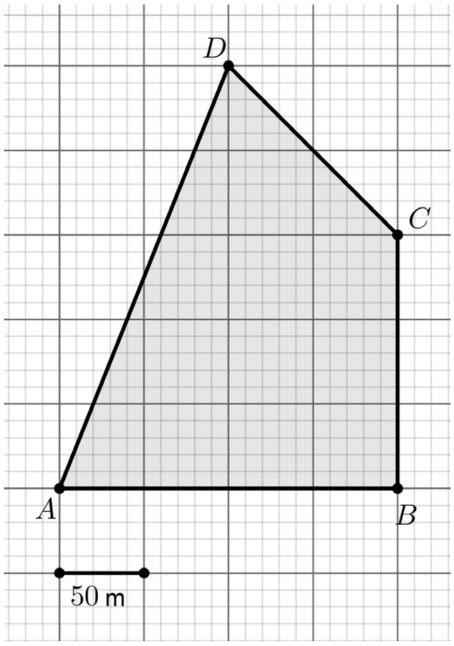
Zadatak 141 (Tom, maturant)

U kvadratnoj je mreži prikazano zemljište u obliku četverokuta.



Koliko je vremena potrebno oraču da izore prikazano zemljište ako u pola sata prosječno izore 5000 m^2 zemljišta.

Rješenje 141

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta.

Odredimo duljine pomoću zadane mjerne jedinice (50 m).

$$|AB| = |PQ| = 200\ m\ ,\ |BP| = |QA| = 250\ m\ ,\ |CP| = |PD| = |DQ| = 100\ m$$

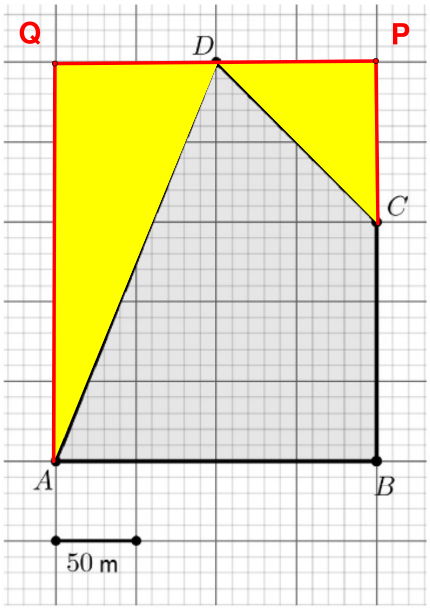
Ploština zemljišta (četverokuta ABCD) jednaka je razlici ploštine pravokutnika ABPQ i zbroja ploština pravokutnih trokuta ΔCPD, ΔDQA.

$$P = P_{ABPQ} - \left(P_{CPD} + P_{DQA}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = |AB| \cdot |BP| - \left(\frac{|CP| \cdot |PD|}{2} + \frac{|DQ| \cdot |QA|}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 200 \cdot 250 - \left(\frac{100 \cdot 100}{2} + \frac{100 \cdot 250}{2}\right) \Rightarrow P = 50000 - \left(\frac{10000}{2} + \frac{25000}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P = 50000 - \frac{35000}{2}\ \Rightarrow\ P = 50000 - 17500\ \Rightarrow\ P = 32500\ m^2.$$



Orač u pola sata prosječno izore 5000 m^2 zemljišta. Za sat vremena izorat će 10000 m^2. Vrijeme potrebno da izore prikazano zemljište iznosi:

$$\frac{32500\ m^2}{10000\ \frac{m^2}{h}} = 3.25\ h = 3\ h + 0.25\ h = 3\ h + [\,0.25 \cdot 60\,]\ \text{min} = 3\ h + 15\ \text{min} = 3\ h\ 15\ \text{min}.$$

Vježba 141

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 142 (Petar, maturant)

Kvadrat i romb imaju jednake opsege. Odredi oštar kut romba, ako mu je površina dva puta manja od površine kvadrata.

$A.\ 10^\circ \qquad B.\ 15^\circ \qquad C.\ 25^\circ \qquad D.\ 30^\circ$

Rješenje 142

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Romb je četverokut kojemu su sve četiri stranice jednake duljine, dijagonale se raspolavljaju, dijagonale su međusobno okomite, dijagonale su simetrale kutova, suprotni kutovi su jednaki.
Ploština romba izračunava se po formuli

$$P = a \cdot v,$$

gdje je v visina romba.
Opseg romba duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kako zapisati da je broj b n puta manji od broja a?

