Zadatak 001 (Marija, gimnazija)

Koliko stranica ima pravilni mnogokut ako jedan njegov unutarnji kut iznosi 108°?

Rješenje 001

Formula za veličinu jednog unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta je:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}.$$

$$108^0 = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} \quad / \cdot n \;\Rightarrow\; 108\cdot n = (n-2)\cdot 180 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 108\cdot n = 180\cdot n - 360 \;\Rightarrow\; 108\cdot n - 180\cdot n = -360 \;\Rightarrow\; -72\cdot n = -360 \;/ : (-72) \;\Rightarrow\; n = 5.$$

Vježba 001

Koliko stranica ima pravilni mnogokut ako jedan njegov unutarnji kut iznosi 144°?

Rezultat: n = 10.

Zadatak 002 (Dunja, gimnazija)

Koliko stranica ima pravilni mnogokut čiji jedan vanjski kut iznosi 24°?

Rješenje 002

1.inačica

Mnogokut kojemu su jednake sve stranice i svi kutovi zove se pravilni mnogokut ili pravilni poligon.

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta iznosi:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}.$$

Unutarnji kut i pripadni vanjski kut su suplementni, tj. zajedno imaju 180°.

U zadatku je vanjski kut α' = 24°.

Budući da mora biti:

$$\alpha + \alpha' = 180°,$$

pišemo:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} + 24^0 = 180^0 \;\Rightarrow\; \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 180^0 - 24^0 \;\Rightarrow\; \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 156^0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 156^0 \;/\cdot n \;\Rightarrow\; (n-2)\cdot 180^0 = 156^0\cdot n \;\Rightarrow\; 180^0\cdot n - 360^0 = 156^0\cdot n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 180^0\cdot n - 156^0\cdot n = 360^0 \;\Rightarrow\; 24^0\cdot n = 360^0 \;\Rightarrow\; n = 15.$$

Pravilni mnogokut ima 15 stranica.

2.inačica

Zbroj unutarnjeg i pripadnog vanjskog kuta iznosi 180°. Ukupna suma svih tih zbrojeva kutova iznosi n · 180°.

Budući da je zbroj svih unutarnjih kutova (n – 2) · 180°, tada je zbroj svih vanjskih kutova

$$n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = n\cdot 180° - n\cdot 180° + 360° = 360°.$$

Suma svih vanjskih kutova je 360°.

Ako je vanjski kut jednak 24°, znači da je riječ o petnaesterokutu jer je 360° : 24° = 15.

Vježba 002

Koliko stranica ima pravilni mnogokut čiji jedan vanjski kut iznosi 45°?

Rezultat: n = 8.

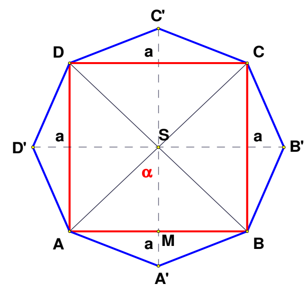
Zadatak 003 (Marko, gimnazija)

Konstruirajte kvadrat sa stranicom duljine 4 cm te ga rotirajte oko njegovog središta simetrije za 45°. Kolika je površina osmerokuta AA'BB'CC'?

Rješenje 003

1.inačica

a = 4 cm



Duljina dijagonala kvadrata ABCD je

$$|AC| = |BD| = a \cdot \sqrt{2}.$$

Trokute AA'S, A'BS, BB'S, B'CS, CC'S, C'DS, DD'S, D'AS nazivamo karakteristični trokuti pravilnog osmerokuta AA'BB'CC'. To su jednakokračni trokuti s kutom

$$\alpha = \frac{360^0}{8} = 45^0$$

nasuprot osnovice. Uočimo jednakokračan trokut AA'S. Poznat nam je kut α = 45° i duljina krakova:

$$|AS| = |A'S| = \frac{|AC|}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Podsjetimo se formula za površinu trokuta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Površina trokuta AA'S je zato jednaka:

$$P_{AA'S} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |A'S| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \sin 45^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{8}.$$

Tada je površina osmerokuta:

$$P_8 = 8 \cdot P_{AA'S} = 8 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{8} = a^2 \cdot \sqrt{2} = 4^2 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}\ cm^2.$$

