružnice u omjeru 2 : 7. Nađi kut α.

**Rezultat:** α = 100º.

**Zadatak 024 (Ana, gimnazija)**

U kružni isječak sa središnjim kutom 60º upisan je krug polumjera r. Nađi polumjer kružnog isječka.

**Rješenje 024**




$$|NS_1| = r$$

Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice.
Težište je točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice trokuta.

Točka $S_1$ je težište jednakostraničnog trokuta ABS.

Budući da težište $S_1$ dijeli težišnicu $\overline{SN}$ u omjeru 2 : 1, polumjer kružnog isječka jednak je:

$$R = |SN| = 3\cdot r.$$

**Vježba 024**

U kružni isječak sa središnjim kutom 60º upisan je krug polumjera 5. Nađi polumjer kružnog isječka.

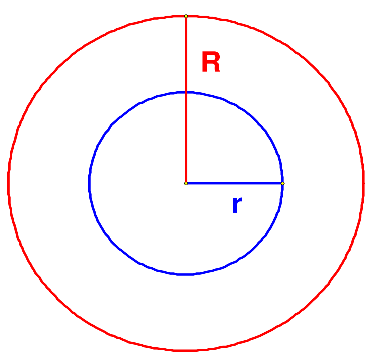
**Rezultat:** 15.



**Zadatak 025 (Ana, gimnazija)**

Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine unutarnjeg kruga. Koliki je omjer polumjera unutarnjeg i vanjskog kruga?

**Rješenje 025**




Površina kružnog vijenca: $P_{kv}=R^2\cdot\pi-r^2\cdot\pi.$

Površina unutarnjeg kruga: $P_{uk}=r^2\cdot\pi.$

$$P_{kv}=\frac{1}{4}\cdot P_{uk} \Rightarrow R^2\cdot\pi-r^2\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \ /:\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2-r^2=\frac{1}{4}\cdot r^2 \Rightarrow R^2=\frac{5}{4}\cdot r^2 \ /\cdot\frac{4}{5\cdot R^2} \Rightarrow \frac{r^2}{R^2}=\frac{4}{5} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R}=\sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow \frac{r}{R}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow r:R=2:\sqrt{5}.$$

**Vježba 025**

Površina kružnog vijenca jednaka je polovini površine unutarnjeg kruga. Koliki je omjer polumjera unutarnjeg i vanjskog kruga?

**Rezultat:** $r:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}.$

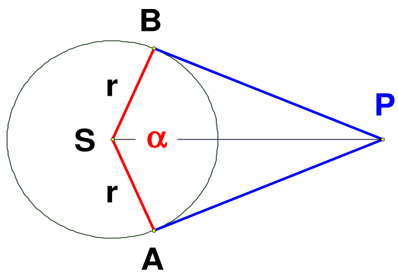
**Zadatak 026 (Vedrana, Gregor, gimnazija)**

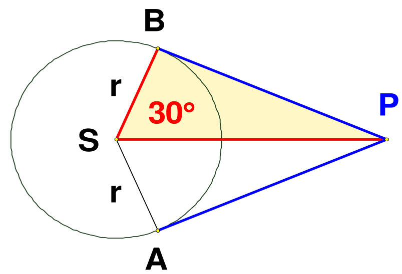
Iz točke P izvan kružnice polumjera r = 12 cm vidi se luk kružnice duljine l = 4 · π cm. Kolika je udaljenost točke P od središta kružnice?

**Rješenje 026**

Pomoću formule za duljinu luka kružnice nađemo pripadni središnji kut α:

$$l=\frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^0}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{l\cdot180^0}{r\cdot\pi}=\frac{4\cdot\pi\ cm\cdot180^0}{12\ cm\cdot\pi}=60^0.$$




Četverokut APBS je deltoid. Deltoid je četverokut koji bar jedna dijagonala dijeli na dva preklopiva (sukladna) trokuta. Zato kut $\angle BSP$ iznosi:

$$\angle BSP=\frac{1}{2}\cdot\angle BSA=\frac{1}{2}\cdot\alpha=\frac{1}{2}\cdot60^0=30^0.$$

Uočimo pravokutan trokut SPB. Udaljenost točke P od središta S kružnice je:

$$\cos30^0=\frac{r}{|SP|}\ \Rightarrow\ |SP|=\frac{r}{\cos30^0}=\frac{12\ cm}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{24\ cm}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{24\cdot\sqrt{3}\ cm}{3}=8\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

**Vježba 026**

Iz točke P izvan kružnice polumjera r = 6 cm vidi se luk kružnice duljine l = 2 · π cm. Kolika je udaljenost točke P od središta kružnice?