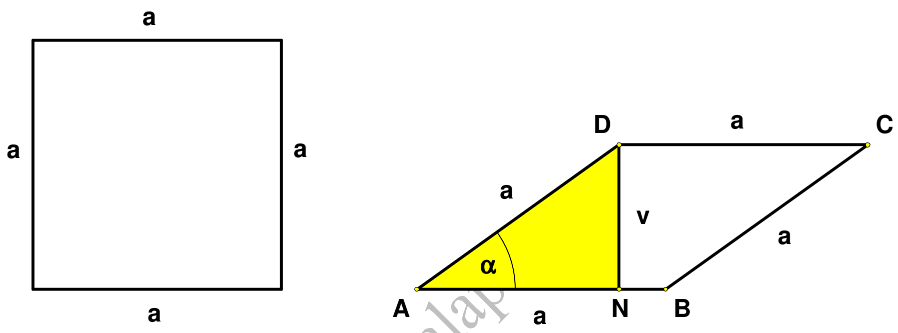
$$b = \frac{1}{n} \cdot a \quad , \quad n \cdot b = a \quad , \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Budući da kvadrat i romb imaju jednake opsege, duljine stranica su im jednake.
Površina romba je dva puta manja od površine kvadrata.

$$P_r = \frac{1}{2} \cdot P_k \Rightarrow a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot a^2 \Rightarrow a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot a^2 \ /:a \Rightarrow v = \frac{1}{2} \cdot a.$$



Promatrajmo pravokutan trokut AND i uporabimo funkciju sinus.

$$\sin\alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 142

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 143 (Svizac, gimnazija)

Razlika opsega dvaju kvadrata je 8, a razlika njihovih površina 16. Zbroj njihovih površina je

A. 40 *B.* 36 *C.* 26 *D.* 34

Rješenje 143

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$\left. \begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

1.inačica

Neka su a i b duljine stranica zadanih kvadrata, a > b. Tada je

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \; /:4 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 + b \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+b)^2 - b^2 = 16 \Rightarrow 4 + 4 \cdot b + b^2 - b^2 = 16 \Rightarrow 4 + 4 \cdot b + b^2 - b^2 = 16 \Rightarrow 4 + 4 \cdot b = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4 \cdot b = 16 \; /:4 \Rightarrow 1 + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 1 \Rightarrow b = 3.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ a = 2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2 + 3 \Rightarrow a = 5.$$

Zbroj površina kvadrata je

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Neka su a i b duljine stranica zadanih kvadrata, a > b. Tada je

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \; /:4 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ (a-b) \cdot (a+b) = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (a+b) = 16 \Rightarrow 2 \cdot (a+b) = 16 \; /:2 \Rightarrow a + b = 8.$$

Promatramo sustav:

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a + b = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot a = 10 \Rightarrow 2 \cdot a = 10 \; /:2 \Rightarrow a = 5.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ a + b = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + b = 8 \Rightarrow b = 8 - 5 \Rightarrow b = 3.$$

Zbroj površina kvadrata je

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

Neka su a i b duljine stranica zadanih kvadrata, a > b. Tada je

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a - 4 \cdot b = 8 \; /:4 \\ a^2 - b^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ (a-b) \cdot (a+b) = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ 2 \cdot (a+b) = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ 2 \cdot (a+b) = 16 \; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a + b = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 2 \; /^2 \\ a + b = 8 \; /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a-b)^2 = 2^2 \\ (a+b)^2 = 8^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 4 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 4 + 64 \Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 68 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 68 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = 68 \; /:2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 34.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 143

Razlika opsega dvaju kvadrata je 4, a razlika njihovih površina 11. Zbroj njihovih površina je

$$A.\ 61 \qquad B.\ 55 \qquad C.\ 63 \qquad D.\ 59$$

Rezultat: A.

Zadatak 144 (Mala sirena, gimnazija)

Osnovice trapeza imaju duljine a i c. Koliki je omjer površina na koje je trapez razdijeljen srednjicom?

$$A.\ \frac{2\cdot a+c}{a+c} \qquad B.\ \frac{a+c}{a+2\cdot c} \qquad C.\ \frac{3\cdot a+c}{a+3\cdot c} \qquad D.\ \frac{a}{c}$$

Rješenje 144

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice a i c usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije b i d zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).

Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v,$$

gdje je v visina trapeza, a i c su osnovice trapeza.

Srednjica trapeza je spojnica polovišta krakova trapeza. Računa se po formuli

$$s=\frac{a+c}{2}.$$

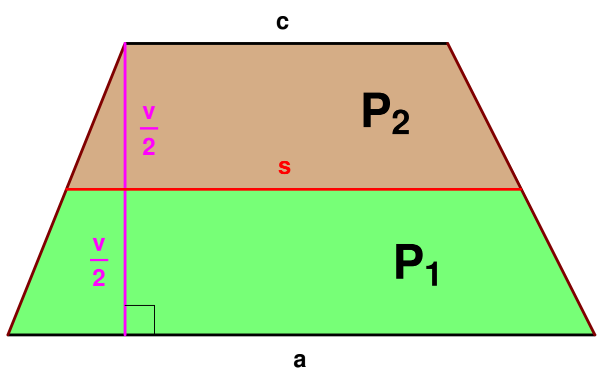
Srednjica je dužina u trokutu koja spaja polovišta dviju stranica trokuta. Usporedna je trećoj stranici trokuta. U trokutu je srednjica jednaka polovici duljine treće stranice.