2.inačica

Površinu osmerokuta AA'BB'CC' možemo naći kao zbroj površine kvadrata ABCD i površina četiri trokuta: AA'B, BB'C, CC'D i DD'A. Trokuti su sukladni! Sa slike se jasno vidi

$$|AB| = a \quad , \quad |SM| = \frac{a}{2} \quad , \quad |SA'| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \quad , \quad |MA'| = |SA'| - |SM| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2} - a}{2}.$$

Tada je površina trokuta AA'B jednaka:

$$P_{AA'B} = \frac{|AB| \cdot |MA'|}{2} = \frac{a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} - a}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2} - a^2}{4}.$$

Površina osmerokuta je sada:

$$P_8 = P_{ABCD} + 4 \cdot P_{AA'B} =$$

$$= a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{2} - a^2}{4} = a^2 + a^2\sqrt{2} - a^2 = a^2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\ cm^2.$$

Vježba 003

Konstruirajte kvadrat sa stranicom duljine 5 cm te ga rotirajte oko njegovog središta simetrije za 90°. Kolika je površina nastalog lika?

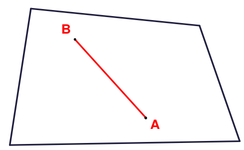
Rezultat: $25\ cm^2$.

Zadatak 004 (Ida, gimnazija)

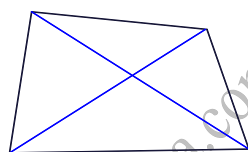
U nekom konveksnom poligonu broj dijagonala četiri puta je veći od broja stranica. Koliko ima stranica taj poligon?

Rješenje 004

Mnogokut je dio ravnine omeđen dužinama. Konveksnim mnogokutom nazivamo mnogokut u kojem vrijedi da je spojnica bilo koje dvije točke tog mnogokuta sadržana u njemu.



Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva vrha mnogokuta koji ne pripadaju istoj stranici.



Ukupan broj dijagonala n – terokuta (mnogokuta sa n stranica) je:

$$D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 4 \cdot n \ /:n \ \Rightarrow \ \frac{n-3}{2} = 4 \ /\cdot 2 \ \Rightarrow \ n - 3 = 8 \ \Rightarrow \ n = 11.$$

Vježba 004

U nekom konveksnom poligonu broj dijagonala tri puta je veći od broja stranica. Koliko ima stranica taj poligon?

Rezultat: n = 9.

Zadatak 005 (Marko, gimnazija)

Kolika je duljina najdulje dijagonale pravilnog dvadeseterokuta stranice duljine 8?

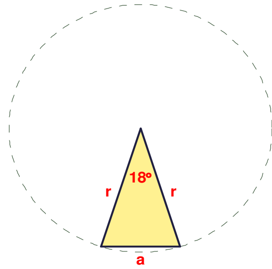
Rješenje 005

Svaki pravilni mnogokut sa n stranica sastavljen je od n jednakokračnih sukladnih trokuta. Kut pri vrhu svakog jednakokračnog trokuta iznosi:

$$\alpha = \frac{360^0}{n}$$

i zove se središnji kut mnogokuta. Svaki jednakokračni trokut iz kojih je pravilni mnogokut sastavljen zove se karakteristični trokut. U mnogokutu s parnim brojem stranica svakoj stranici nasuprot leži stranica, a svakom vrhu nasuprot leži vrh. Za pravilni dvadeseterokut središnji kut iznosi:

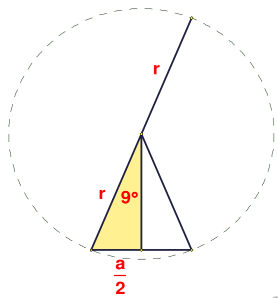
$$\left. \begin{array}{l} n = 20 \\ \alpha = \dfrac{360^0}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{360^0}{20} = 18^0.$$



Duljina koja spaja dva vrha koji nisu susjedni zove se dijagonala mnogokuta. Svakom se pravilnom mnogokutu može kružnica opisati. Duljina najdulje dijagonale jednaka je duljini promjera opisane kružnice:

$$d = 2 \cdot r.$$

Sa slike vidi se:



$$\sin 9^0 = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cdot \sin 9^0} \Rightarrow d = 2 \cdot \frac{a}{2 \cdot \sin 9^0} = \frac{a}{\sin 9^0} = 51.14.$$

Vježba 005

Kolika je duljina najdulje dijagonale pravilnog dvadeseterokuta stranice duljine 10?

