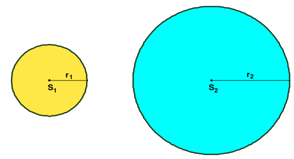
Zadatak 001 (Mario, trgovačka škola)

Za koliko postotaka treba povećati polumjer kruga da bi se njegova površina povećala 53.76%?

Rješenje 001

1.inačica

Formulama $P_1 = r_1^2 \cdot \pi$ i $P_2 = r_2^2 \cdot \pi$ označimo površine kruga prije i poslije povećanja polumjera.



Budući da se površina povećala 53.76%, pišemo

$$P_2 = P_1 + 0.5376 \cdot P_1 = 1.5376 \cdot P_1 \quad \Rightarrow \quad r_2^2 \cdot \pi = 1.5376 \cdot r_1^2 \cdot \pi \quad / : \pi \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = 1.5376 \cdot r_1^2 \quad / \sqrt{\ } \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = 1.24 \cdot r_1.$$

Polumjer treba povećati 24%.

I preko omjera dobije se lako rezultat:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{r_2^2 \cdot \pi}{r_1^2 \cdot \pi} = \frac{153.76}{100} \Rightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1.5376 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1.24.$$

2.inačica

Ako slovom p označimo postotak za koji je povećan polumjer r, onda je novi polumjer

$$r + \frac{p}{100} \cdot r = r \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Budući da je površina kruga povećana 53.76% vrijedi

$$\left(r \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right)^2 \cdot \pi = 1.5376 \cdot r^2 \cdot \pi \ / : \pi \Rightarrow r^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1.5376 \cdot r^2 \ / : r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1.5376 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} 1.24 \Rightarrow \frac{p}{100} = 0.24 \Rightarrow p = 24.$$

Vježba 001

Za koliko postotaka treba povećati polumjer kruga da bi se njegova površina povećala 74.24%?

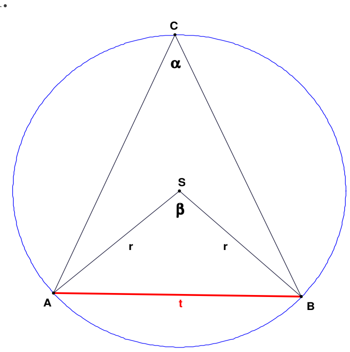
Rezultat: 32%.

Zadatak 002 (Goga, ekonomska škola)

Kolika je duljina tetive koja odgovara obodnome kutu 30° s vrhom na kružnici promjera 10 cm?

Rješenje 002

Promjer kružnice je: d = 10 cm.
Polumjer kružnice je: r = 5 cm.



Obodni kut je: <BCA = α = 30°, a njegov pripadni središnji kut je: <BSA = β = 60°.

[Središnji kut je dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta.]

β = 2 · α.

Promatrajmo trokut ABS. Kut β = 60°. Ostala dva kuta u trokutu imaju zajedno 120°.

[Zbroj kutova u trokutu je 180°.]

Budući da su stranice | AS | i | BS | jednake,

| AS | = | BS | = r = 5 cm,

pripadni kutovi također moraju biti jednaki.

[Nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi.]

Znači da je svaki kut jednak 60° pa je trokut ABS jednakostraničan jer su mu kutovi međusobno jednaki.

Zato je duljina tetive | AB | = t = 5 cm.

Vježba 002

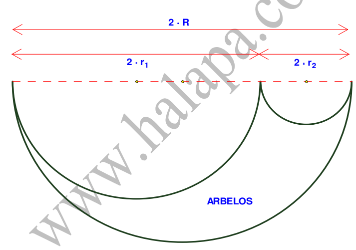
Kolika je duljina tetive koja odgovara obodnome kutu 30° s vrhom na kružnici promjera 16 cm?

Rezultat: 8 cm.

Zadatak 003 (Anita, gimnazija)

Iz polukruga polumjera R izrezana su dva polukruga polumjera r_1 i r_2. Ako je $r_1 + r_2 = R$, nađite površinu ostatka!

Rješenje 003



Sa slike vidi se:

$$2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 = 2 \cdot R \;/:2 \;\Rightarrow\; r_1 + r_2 = R \;/\sqrt{\;}\; \Rightarrow\; r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 = R^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \cdot r_1 \cdot r_2 = R^2 - r_1^2 - r_2^2. \qquad (1)$$

Površinu ostatka izračunamo da od površine velikog polukruga oduzmemo površine manjih polukrugova:

$$P = \frac{R^2 \cdot \pi}{2} - \frac{r_1^2 \cdot \pi}{2} - \frac{r_2^2 \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[R^2 - r_1^2 - r_2^2\right] = \left[\text{zbog } (1)\right] = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \pi.$$

[Nastalom liku naziv je ARBELOS – postolarski nož.]