Srednjica je dužina u trapezu koja spaja polovišta dvaju krakova trapeza. Usporedna je osnovicama trapeza. U trapezu srednjica je jednaka polovici zbroja osnovica trapeza.

Srednjica trapeza raspolavlja visinu trapeza.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$



Gledamo omjer!

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{a+s}{2}\cdot\frac{v}{2}}{\frac{s+c}{2}\cdot\frac{v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{a+s}{2}\cdot\frac{v}{2}}{\frac{s+c}{2}\cdot\frac{v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{a+s}{s+c} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{a+\frac{a+c}{2}}{\frac{a+c}{2}+c} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{a}{1}+\frac{a+c}{2}}{\frac{a+c}{2}+\frac{c}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{2\cdot a+a+c}{2}}{\frac{a+c+2\cdot c}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{3\cdot a+c}{2}}{\frac{a+3\cdot c}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{3\cdot a+c}{2}}{\frac{a+3\cdot c}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}=\frac{3\cdot a+c}{a+3\cdot c}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 144

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 145 (Krešo, maturant)

Ako produljimo stranicu kvadrata za 4 jedinice površina mu se utrostruči. Za stranicu x polaznog kvadrata vrijedi:

$$A.\ 4<x<5 \qquad B.\ 5<x<6 \qquad C.\ 6<x<7 \qquad D.\ 7<x<8$$

Rješenje 145

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P=a^2.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b=a+n \quad , \quad b-a=n \quad , \quad b-n=a.$$

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b=n\cdot a \quad , \quad \frac{b}{a}=n \quad , \quad \frac{b}{n}=a.$$

$$(x+4)^2=3\cdot x^2 \Rightarrow x^2+8\cdot x+16=3\cdot x^2 \Rightarrow x^2+8\cdot x+16-3\cdot x^2=0 \Rightarrow -2\cdot x^2+8\cdot x+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot x^2+8\cdot x+16=0\ /:(-2) \Rightarrow x^2-4\cdot x-8=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-4\cdot x-8=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=-8 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16\cdot 3}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 4\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\cdot\left(1\pm\sqrt{3}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\cdot\left(1\pm\sqrt{3}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=2\cdot\left(1\pm\sqrt{3}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \\ x_2=2\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)\ \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow x=5.46 \Rightarrow 5<x<6.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 145

Ako produljimo stranicu kvadrata za 4 jedinice površina mu se udvostruči. Za stranicu x polaznog kvadrata vrijedi:

$$A.\ 6<x<7 \qquad B.\ 7<x<8 \qquad C.\ 8<x<9 \qquad D.\ 9<x<10$$

Rezultat: D.

Zadatak 146 (Zvone, maturant)

Izračunajte ploštinu paralelograma, ako je e = 15 cm, f = 9 cm i šiljasti kut α = 60º.

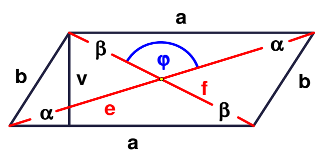
$$A.\ 30\cdot\sqrt{2}\ cm^2 \qquad B.\ 36\cdot\sqrt{3}\ cm^2 \qquad C.\ 36\ cm^2 \qquad D.\ 25\cdot\sqrt{2}\ cm^2$$

Rješenje 146

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c=b+d \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 120^\circ=-\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).



- ima dva para usporednih (paralelnih) stranica
- nasuprotne stranice jednake su duljine
- dijagonale se raspolavljaju
- suprotni kutovi jednaki su
- kutovi uz svaku stranicu suplementarni su $\alpha+\beta=180^\circ$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

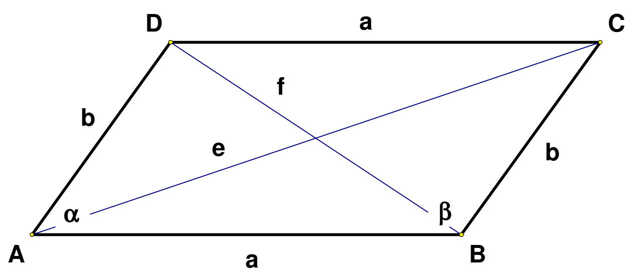
$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