Rezultat: 63.92.

Zadatak 006 (Seve, hotelijerska škola)

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je suma unutarnjih kutova jednaka 900°.

Rješenje 006

Pravilni mnogokuti (poligoni, n-terokuti) imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve kutove.

Suma unutarnjih kutova mnogokuta jednaka je:

$$K(n) = (n-2) \cdot 180^0.$$

Broj dijagonala svakog mnogokuta iznosi:

$$D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Sada pišemo:

$$(n-2) \cdot 180^0 = 900^0 \quad /:180^0 \Rightarrow n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7.$$

To je sedmerokut, a broj dijagonala je:

$$D(7) = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$

Vježba 006

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je suma unutarnjih kutova jednaka 720°.

Rezultat: 9.

Zadatak 007 (Seve, hotelijerska škola)

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je unutarnji kut jednak 135°.

Rješenje 007

Pravilni mnogokuti (poligoni, n-terokuti) imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve kutove.

Veličina unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta računa se formulom:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^0.$$

Broj dijagonala svakog mnogokuta iznosi:

$$D(n) = \frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Budući da je unutarnji kut jednak 135°, vrijedi:

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^0 = 135^0 \ /:45^0 \Rightarrow \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 4 = 3 \Rightarrow 4-\frac{8}{n}=3 \Rightarrow -\frac{8}{n}=3-4 \Rightarrow -\frac{8}{n}=-1 \Rightarrow n=8.$$

To je osmerokut, a broj dijagonala iznosi:

$$D(8) = \frac{8\cdot(8-3)}{2} = \frac{8\cdot 5}{2} = 20.$$

Vježba 007

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je unutarnji kut jednak 162°.

Rezultat: 170.

Zadatak 008 (Seve, hotelijerska škola)

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je vanjski kut jednak 60°.

Rješenje 008

Pravilni mnogokuti (poligoni, n-terokuti) imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve kutove.

Veličina vanjskog kuta pravilnog mnogokuta dana je izrazom:

$$\alpha' = 180^0 - \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^0 = \frac{360^0}{n}.$$

[Unutarnji kut i pripadni vanjski kut su suplementni, tj. zajedno imaju 180°.]

Broj dijagonala svakog mnogokuta iznosi:

$$D(n) = \frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Zato je:

$$\frac{360^0}{n} = 60^0 \Rightarrow n = 6.$$

To je šesterokut, a broj dijagonala iznosi:

$$D(6) = \frac{6\cdot(6-3)}{2} = \frac{6\cdot 3}{2} = 9.$$

Vježba 008

Odredite broj dijagonala pravilnog mnogokuta kojemu je vanjski kut jednak 72°.

Rezultat: 5.

Zadatak 009 (Seve, hotelijerska škola)

Ako se dva puta poveća broj vrhova pravilnog n-terokuta, mjera njegovog unutarnjeg kuta poveća se za 15°. Koliko dijagonala ima taj mnogokut?

Rješenje 009

Pravilni mnogokuti (poligoni, n-terokuti) imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve kutove.

Veličina unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta dana je izrazom:

$$\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}=\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^0.$$

Ako se dva puta poveća broj vrhova pravilnog n-terokuta, mjera njegovog unutarnjeg kuta iznosi:

$$\alpha=\left(1-\frac{2}{2\cdot n}\right)\cdot 180^0=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 180^0.$$

Budući da se mjera unutarnjeg kuta povećala za 15° u odnosu na prethodni unutarnji kut, pišemo:

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180+15=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 180 \Rightarrow 180-\frac{360}{n}+15=180-\frac{180}{n} \Rightarrow -\frac{360}{n}+15=-\frac{180}{n} \;/\cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -360+15n=-180 \Rightarrow 15n=-180+360 \Rightarrow 15n=180 \;/:15 \Rightarrow n=12.$$

To je dvanaesterokut pa je broj dijagonala jednak:

$$D(12)=\frac{12\cdot(12-3)}{2}=\frac{12\cdot 9}{2}=54.$$

Vježba 009

Ako se tri puta poveća broj vrhova pravilnog n-terokuta, mjera njegovog unutarnjeg kuta poveća se za 48°. Koliko dijagonala ima taj mnogokut?