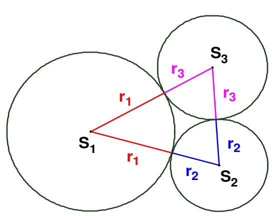
**Rezultat:** $4\cdot\sqrt{3}\ cm.$



**Zadatak 027 (Deny, gimnazija)**

Polumjeri triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana odnose se kao 3 : 5 : 7. Kako se odnose udaljenosti njihovih središta?

**Rješenje 027**




$$r_1:r_2:r_3=3:5:7\ \Rightarrow\ r_1=3\cdot t\ ,\ r_2=5\cdot t\ ,\ r_3=7\cdot t.$$

$$|S_1S_2|=r_1+r_2=3\cdot t+5\cdot t=8\cdot t,$$

$$|S_2S_3|=r_2+r_3=5\cdot t+7\cdot t=12\cdot t,$$

$$|S_1S_3|=r_1+r_3=3\cdot t+7\cdot t=10\cdot t.$$

Udaljenosti središta odnose se kao:

$$|S_1S_2|:|S_1S_3|:|S_2S_3|=(8\cdot t):(10\cdot t):(12\cdot t)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{članove}\\ \text{kratimo s } 2t\end{bmatrix}\Rightarrow\ |S_1S_2|:|S_1S_3|:|S_2S_3|=4:5:6.$$

**Vježba 027**

Polumjeri triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana odnose se kao 6 : 10 : 14. Kako se odnose udaljenosti njihovih središta?

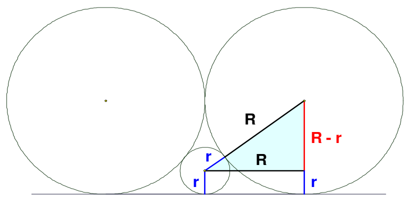
**Rezultat:** 4 : 5 : 6.

**Zadatak 028 (Ana, gimnazija)**

Dvije kružnice polumjera R dodiruju se u jednoj točki. Nađi polumjer kruga koji dira obje kružnice i njihovu zajedničku tangentu.

**Rješenje 028**

Iz pravokutnog trokuta uporabom Pitagorina poučka dobije se:




$$(r+R)^2 = R^2 + (R-r)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + 2\cdot r\cdot R + R^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot r\cdot R + r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot r\cdot R + 2\cdot r\cdot R = R^2 \Rightarrow 4\cdot r\cdot R = R^2 \; /\cdot\frac{1}{4\cdot R} \Rightarrow r = \frac{R}{4}.$$

**Vježba 028**

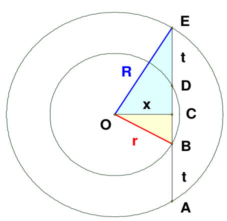
Dvije kružnice polumjera R dodiruju se u jednoj točki. Nađi opseg kruga koji dira obje kružnice i njihovu zajedničku tangentu.

**Rezultat:** $\frac{R}{2}\cdot\pi.$

## Zadatak 029 (Felix, gimnazija)

Zbroj duljina polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 36 cm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 36 cm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Koliko iznosi duljina polumjera veće kružnice?