Vježba 003

Iz polukruga polumjera 8 izrezana su dva polukruga polumjera 6 i 2. Nađite površinu ostatka!

Rezultat: 12π.

Zadatak 004 (Tanja, gimnazija)

Kružnom isječku površine 40π cm^2 pripada središnji kut od 225°. Kolika je duljina pripadnog luka? Koliki je opseg kruga?

Rješenje 004

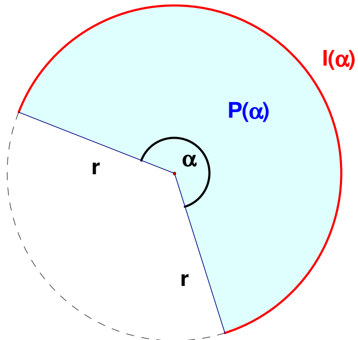
Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha,$$

a površina kružnog isječka s istim središnjim kutom α dana je s

$$P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha.$$

Opseg kruga je O = 2 · r · π.



Iz $P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha.$ i poznatih veličina P(α) = 40π, α = 225° lako dobivamo da je:

$$P(\alpha)=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot\alpha \;\Rightarrow\; 40\pi=\frac{r^{2}\cdot\pi}{360^{0}}\cdot 225^{0} \;\Rightarrow\; \left[\text{kratimo s } 45^{0}\right] \;\Rightarrow\; 40\pi=\frac{r^{2}\cdot\pi\cdot 5}{8}\;/\cdot 8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 320\pi=5\cdot r^{2}\cdot\pi\;/:5\pi \;\Rightarrow\; r^{2}=64 \;\Rightarrow\; r=8.$$

Duljina pripadnog luka je:

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^{0}}\cdot\alpha=\frac{8\cdot\pi}{180^{0}}\cdot 225^{0}=\left[\text{kratimo s } 45^{0}\right]=\frac{8\cdot\pi\cdot 5}{4}=\frac{40\cdot\pi}{4}=10\pi\ cm.$$

Opseg kruga iznosi:

O = 2 · r · π = 2 · 8 · π = 16π cm.

Vježba 004

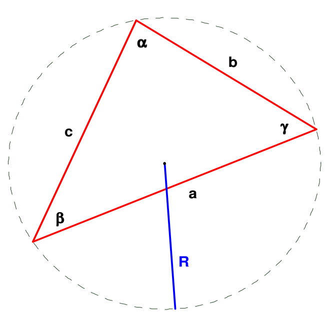
Kružnom isječku površine 25π cm^2 pripada središnji kut od 90°. Kolika je duljina pripadnog luka? Koliki je opseg kruga?

Rezultat: l(α) = 5π, O = 20π.

Zadatak 005 (Mario, trgovačka škola)

Iz točke T na kružnici polumjera R povučene su tetive duljina 3 i 8. Koliki je polumjer kružnice ako tetive zatvaraju kut $\frac{\pi}{3}$?

Rješenje 005



Ponovimo:

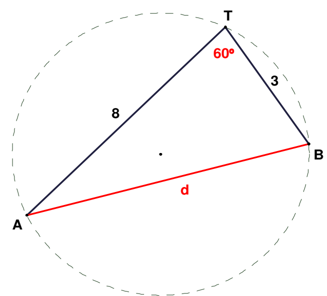
- $\frac{\pi}{3} = \frac{180^0}{3} = 60^0$
- kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

- sinusov poučak

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Sa slike vidi se da d možemo izračunati pomoću kosinusovog poučka.



$$d^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad d^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 0.5 = 49 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad d = 7.$$

Pomoću sinusovog poučka na trokutu TAB dobijemo polumjer kružnice:

$$\frac{d}{\sin 60^0} = 2R \;\Rightarrow\; R = \frac{d}{2 \cdot \sin 60^0} = \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Vježba 005

Iz točke T na kružnici polumjera R povučene su tetive duljina 3 i 4. Koliki je polumjer kružnice ako tetive zatvaraju kut $\frac{\pi}{2}$?