Rezultat: 5.

Zadatak 010 (Seve, hotelijerska škola)

Kutovi peterokuta odnose se kao 2 : 3 : 4 : 5 : 6. Odredite ih.

Rješenje 010

Zbroj kutova u peterokutu je:

$$K(n)=(n-2)\cdot 180^0 \Rightarrow K(5)=(5-2)\cdot 180^0=3\cdot 180^0=540^0.$$

Budući da se kutovi u peterokutu odnose kao 2 : 3 : 4 : 5 : 6, zapisat ćemo: $\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=2:3:4:5:6$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot k\\ \beta=3\cdot k\\ \gamma=4\cdot k\\ \delta=5\cdot k\\ \varepsilon=6\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=540^0 \Rightarrow 2k+3k+4k+5k+6k=540^0 \Rightarrow 20k=540^0 \;/:20 \Rightarrow k=27^0.$$

Kutovi su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot k\\ \beta=3\cdot k\\ \gamma=4\cdot k\\ \delta=5\cdot k\\ \varepsilon=6\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot 27^0\\ \beta=3\cdot 27^0\\ \gamma=4\cdot 27^0\\ \delta=5\cdot 27^0\\ \varepsilon=6\cdot 27^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=54^0\\ \beta=81^0\\ \gamma=108^0\\ \delta=135^0\\ \varepsilon=162^0\end{array}\right\}.$$

Vježba 010

Kutovi peterokuta odnose se kao 2 : 2 : 5 : 4 : 7. Odredite ih.

Rezultat:
$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=5\cdot k\\ \delta=4\cdot k\\ \varepsilon=7\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot 27^0\\ \beta=2\cdot 27^0\\ \gamma=5\cdot 27^0\\ \delta=4\cdot 27^0\\ \varepsilon=7\cdot 27^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=54^0\\ \beta=54^0\\ \gamma=135^0\\ \delta=108^0\\ \varepsilon=189^0\end{array}\right\}.$$

Zadatak 011 (Seve, hotelijerska škola)

Kutovi n-terokuta odnose se kao 2 : 3 : 4 : 5 : ... : n : (n + 1). Odredite ih (u ovisnosti o n).

Rješenje 011

Suma svih unutarnjih kutova mnogokuta iznosi:

$$K(n)=(n-2)\cdot\pi.$$

Budući da se kutovi u n-terokutu odnose kao 2 : 3 : 4 : 5 : ... : n : (n + 1), zapisat ćemo:

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3:\alpha_4:\ldots:\alpha_{n-1}:\alpha_n=2:3:4:5:\ldots:n:(n+1).$$

$$\left.\alpha_1=2\cdot k\ ,\ \alpha_2=3\cdot k\ ,\ \alpha_3=4\cdot k\ ,\ \alpha_4=5\cdot k\ ,\ldots,\ \alpha_{n-1}=n\cdot k\ ,\ \alpha_n=(n+1)\cdot k\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot k+3\cdot k+4\cdot k+5\cdot k+\ldots+n\cdot k+(n+1)\cdot k=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot\left[2+3+4+5+\ldots+n+(n+1)\right]=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\text{vrijedi formula: } 1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot\left[(1+2+3+4+5+\ldots+n)+n\right]=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow k\cdot\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n\right]=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot\frac{n\cdot(n+1)+2n}{2}=(n-2)\cdot\pi\Rightarrow k\cdot\frac{n^2+3n}{2}=(n-2)\cdot\pi\ /\cdot\frac{2}{n^2+3n}\Rightarrow k=\frac{(n-2)\cdot 2\pi}{n\cdot(n+3)}.$$

Kutovi su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=2\cdot k\\ \alpha_2=3\cdot k\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n=(n+1)\cdot k\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha_1=2\cdot k=2\cdot\frac{(n-2)\cdot 2\pi}{n\cdot(n+3)}=\frac{(n-2)\cdot 4\pi}{n\cdot(n+3)}\\ \alpha_2=3\cdot k=3\cdot\frac{(n-2)\cdot 2\pi}{n\cdot(n+3)}=\frac{(n-2)\cdot 6\pi}{n\cdot(n+3)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n=(n+1)\cdot k=(n+1)\cdot\frac{(n-2)\cdot 2\pi}{n\cdot(n+3)}=\frac{(n-2)\cdot(n+1)\cdot 2\pi}{n\cdot(n+3)}\end{array}\right\}.$$

Vježba 011

Kutovi četverokuta odnose se kao 1 : 2 : 3 : 4. Odredite ih.