**Rješenje 029**




Sa slike vidi se:

$$|OE| = R \; , \; |OB| = r \; , \; |OC| = x \; , \; |AB| = |BD| = |DE| = t$$

$$\left.\begin{array}{l} |AE| = 3\cdot t \\ |AE| = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot t = 36 \Rightarrow t = 12.$$

$$|BC| = \frac{1}{2}\cdot t = 6 \; , \; |CE| = \frac{3}{2}\cdot t = 18$$

Uočimo dva pravokutna trokuta ΔOCE i ΔOBC. Pitagorin poučak za njih glasi:



$$\left.\begin{array}{l} |OE|^2 = |OC|^2 + |CE|^2 \\ |OB|^2 = |OC|^2 + |BC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R^2 = x^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot t\right)^2 \\ r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot t\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R^2 = x^2 + \frac{9}{4}\cdot t^2 \\ r^2 = x^2 + \frac{1}{4}\cdot t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = x^2 + \frac{9}{4}\cdot t^2 - x^2 - \frac{1}{4}\cdot t^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 2\cdot t^2 \Rightarrow (R-r)\cdot(R+r) = 2\cdot t^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet zadatka} \\ R + r = 3\cdot t \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R-r)\cdot 3\cdot t = 2\cdot t^2 \; /\cdot\frac{1}{3\cdot t} \Rightarrow R - r = \frac{2}{3}\cdot t.$$

Postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} R - r = \frac{2}{3}\cdot t \\ R + r = 3\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot R = \frac{11}{3}\cdot t \; /:2 \Rightarrow R = \frac{11}{6}\cdot t \Rightarrow R = \frac{11}{6}\cdot 12 = 22 \; cm.$$

**Vježba 029**

Zbroj duljina polumjera dviju koncentričnih kružnica iznosi 36 cm. Tetiva veće kružnice ima duljinu 36 cm, a manja je kružnica dijeli na tri jednaka dijela. Koliko iznosi duljina polumjera manje kružnice?

**Rezultat:** 14 cm.

## Zadatak 030 (Felix, gimnazija)

Kružni odsječak površine $P = \frac{\pi - 3}{3}$ i središnjeg kuta α = 30° pripada zadanom krugu. Nađite polumjer kruga.

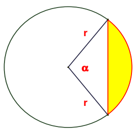
**Rješenje 030**

Ponovimo!

Površina kružnog odsječka glasi:

$$P=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^0}-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin\alpha.$$

Zadane vrijednosti uvrstimo u formulu za površinu kružnog odsječka i izračunamo polumjer r:




$$\frac{\pi-3}{3}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot 30^0}{360^0}-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 30^0 \Rightarrow \frac{\pi-3}{3}=\frac{r^2\cdot\pi}{12}-\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\pi-3}{3}=\frac{r^2\cdot\pi}{12}-\frac{r^2}{4}\ /\cdot 12 \Rightarrow 4\cdot(\pi-3)=r^2\cdot\pi-3\cdot r^2 \Rightarrow 4\cdot(\pi-3)=r^2\cdot(\pi-3)\ /\cdot\frac{1}{\pi-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r^2=4\ /\sqrt{\ } \Rightarrow r=2.$$

**Vježba 030**

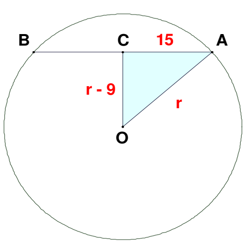
Kružni odsječak površine $P=\frac{4\cdot\pi-12}{3}$ i središnjeg kuta α = 30° pripada zadanom krugu. Nađite polumjer kruga.

**Rezultat:** 4.

**Zadatak 031 (Den, gimnazija)**

Tetiva kružnice ima duljinu 30 cm, a njezina udaljenost od središta je za 9 cm manja od polumjera. Koliki je polumjer kružnice?

**Rješenje 031**




Sa slike vidi se:

$$|AB|=30 \quad , \quad |AC|=\frac{1}{2}\cdot|AB|=15 \quad , \quad |OC|=r-9 \quad , \quad |OA|=r$$

Budući da je trokut OAC pravokutan, uporabom Pitagorina poučka dobije se polumjer r:

$$|OA|^2=|OC|^2+|AC|^2 \Rightarrow r^2=(r-9)^2+15^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=r^2-18\cdot r+81+225 \Rightarrow 18\cdot r=306\ /:18 \Rightarrow r=17\ cm.$$

**Vježba 031**

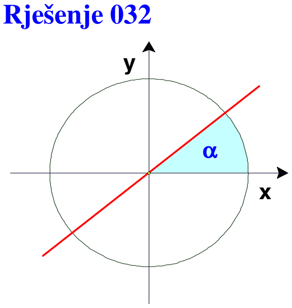
Tetiva kružnice ima duljinu 16 cm, a njezina udaljenost od središta je za 4 cm manja od polumjera. Koliki je polumjer kružnice?