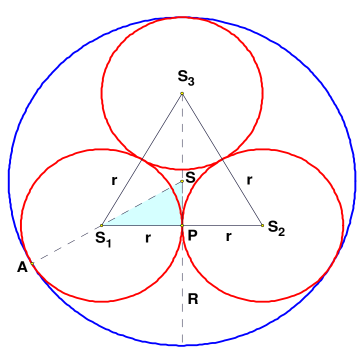
Rezultat: 2.5.

Zadatak 006 (Petra, gimnazija)

U krug polumjera R upisana su tri jednaka kruga, tako da svaki dodiruje ostala dva i veliki krug iznutra. Nađite polumjer upisanih krugova.

Rješenje 006

1. inačica



Iz slike se vidi da je $\Delta S_1S_2S_3$ jednakostraničan trokut duljine stranice 2r. Dužina $\overline{S_3P}$ je njegova težišnica (i visina), a točka S je težište. Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha, slijedi:

$$|SP| = \frac{1}{3} \cdot |S_3P| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Također vrijedi:

$$|SS_1| = |SA| - |AS_1| = R - r, \quad |S_1P| = r.$$

Uočimo pravokutan trokut S_1PS. Primjenom Pitagorina poučka dobije se:

$$|SS_1|^2 = |S_1P|^2 + |SP|^2 \Rightarrow (R-r)^2 = r^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow R^2 - 2Rr + r^2 = r^2 + \frac{r^2}{3} \; / \cdot 3 \Rightarrow$$

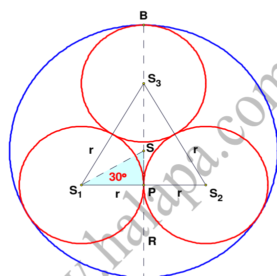
$$\Rightarrow 3R^2 - 6Rr - r^2 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow r^2 + 6Rr - 3R^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-6R \pm \sqrt{36R^2 + 12R^2}}{2} = \frac{-6R \pm \sqrt{48R^2}}{2} = \frac{-6R \pm \sqrt{16R^2 \cdot 3}}{2} = \frac{-6R \pm 4R \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Negativan rezultat nema smisla pa je polumjer:

$$r = \frac{-6R + 4R \cdot \sqrt{3}}{2} = 2R\sqrt{3} - 3R = R \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right).$$

2. inačica



Iz slike se vidi da je $\Delta S_1S_2S_3$ jednakostraničan trokut duljine stranice 2r, a ΔS_1PS pravokutan trokut.

$$tg\,30^0 = \frac{|SP|}{|S_1P|} = \frac{|SP|}{r} \Rightarrow |SP| = r \cdot tg\,30^0 = \frac{r\sqrt{3}}{3}, \quad |PS_3| = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3},$$

$$|S_3B| = r, \quad |SB| = R, \quad |SS_3| = \frac{2}{3} \cdot |PS_3| = \frac{2}{3} \cdot r\sqrt{3}.$$

Postavimo jednakost:

$$|PS_3| + |S_3B| = |PS| + |SB| \Rightarrow r\sqrt{3} + r = \frac{r\sqrt{3}}{3} + R \; / \cdot 3 \Rightarrow 3r\sqrt{3} + 3r - r\sqrt{3} = 3R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot \left(3\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}\right) = 3R \Rightarrow r \cdot \left(2\sqrt{3} + 3\right) = 3R \Rightarrow r = \frac{3R}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 3} =$$

$$= \frac{3R \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} = \frac{3R \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right)}{12 - 9} = \frac{3R \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right)}{3} = R \cdot \left(2\sqrt{3} - 3\right).$$

Vježba 006

U krug polumjera 1 upisana su tri jednaka kruga, tako da svaki dodiruje ostala dva i veliki krug iznutra. Nađite polumjer upisanih krugova.

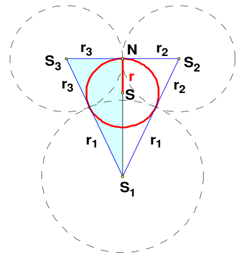
Rezultat: $\left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right).$

Zadatak 007 (Marko, gimnazija)

Tri kružnice polumjera $r_1 = 16$, $r_2 = r_3 = 10$ dodiruju se izvana. Nađite polumjer kružnice upisane trokutu kojemu su vrhovi središta tih kružnica.