Rezultat: $\alpha=36^0\ ,\ \beta=72^0\ ,\ \gamma=108^0\ ,\ \delta=144^0.$

Zadatak 012 (Seve, hotelijerska škola)

Postoji li peterokut kojem se unutarnji kutovi odnose kao 1 : 2 : 3 : 4 : 5?

Rješenje 012

Zbroj kutova u peterokutu je:

$$K(n)=(n-2)\cdot 180^0 \Rightarrow K(5)=(5-2)\cdot 180^0=3\cdot 180^0=540^0.$$

Budući da se kutovi u peterokutu, po pretpostavci, odnose kao 1 : 2 : 3 : 4 : 5, zapisat ćemo:

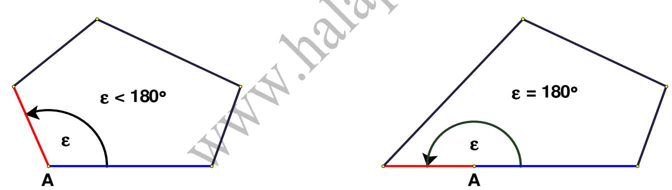
$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=1:2:3:4:5.$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=3\cdot k\\ \delta=4\cdot k\\ \varepsilon=5\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=540^0 \Rightarrow k+2k+3k+4k+5k=540^0 \Rightarrow 15k=540^0 \;/:15 \Rightarrow k=36^0.$$

Kutovi su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=3\cdot k\\ \delta=4\cdot k\\ \varepsilon=5\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=1\cdot 36^0\\ \beta=2\cdot 36^0\\ \gamma=3\cdot 36^0\\ \delta=4\cdot 36^0\\ \varepsilon=5\cdot 36^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=36^0\\ \beta=72^0\\ \gamma=108^0\\ \delta=144^0\\ \varepsilon=180^0\end{array}\right\}.$$

Unutarnji kut ε = 180º, a to znači da dvije susjedne stranice leže na istom pravcu pa čine, upravo, jednu stranicu.



Dakle, takav peterokut ne postoji.

Vježba 012

Postoji li četverokut kojem se unutarnji kutovi odnose kao 1 : 1 : 2 : 4?

Rezultat: Ne.

Zadatak 013 (Seve, hotelijerska škola)

Zadan je mnogokut s 50 vrhova $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{47}, P_{48}, P_{49}, P_{50}$. Iz vrha P_1 povučene su dijagonale do vrhova P_3 i P_{49}. Ako se iz zadanog pedeseterokuta izbace trokuti $\Delta P_1P_2P_3$ i $\Delta P_1P_{50}P_{49}$, koliko dijagonala ima dobiveni mnogokut? Ako je početni mnogokut bio pravilan, koliki su kutovi novog mnogokuta?

Rješenje 013

Ako iz zadanog mnogokuta s 50 vrhova

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{47}, P_{48}, P_{49}, P_{50}$$

(pedeseterokut) izbacimo trokute $\Delta P_1P_2P_3$ i $\Delta P_1P_{50}P_{49}$ dobije se mnogokut koji ima dvije stranice manje, tj. mnogokut s 48 vrhova

$$P_1, P_3, P_4, \ldots, P_{47}, P_{48}, P_{49}.$$

Broj njegovih dijagonala je:

$$D(n)=\frac{n\cdot(n-3)}{2} \Rightarrow D(48)=\frac{48\cdot(48-3)}{2}=\frac{48\cdot 45}{2}=1080.$$

Svi unutarnji kutovi novog mnogokuta (osim jednog) bit će isti kao i u starom mnogokutu:

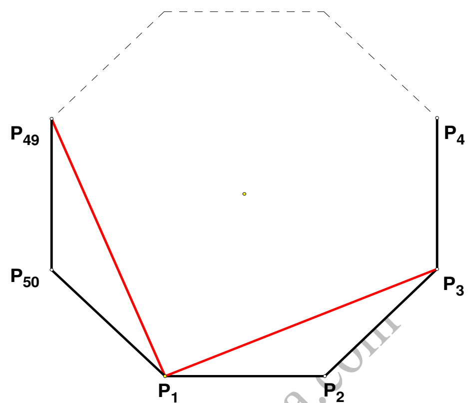
$$\alpha=\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180^{0}=\left(1-\frac{2}{50}\right)\cdot 180^{0}=172.8^{0}$$