**Rezultat:** 10 cm.

**Zadatak 032 (Kety, gimnazija)**

Kolika je površina dijela kruga sa središtem u ishodištu polumjera 1 koji je u prvom kvadrantu i ispod pravca $x=y\cdot\sqrt{3}$?

**Rješenje 032**




Odredimo kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom x – osi:

$$x=y\cdot\sqrt{3} \Rightarrow x=y\cdot\sqrt{3}\ /\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=k\cdot x \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=tg\,\alpha \\ k=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha=30^0$. Površina kružnog isječka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r=1\ ,\ \alpha=30^0 \\ P=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^0} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{1^2\cdot\pi\cdot 30^0}{360^0}=\frac{\pi}{12}.$$

**Vježba 032**

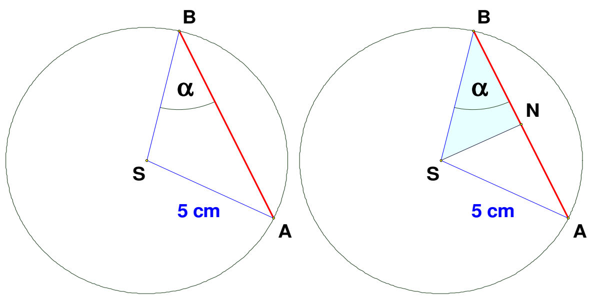
Kolika je površina dijela kruga sa središtem u ishodištu polumjera 1 koji je u prvom kvadrantu i iznad pravca $x = y \cdot \sqrt{3}$?

**Rezultat:** $\frac{5 \cdot \pi}{12}.$

**Zadatak 033 (2A, hotelijerska škola)**

Ako je cos α = 0.6, kolika je duljina tetive $\overline{AB}$ na slici?

**Rješenje 033**




Sa slike vidi se da je

$$|SB| = |SA| = 5\ cm$$

pa je trokut SAB jednakokračan. Konstruiramo li visinu iz vrha S na stranicu $\overline{AB}$ dobit ćemo nožište N. Trokut SNB je pravokutan. Duljina tetive iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} |NB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \\ \cos\alpha = \frac{|NB|}{|SB|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB|}{|SB|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|AB|}{2 \cdot |SB|} \ /\cdot 2 \cdot |SB| \Rightarrow |AB| = 2 \cdot |SB| \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 5\ cm \cdot 0.6 = 6\ cm.$$

**Vježba 033**

Ako je cos α = 0.8, kolika je duljina tetive $\overline{AB}$ na slici (ista slika)?

**Rezultat:** 8 cm.

**Zadatak 034 (Anamarija, gimnazija)**

Odredite polumjer kruga kojemu je površina jednaka duljini promjera.



**Rješenje 034**

Ponovimo!

Površina kruga: $P = r^2 \cdot \pi$ , promjer kruga: $d = 2 \cdot r$.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Budući da je površina kruga jednaka duljini promjera, slijedi:

$$r^2 \cdot \pi = 2 \cdot r \Rightarrow r^2 \cdot \pi - 2 \cdot r = 0 \Rightarrow r \cdot (r \cdot \pi - 2) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r = 0 \text{ nema smisla} \\ r \cdot \pi - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r \cdot \pi - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \pi = 2 \ /:\pi \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}.$$

**Vježba 034**

Odredite polumjer kruga kojemu je površina jednaka duljini polumjera.

**Rezultat:** $r = \frac{1}{\pi}.$

**Zadatak 035 (Anamarija, gimnazija)**

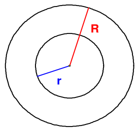
Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine unutarnjeg kruga. Nađite omjer polumjera unutarnjeg i vanjskog kruga.

**Rješenje 035**

Ponovimo!