Rješenje 007

1.inačica



Iz slike se vidi da je trokut $S_1S_2S_3$ jednakokračan:

$$a = |S_2S_3| = r_2 + r_3 = 20, \quad v = |S_1N|, \quad b = |S_1S_2| = |S_1S_3| = r_1 + r_2 = r_1 + r_3 = 26.$$

Površinu trokuta $S_1S_2S_3$ možemo izračunati na dva načina:

- $$P = \frac{a \cdot v}{2} \quad , \quad v = |S_1N| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \Rightarrow P = \frac{20 \cdot 24}{2} = 240.$$

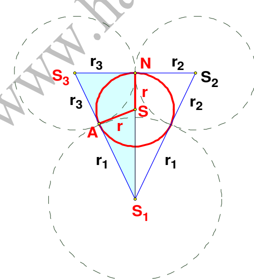
- U trokut $S_1S_2S_3$ upisana je kružnica polumjera r pa se površina može računati po formuli $P = r \cdot s$, gdje je s poluopseg:

$$2s = a + 2b = 20 + 2 \cdot 26 = 72 \quad => \quad s = 36.$$

Polumjer upisane kružnice je:

$$r = \frac{P}{s} = \frac{240}{36} = [\text{kratimo s } 12] = \frac{20}{3}.$$

2.inačica



Iz slike se vidi da je trokut $S_1S_2S_3$ jednakokračan, a trokuti ΔS_1NS_3 i ΔS_1SA su pravokutni.

$$|S_1S_3| = r_1 + r_3 = 26, \quad |S_3N| = r_3 = 10, \quad |SN| = |AS| = r,$$

$$|S_1N| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24, \quad |S_1S| = |S_1N| - |SN| = 24 - r.$$

Budući da pravokutni trokuti ΔS_1NS_3 i ΔS_1SA imaju jednake kutove, slični su pa vrijedi razmjer:

$$|S_3N| : |S_3S_1| = |AS| : |S_1S| \Rightarrow 10 : 26 = r : (24 - r) \Rightarrow 10 \cdot (24 - r) = 26r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 240 - 10r = 26r \Rightarrow 36r = 240 \Rightarrow r = \frac{240}{36} = [\text{kratimo s } 12] = \frac{20}{3}.$$

Vježba 007

Tri kružnice polumjera $r_1 = 32$, $r_2 = r_3 = 20$ dodiruju se izvana. Nađite polumjer kružnice upisane trokutu kojemu su vrhovi središta tih kružnica.

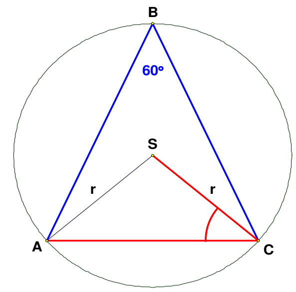
Rezultat: $\frac{40}{3}.$

Zadatak 008 (Petra, gimnazija)

Na kružnici sa središtem S zadane su točke A, B i C. Ako je kut $\sphericalangle ABC = 60^0$, koliki je kut $\sphericalangle ACS$?

Rješenje 008

Obodni kut jednak je polovici pripadnog središnjeg kuta.



$$\sphericalangle ASC = 2 \cdot \sphericalangle ABC = 120^0.$$

Trokut ASC je jednakokračan:

$$|AS| = |CS| = r.$$

Zato je:

$$\sphericalangle ACS = \sphericalangle CAS \Rightarrow \sphericalangle ACS = \frac{180^0 - \sphericalangle ASC}{2} = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0.$$

Vježba 008

Na kružnici sa središtem S zadane su točke A, B i C. Ako je kut $\sphericalangle ABC = 40^0$, koliki je kut $\sphericalangle ACS$?

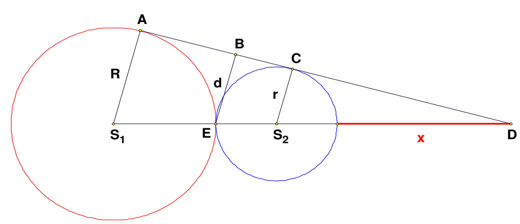
Rezultat: 50°.

Zadatak 009 (Petra, gimnazija)

Dvije kružnice polumjera 3 cm i 1 cm diraju se izvana. Koliko iznosi udaljenost dirališta kružnica od njihove zajedničke vanjske tangente?