Izuzetak je unutarnji kut s vrhom P_1. Za njega vrijedi:

$$\angle P_3P_1P_{49}=\angle P_2P_1P_{50}-\angle P_2P_1P_3-\angle P_{50}P_1P_{49}=172.8^{0}-\frac{180^{0}-172.8^{0}}{2}-\frac{180^{0}-172.8^{0}}{2}=$$

$$=\left[\text{trokuti } \Delta P_1P_2P_3 \text{ i } \Delta P_1P_{50}P_{49} \text{ su jednakokračni}\right]=$$

$$=172.8^{0}-2\cdot\frac{180^{0}-172.8^{0}}{2}=172.8^{0}-180^{0}+172.8^{0}=165.6^{0}.$$



Vježba 013

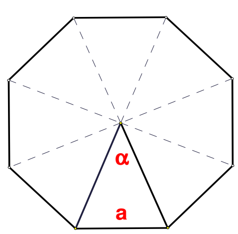
Zadan je mnogokut s 10 vrhova P_1, P_2, P_3, ... , P_8, P_9, P_{10}. Iz vrha P_1 povučene su dijagonale do vrhova P_3 i P_9. Ako se iz zadanog deseterokuta izbace trokuti $\Delta P_1P_2P_3$ i $\Delta P_1P_{10}P_9$, koliko dijagonala ima dobiveni mnogokut?

Rezultat: 20.

Zadatak 014 (Medo, hotelijerska škola)

Kolika je površina pravilnog osmerokuta stranice $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$?

Rješenje 014



Budući da za pravilni mnogokut ili n – terokut vrijedi:

$$\alpha=\frac{360^{0}}{n}\quad,\quad P=n\cdot\frac{a^{2}}{4}\cdot ctg\frac{\alpha}{2}\text{, možemo pisati:}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=8 \\ \alpha=\dfrac{360^{0}}{8}=45^{0} \end{array}\right\}\Rightarrow P=8\cdot\frac{\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{2}}{4}\cdot ctg\frac{45^{0}}{2}=2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot ctg\,22.5^{0}=2.$$

Vježba 014

Kolika je površina pravilnog šesterokuta stranice $a=\sqrt[4]{3}$?

Rezultat: 4.5.

Zadatak 015 (4A, hotelijerska škola)

Kolika je suma unutarnjih kutova pravilnog mnogokuta kojemu je broj dijagonala pet puta veći od broja stranica?

Rješenje 015

Budući da je broj dijagonala pet puta veći od broja stranica, pišemo:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=5\cdot n\ /\cdot 2 \Rightarrow n\cdot(n-3)=10\cdot n \Rightarrow n^2-3\cdot n=10\cdot n \Rightarrow n^2-13\cdot n=0 \Rightarrow n\cdot(n-13)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1=0\ ,\ n_2=13.$$

Pravilni mnogokut je trinaesterokut, a suma unutarnjih kutova iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} K_n=(n-2)\cdot 180^0 \\ n=13 \end{array}\right\} \Rightarrow K_{13}=(13-2)\cdot 180^0=11\cdot 180^0=1980^0.$$

Vježba 015

Kolika je suma unutarnjih kutova pravilnog mnogokuta kojemu je broj dijagonala sedam puta veći od broja stranica?

Rezultat: 2700 º.

Zadatak 016 (Ivana, hotelijerska škola)

Zbroj kutova (n + 1) – terokuta jednak je polovici zbroja kutova 2n – terokuta. Dokaži.

Rješenje 016

Ponovimo!

Zbroj kutova n – terokuta računa se po formuli:

$$K_n = (n-2)\cdot 180^\circ.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} K_{n+1}=(n+1-2)\cdot 180^0 \\ K_{2n}=(2\cdot n-2)\cdot 180^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K_{n+1}=(n-1)\cdot 180^0 \\ K_{2n}=2\cdot(n-1)\cdot 180^0 \end{array}\right\} \Rightarrow K_{2n}=2\cdot K_{n+1} \Rightarrow K_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot K_{2n}.$$

Vježba 016

Zbroj kutova 2n – terokuta dvostruko je veći od zbroja kutova (n + 1) – terokuta. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 017 (Ivana, hotelijerska škola)

Iz jednog vrha mnogokuta može se povući 7 dijagonala. Koliki je broj svih dijagonala tog mnogokuta?