Površina kruga polumjera r je: $P = r^2 \cdot \pi$. Površina kružnog vijenca iznosi: $P = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi$.

Iz uvjeta zadatka slijedi:




$$R^2\cdot\pi - r^2\cdot\pi = \frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi \;/:\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{1}{4}\cdot r^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}\cdot r^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = \frac{5}{4}\cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot R^2 = 5\cdot r^2 \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{4}{5} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow r : R = 2 : \sqrt{5}.$$

**Vježba 035**

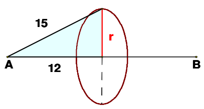
Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine unutarnjeg kruga. Nađite omjer polumjera vanjskog i unutarnjeg kruga.

**Rezultat:** $R : r = \sqrt{5} : 2.$

**Zadatak 036 (Anamarija, gimnazija)**

Zadana je dužina AB duljine 24. Odredite geometrijsko mjesto točaka u prostoru koje su od točaka A i B udaljene za 15.

**Rješenje 036**




Geometrijsko mjesto točaka je kružnica polumjera r:

$$r = \sqrt{15^2 - 12^2} \Rightarrow r = \sqrt{225 - 144} \Rightarrow r = \sqrt{81} \Rightarrow r = 9.$$

**Vježba 036**

Zadana je dužina AB duljine 6. Odredite geometrijsko mjesto točaka u prostoru koje su od točaka A i B udaljene za 5.

**Rezultat:** Geometrijsko mjesto točaka je kružnica polumjera 4.



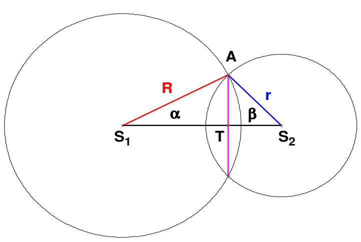
**Zadatak 037 (Maturant, gimnazija)**

Zajednička tetiva dviju kružnica iz jednog se središta vidi pod kutom od 50°, a iz drugog pod kutom od 70°. Ako su središta kružnica udaljena 3 cm, nađite zbroj polumjera tih kružnica.

**Rješenje 037**

Ponovimo!

Sinusov poučak: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$




Sa slike vidi se:

$$|S_1S_2| = 3\ cm\ ,\ \alpha = \angle S_2S_1A = \frac{50^0}{2} = 25^0$$

$$\angle S_2AS_1 = 120^0\ ,\ \beta = \angle S_1S_2A = \frac{70^0}{2} = 35^0.$$

Uočimo trokut $S_1S_2A$. Pomoću sinusovog poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{R}{\sin\beta} = \frac{|S_1S_2|}{\sin 120^0} \\ \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{|S_1S_2|}{\sin 120^0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R = \frac{|S_1S_2|\cdot\sin\beta}{\sin 120^0} \\ r = \frac{|S_1S_2|\cdot\sin\alpha}{\sin 120^0} \end{array}\right\} \Rightarrow R + r = \frac{|S_1S_2|\cdot\sin\beta}{\sin 120^0} + \frac{|S_1S_2|\cdot\sin\alpha}{\sin 120^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R + r = |S_1S_2|\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin 120^0} + \frac{\sin\alpha}{\sin 120^0}\right) \Rightarrow R + r = |S_1S_2|\cdot\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R + r = 3\ cm\cdot\frac{\sin 25^0 + \sin 35^0}{\sin 120^0} = 3.45\ cm.$$

**Vježba 037**

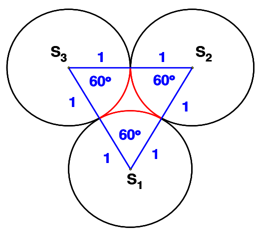
Zajednička tetiva dviju kružnica iz jednog se središta vidi pod kutom od 50°, a iz drugog pod kutom od 70°. Ako su središta kružnica udaljena 6 cm, nađite zbroj polumjera tih kružnica.

**Rezultat:** $R + r = 6.9\ cm.$

**Zadatak 038 (Vikica, gimnazija)**

U ravnini se tri kruga polumjera 1 međusobno dodiruju. Koliko iznosi površina dijela ravnine koji se nalazi izvan kruga, a unutar trokuta čiji su vrhovi središta tih kružnica?