Rješenje 009

R = 3 cm, r = 1 cm



Iz slike se vidi da su pravokutni trokuti ΔADS_1, ΔBDE i ΔCDS_2 međusobno slični. Vrijede razmjeri:

$$|AS_1| : |CS_2| = |S_1D| : |S_2D| \Rightarrow R : r = (R + 2r + x) : (r + x) \Rightarrow R \cdot (r + x) = r \cdot (R + 2r + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \cdot r + R \cdot x = R \cdot r + 2 \cdot r^2 + r \cdot x \Rightarrow R \cdot x - r \cdot x = 2 \cdot r^2 \Rightarrow x \cdot (R - r) = 2 \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \cdot r^2}{R - r} = \frac{2 \cdot 1}{3 - 1} = 1\ cm,$$

$$|BE| : |CS_2| = |ED| : |S_2D| \Rightarrow d : r = (2r + x) : (r + x) \Rightarrow d \cdot (r + x) = r \cdot (2r + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{r \cdot (2r + x)}{r + x} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{1 + 1} = 1.5\ cm.$$

Vježba 009

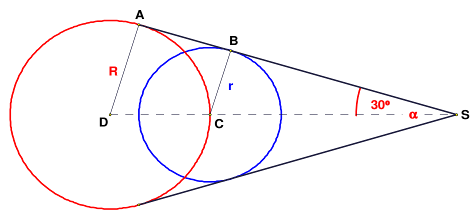
Dvije kružnice polumjera 6 cm i 2 cm diraju se izvana. Koliko iznosi udaljenost dirališta kružnica od njihove zajedničke vanjske tangente?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 010 (Marko, gimnazija)

Kružnica polumjera r ima središte na kružnici polumjera R (r < R). Koliki je omjer R : r ako zajedničke tangente obiju kružnica zatvaraju kut 60°?

Rješenje 010



Iz slike se vidi da je trokut ADS pravokutan.

$$\sphericalangle ASD = \frac{\alpha}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0,$$

$$\sphericalangle ADS = 90^0 - 30^0 = 60^0 \;\Rightarrow\; \left[\; \sin 30^0 = \frac{|AD|}{|DS|} = \frac{R}{|DS|} \;\right] \Rightarrow |DS| = 2R.$$

Također je trokut BCS pravokutan pa vrijedi:

$$\sphericalangle BCS = 90^0 - 30^0 = 60^0 \;\Rightarrow\; \left[\; \sin 30^0 = \frac{|BC|}{|CS|} = \frac{r}{|CS|} \;\right] \Rightarrow |CS| = 2r.$$

Iz jednakosti

$$|DS| = |DC| + |CS|$$

slijedi

$$2R = R + 2r \;\Rightarrow\; R = 2r \;\Rightarrow\; R : r = 2 : 1.$$

Vježba 010

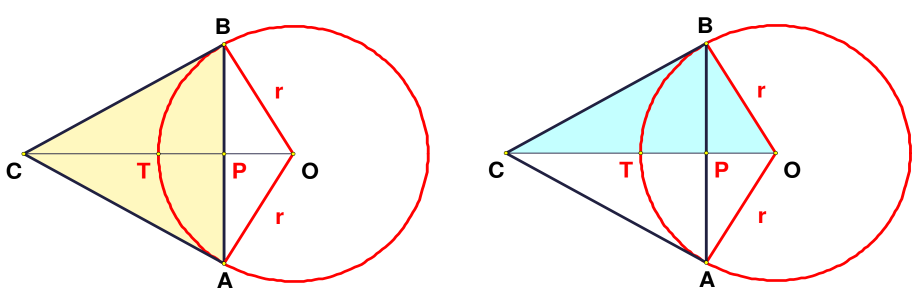
Kružnica polumjera r ima središte na kružnici polumjera R (r < R). Koliki je omjer r : R ako zajedničke tangente obiju kružnica zatvaraju kut 60°?

Rezultat: 1 : 2.

Zadatak 011 (4A, hotelijerska škola)

Kružnica prolazi kroz dva vrha jednakostraničnog trokuta i kroz njegovo težište. Ako je duljina stranice trokuta $a = \sqrt{3}$, koliki je polumjer kružnice?