Rješenje 017

Budući da se iz jednog vrha mnogokuta (n – terokuta) mogu povući n – 3 dijagonale, vrijedi:

$$n-3=7 \Rightarrow n=10 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{deseterokut} \\ n=10 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D_n=\frac{n\cdot(n-3)}{2} \\ n=10 \end{array}\right\} \Rightarrow D_{10}=\frac{10\cdot(10-3)}{2}=\frac{10\cdot 7}{2}=35.$$

Vježba 017

Iz jednog vrha mnogokuta može se povući 5 dijagonala. Koliki je broj svih dijagonala tog mnogokuta?

Rezultat: 20.

Zadatak 018 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako se podvostruči broj stranica pravilnog mnogokuta, podvostruči se i njegov kut. Koji je to mnogokut?

Rješenje 018

Veličina kuta pravilnog mnogokuta dana je izrazom:

$$\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}.$$

Podvostručimo li broj stranica veličina kuta iznosit će:

$$\alpha'=\frac{(2\cdot n-2)\cdot 180^0}{2\cdot n}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\alpha=\frac{1}{2}\cdot\alpha' \Rightarrow \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot n-2)\cdot 180^0}{2\cdot n} \;/\cdot\frac{4\cdot n}{180^0} \Rightarrow 4\cdot(n-2)=2\cdot n-2 \Rightarrow 4\cdot n-8=2\cdot n-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n-2\cdot n=-2+8 \Rightarrow 2\cdot n=6 \;/:2 \Rightarrow n=3. \text{ To je trokut.}$$

Vježba 018

Ako se podvostruči broj stranica pravilnog mnogokuta, broj dijagonala poveća se deset puta. Koji je to mnogokut?

Rezultat: n = 4, kvadrat.

Zadatak 019 (Ivana, hotelijerska škola)

Postoji li pravilan mnogokut za koji jedan kut iznosi 160º?

Rješenje 019

Ponovimo!

Veličina kuta pravilnog mnogokuta dana je izrazom:

$$\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}.$$

Zato je:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}=160^0 \;/\cdot n \Rightarrow (n-2)\cdot 180=160\cdot n \Rightarrow 180\cdot n-360=160\cdot n \Rightarrow 180\cdot n-160\cdot n=360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot n=360 \;/:20 \Rightarrow n=18.$$

To je pravilan 18 – terokut.

Vježba 019

Postoji li pravilan mnogokut za koji jedan kut iznosi $\frac{5\cdot\pi}{8}$?

Rezultat: $\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}=\frac{5\cdot\pi}{8} \;/\cdot\frac{8\cdot n}{\pi} \Rightarrow 8\cdot(n-2)=5\cdot n \Rightarrow n=\frac{16}{3}.$ Ne postoji.

Zadatak 020 (Ivana, hotelijerska škola)

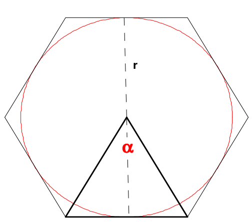
Površina kruga upisanog u pravilni šesterokut iznosi 100 · π. Kolika je površina šesterokuta?

Rješenje 020

Iz površine kruga dobije se polumjer:

$$r^2\cdot\pi=100\cdot\pi \;/:\pi \Rightarrow r^2=100 \;/\sqrt{\;} \quad r=\sqrt{100}=10.$$

Površina pravilnog mnogokuta kome je zadan polumjer upisane kružnice r računa se po formuli:



$$P_n=n\cdot r^2\cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} n=6 \\ \alpha=60^0 \\ r=10 \end{array}\right\} \Rightarrow P_6=6\cdot 10^2\cdot tg\frac{60^0}{2}=600\cdot tg\,30^0=600\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=200\cdot\sqrt{3}.$$

Vježba 020

Površina kruga upisanog u pravilni šesterokut iznosi 9 · π. Kolika je površina šesterokuta?

Rezultat: $18\cdot\sqrt{3}.$