**Rješenje 038**




Trokut $S_1S_2S_3$ je jednakostraničan:

$$a = |S_1S_2| = |S_2S_3| = |S_3S_1| = 2\ ,\ r = 1.$$

Tražena površina jednaka je površini trokuta $S_1S_2S_3$ umanjena za površinu tri kružna isječka sa središnjim kutovima 60°, tj. 180° (pola kruga):

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{1 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$

**Vježba 038**

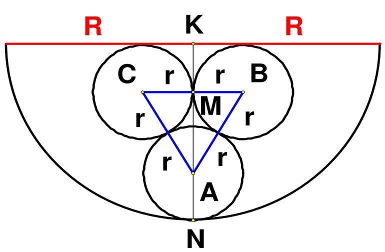
U ravnini se tri kruga polumjera 2 međusobno dodiruju. Koliko iznosi površina dijela ravnine koji se nalazi izvan kruga, a unutar trokuta čiji su vrhovi središta tih kružnica?

**Rezultat:** $P = 4 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \pi.$

**Zadatak 039 (Los-Habanos, gimnazija)**

U polukrug polumjera R upisane su tri jednake kružnice tako da se sve tri međusobno dodiruju izvana. Koliki je polumjer tih kružnica?

**Rješenje 039**




Sa slike vidi se: $|AB| = |BC| = |CA| = 2 \cdot r\ ,\ |KM| = |AN| = r.$

Budući da je trokut ABC jednakostraničan sa duljinom stranice 2 · r, njegova visina iznosi:

$$|MA| = \frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow |MA| = r \cdot \sqrt{3}.$$

Polumjer kružnice iznosi:

$$|KN| = R \Rightarrow |KM| + |MA| + |AN| = R \Rightarrow r + r \cdot \sqrt{3} + r = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r + r \cdot \sqrt{3} = R \Rightarrow r \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = R \Rightarrow r = \frac{R}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{R}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow r = R \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = R \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} \Rightarrow r = R \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right).$$

**Vježba 039**

U polukrug polumjera 1 cm upisane su tri jednake kružnice tako da se sve tri međusobno dodiruju izvana. Koliki je polumjer tih kružnica?

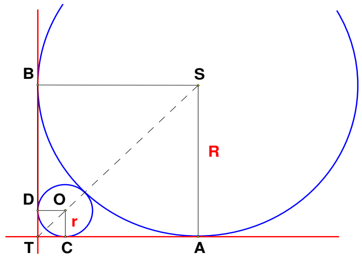
**Rezultat:** $\left(2 - \sqrt{3}\right)\ cm.$

**Zadatak 040 (Los-Habanos, gimnazija)**

Dvije zajedničke tangente dviju kružnica, koje se dodiruju izvana, zatvaraju pravi kut. Ako je polumjer manje kružnice r, koliki je polumjer veće kružnice?

**Rješenje 040**

Sa slike vidi se: $|AS| = |BS| = R\ ,\ |CO| = |DO| = r\ ,\ |OS| = r + R.$




Budući da je pravac TS simetrala pravog kuta $\angle ATB$, trokuti ΔTAS i ΔTCO su pravokutni jednakokračni. Zato je:

$$|TA| = |AS| = R \Rightarrow |TS| = R \cdot \sqrt{2}\ ,\ |TC| = |CO| = r \Rightarrow |TO| = r \cdot \sqrt{2}.$$

Računamo polumjer veće kružnice:

$$|TO| + |OS| = |TS| \Rightarrow r \cdot \sqrt{2} + r + R = R \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \sqrt{2} + r = R \cdot \sqrt{2} - R \Rightarrow r \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) = R \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{r \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow R = r \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow R = r \cdot \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} \Rightarrow R = r \cdot \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = r \cdot \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \Rightarrow R = \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot r.$$

**Vježba 040**

Dvije zajedničke tangente dviju kružnica, koje se dodiruju izvana, zatvaraju pravi kut. Ako je polumjer manje kružnice 1 dm, koliki je polumjer veće kružnice?

**Rezultat:** $R = \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)\ dm.$