Rješenje 011



$$|AB| = |BC| = |CA| = a = \sqrt{3} \quad , \quad |CP| = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \quad , \quad |CT| = \frac{2}{3}\cdot|CP| = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1$$

$$r = |OA| = |OB| = |OT| \quad , \quad |CO| = |CT| + |TO| = 1 + r.$$

Uočimo pravokutan trokut COB (ili CAO) i uporabimo Pitagorin poučak:

$$|CO|^2=|OB|^2+|CB|^2 \Rightarrow (1+r)^2=r^2+\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 1+2r+r^2=r^2+3 \Rightarrow 2r=2 \Rightarrow r=1.$$

Vježba 011

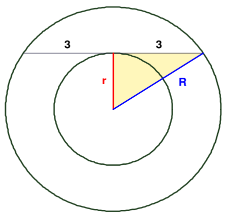
Kružnica prolazi kroz dva vrha jednakostraničnog trokuta i kroz njegovo težište. Ako je duljina stranice trokuta $a=\sqrt{3}$, koliki je opseg kružnice?

Rezultat: 2π.

Zadatak 012 (Anamarija, hotelijerska škola)

Zadane su koncentrične kružnice. Tetiva veće kružnice koja dira manju kružnicu ima duljinu 6. Kolika je površina kružnog vijenca omeđena tim kružnicama?

Rješenje 012



$$\left.\begin{array}{l} 3^2=R^2-r^2 \\ P=\left(R^2-r^2\right)\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow P=3^2\cdot\pi=9\cdot\pi.$$

Vježba 012

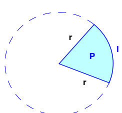
Zadane su koncentrične kružnice. Tetiva veće kružnice koja dira manju kružnicu ima duljinu 10. Kolika je površina kružnog vijenca omeđena tim kružnicama?

Rezultat: 25π.

Zadatak 013 (Ana, gimnazija)

Površina kružnog isječka iznosi 45, a duljina pripadnog luka 9. Nađite polumjer kruga.

Rješenje 013



$$P=\frac{r\cdot l}{2} \Rightarrow r=\frac{2\cdot P}{l}=\frac{2\cdot 45}{9}=\frac{90}{9}=10.$$

Vježba 013

Površina kružnog isječka iznosi 45, a duljina pripadnog luka 6. Nađite polumjer kruga.

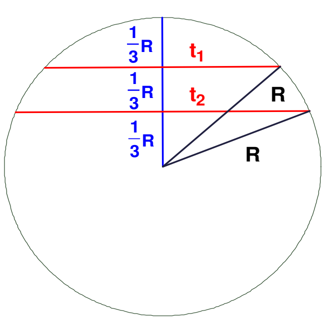
Rezultat: 15.

Zadatak 014 (Ana, gimnazija)

Jedan polumjer kružnice podijeljen je s dvije točke na tri jednaka dijela. Tim točkama povučene su tetive kružnice okomite na polumjer. Nađite omjer duljina tetiva.

Rješenje 014

Uporabom Pitagorina poučka dobije se:



$$\left(\frac{t_1}{2}\right)^2=R^2-\left(\frac{2}{3}R\right)^2=R^2-\frac{4}{9}R^2=\frac{5}{9}R^2 \Rightarrow \left(\frac{t_1}{2}\right)^2=\frac{5}{9}R^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{2}=\frac{R}{3}\sqrt{5} \Rightarrow t_1=\frac{2R}{3}\sqrt{5}.$$

$$\left(\frac{t_2}{2}\right)^2=R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2=R^2-\frac{1}{9}R^2=\frac{8}{9}R^2 \Rightarrow \left(\frac{t_2}{2}\right)^2=\frac{8}{9}R^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{2}=\frac{2R}{3}\sqrt{2} \Rightarrow t_2=\frac{4R}{3}\sqrt{2}.$$

Omjer duljina tetiva je:

$$t_1 : t_2 = \frac{2R}{3}\sqrt{5} : \frac{4R}{3}\sqrt{2} = \frac{\frac{2R}{3}\sqrt{5}}{\frac{4R}{3}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10} : 4.$$

Vježba 014

Jedan polumjer kružnice podijeljen je s dvije točke na tri jednaka dijela. Tim točkama povučene su tetive kružnice okomite na polumjer. Nađite omjer kvadrata duljina tetiva.

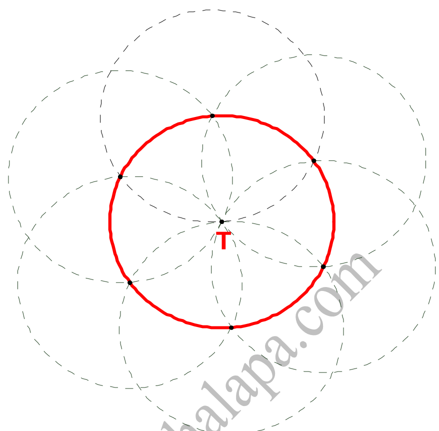
Rezultat: $t_1^2 : t_2^2 = 5 : 8.$

Zadatak 015 (Ivana, komercijalna škola)

Odredi skup središta kružnica zadanog polumjera r koje leže u istoj ravnini i prolaze zadanom točkom T.

Rješenje 015

Središta takvih kružnica čine kružnicu sa središtem u točki T i polumjerom r.



Vježba 015

a) Odredi skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od zadane točke ravnine.
b) Odredi skup svih točaka u prostoru koje su jednako udaljene od zadane točke prostora.

Rezultat:

Zadatak 016 (Anamarija, hotelijerska škola)

Automobil vozi po ekvatoru, a na visini od 8 m prati ga zrakoplov. Koliko je dulji put što ga prijeđe zrakoplov od puta što ga prijeđe automobil ako jednom obiđu Zemlju?

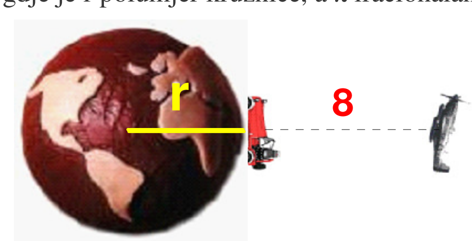
Rješenje 016

Ponovimo!

Opseg kružnice dan je izrazom:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi,$$

gdje je r polumjer kružnice, a π iracionalan broj približno jednak broju 3.14.



Označimo polumjer Zemlje (ekvatora) u metrima oznakom r. Tada će automobil prijeći $2 \cdot r \cdot \pi$ metara, a zrakoplov $2 \cdot (r+8) \cdot \pi$ metara. Razlika puta iznosi:

$$2 \cdot (r+8) \cdot \pi - 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi + 16 \cdot \pi - 2 \cdot r \cdot \pi = 16 \cdot \pi \approx 50.24\ m.$$

Uočite da ta razlika ne ovisi o polumjeru Zemlje.

Vježba 016

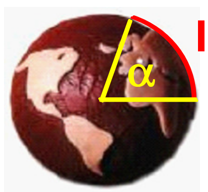
Automobil vozi po ekvatoru, a na visini od 10 m prati ga zrakoplov. Koliko je dulji put što ga prijeđe zrakoplov od puta što ga prijeđe automobil ako jednom obiđu Zemlju?

Rezultat: 62.8 m.

Zadatak 017 (Anamarija, hotelijerska škola)

Pretpostavimo da je Zemljin ekvator kružnica opsega 40 000 000 m. Kolika je duljina luka na ekvatoru uz pripadni središnji kut od 1' (zaokruženo na metar)?

Rješenje 017



$$\left.\begin{array}{l} O = 40\ 000\ 000\ m \\ \alpha = 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^0 \end{array}\right\} \Rightarrow l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{razlomak proširujemo} \\ \text{brojem } 2 \end{array}\right] \Rightarrow l = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot 180^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360^0} = \frac{O \cdot \alpha}{360^0} = \frac{40\ 000\ 000\ m \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^0}{360^0} = \frac{40\ 000\ 000\ m}{21\ 600} = 1852\ m.$$

Vježba 017

Pretpostavimo da je Zemljin ekvator kružnica opsega 40 000 000 m. Kolika je duljina luka na ekvatoru uz pripadni središnji kut od 1° (zaokruženo na metar)?

Rezultat: 111 111 m.

Zadatak 018 (Mario, trgovačka škola)

Za koliko se posto smanji površina kruga ako mu se promjer smanji za 7%?

Rješenje 018

Ako je d promjer kruga njegova površina glasi:

$$P = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}.$$

Budući da se promjer kruga smanjio za 7%, novi promjer iznosi:

$$d_1 = d - \frac{7}{100} \cdot d = d - 0.07 \cdot d = 0.93 \cdot d.$$

Smanjenje površine je:

$$P - P_1 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(d^2 - d_1^2\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(d - d_1\right) \cdot \left(d + d_1\right) = \frac{\pi}{4} \cdot (d - 0.93 \cdot d) \cdot (d + 0.93 \cdot d) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 0.07 \cdot d \cdot 1.93 \cdot d = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0.1351 = \frac{13.51}{100} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{13.51}{100} \cdot P = 13.51\% \cdot P.$$

Površina se smanjila za 13.51%.

Vježba 018

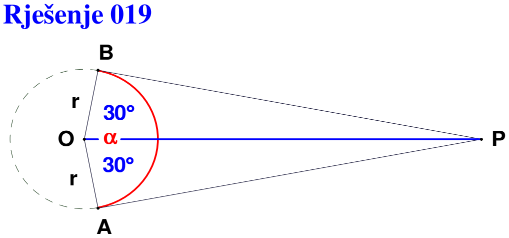
Za koliko se posto smanji površina kruga ako mu se promjer smanji za 5%?

Rezultat: 9.75%.

Zadatak 019 (Ivana, gimnazija)

Iz točke P izvan kružnice polumjera r = 12 cm vidi se luk kružnice duljine l = 4π cm. Koliko iznosi udaljenost točke P od središta kružnice?

Rješenje 019



$$\left|OA\right| = \left|OB\right| = r = 12\ ,\ l = 4 \cdot \pi$$

Iz duljine luka l izračunamo veličinu pripadnog središnjeg kuta α:

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^0} \Rightarrow \alpha = \frac{l \cdot 180^0}{r \cdot \pi} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 180^0}{12 \cdot \pi} = 60^0.$$

Budući da su pravokutni trokuti ΔAPO i ΔOPB podudarni, jednaki su kutovi: $\angle AOP = \angle POB.$ Sada je:

$$\angle POB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 60^0 = 30^0.$$

Udaljenost točke P od središta kružnice iznosi:

$$\cos 30^0 = \frac{|OB|}{|OP|} \Rightarrow |OP| = \frac{|OB|}{\cos 30^0} = \frac{r}{\cos 30^0} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{3} = 8 \cdot \sqrt{3}.$$

Vježba 019

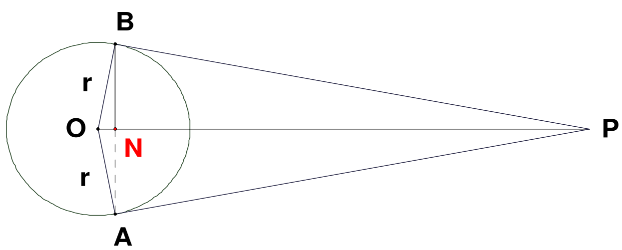
Iz točke P izvan kružnice polumjera r = 24 cm vidi se luk kružnice duljine l = 8π cm. Koliko iznosi udaljenost točke P od središta kružnice?

Rezultat: $16 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 020 (Ivana, gimnazija)

Na kružnicu polumjera 30 cm povučene su iz točke udaljene od središta kružnice 50 cm obje tangente. Kolika je udaljenost dirališta tangenata?

Rješenje 020



$$r = |OA| = |OB| = 30\ cm\ ,\ |OP| = 50\ cm$$

Iz pravokutnog trokuta OPB pomoću Pitagorina poučka dobije se duljina | PB |:

$$|PB|^2 = |OP|^2 - |OB|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PB| = \sqrt{|OP|^2 - |OB|^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} =$$

$$= \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40\ cm.$$

Udaljenost dirališta tangenata | AB | iznosi: $|AB| = 2 \cdot |BN|.$

Duljinu | BN | možemo izračunati na dva načina:

- pomoću formula za površinu pravokutnog trokuta OPB

$$\left. \begin{array}{l} P_{OPB} = \dfrac{|OP| \cdot |BN|}{2} \\ P_{OPB} = \dfrac{|OB| \cdot |PB|}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|OP| \cdot |BN|}{2} = \frac{|OB| \cdot |PB|}{2} \ / \cdot 2 \Rightarrow |OP| \cdot |BN| = |OB| \cdot |PB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BN| = \frac{|OB| \cdot |PB|}{|OP|} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24\ cm.$$

- uporabom sličnosti trokuta ΔOPB i ΔNPB

$$|OB| : |OP| = |BN| : |PB| \Rightarrow |OB| \cdot |PB| = |OP| \cdot |BN| \Rightarrow |BN| = \frac{|OB| \cdot |PB|}{|OP|} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24\ cm.$$

Dakle, udaljenost | AB | dirališta tangenata iznosi:

$$|AB| = 2 \cdot |BN| = 2 \cdot 24 = 48\ cm.$$

Vježba 020

Na kružnicu polumjera 3 cm povučene su iz točke udaljene od središta kružnice 5 cm obje tangente. Kolika je udaljenost dirališta tangenata?

Rezultat: 4.8.