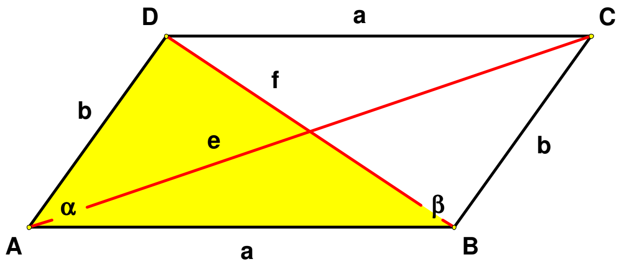
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$



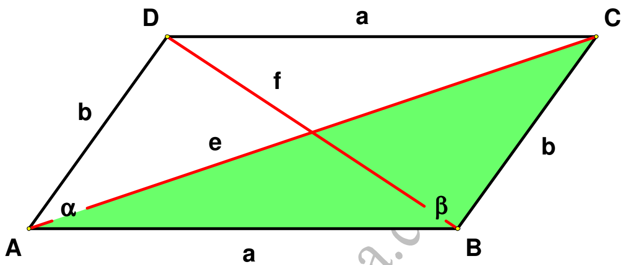
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = a \ , \ |BC| = |DA| = b \ , \ |AC| = e = 15 \ , \ |BD| = f = 9 \ , \ \angle DAB = \alpha = 60^\circ$$
$$\angle ABC = \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



Na trokutu ABD uporabimo kosinusov poučak.

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha \Rightarrow 9^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 81 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 81 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 81 = a^2 + b^2 - a \cdot b.$$



Na trokutu ABC, također, uporabimo kosinusov poučak.

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\beta \Rightarrow 15^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 225 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 225 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 225 = a^2 + b^2 + a \cdot b.$$

Iz sustava jednadžba dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} 81 = a^2 + b^2 - a \cdot b \\ 225 = a^2 + b^2 + a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 225 - 81 = a^2 + b^2 + a \cdot b - \left(a^2 + b^2 - a \cdot b\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144 = a^2 + b^2 + a \cdot b - a^2 - b^2 + a \cdot b \Rightarrow 144 = a^2 + b^2 + a \cdot b - a^2 - b^2 + a \cdot b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144 = a \cdot b + a \cdot b \Rightarrow 144 = 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow 2 \cdot a \cdot b = 144 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot b = 144 \ /:2 \Rightarrow a \cdot b = 72.$$

Ploština paralelograma ABCD jednaka je dvostrukoj ploštini trokuta ABD.

$$P = 2 \cdot P_{ABD} \Rightarrow P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha \Rightarrow P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow P = a \cdot b \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \cdot b = 72 \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right] \Rightarrow P = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 36 \cdot \sqrt{3} \ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 146

Izračunajte ploštinu paralelograma, ako je e = 30 cm, f = 18 cm i šiljasti kut α = 60º.

$A.\ 120 \cdot \sqrt{2}\ cm^2$ $\qquad B.\ 144 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$ $\qquad C.\ 144\ cm^2$ $\qquad D.\ 100 \cdot \sqrt{2}\ cm^2$

Rezultat: B.

Zadatak 147 (Mira, ekonomska škola)

Ako su kutovi četverokuta α, β, γ, δ i vrijedi $\alpha:\beta:\gamma:\delta=1:\frac{3}{2}:2:\frac{7}{2},$ tada za te kutove izlazi da su:

A. sva četiri šiljasta *B.* dva šiljasta i dva tupa
C. dva šiljasta, jedan pravi i jedan tupi *D.* tri šiljasta i jedan tupi

Rješenje 147

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Zbroj svih kutova u četverokutu je 360º.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^{\circ}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k\ \text{ ili }\ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Ako postoji n jednostavnih omjera, takvih da je

$$a_1:a_2=k_1$$
$$a_2:a_3=k_2$$
$$a_3:a_4=k_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}:a_n=k_{n-1}$$

produženi omjer je

$$a_1:a_2:a_3:a_4:\ldots:a_{n-1}:a_n.$$

Šiljasti kut: od 0^0 do 90^0.
Pravi kut: točno 90^0.
Tupi kut: od 90^0 do 180^0.
Zbog jednostavnosti možemo svaki član omjera pomnožiti brojem 2.

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta=1:\frac{3}{2}:2:\frac{7}{2}\Rightarrow\alpha:\beta:\gamma:\delta=(1\cdot 2):\left(\frac{3}{2}\cdot 2\right):(2\cdot 2):\left(\frac{7}{2}\cdot 2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha:\beta:\gamma:\delta=2:3:4:7\Rightarrow\left.\begin{aligned}\alpha&=2\cdot k\\ \beta&=3\cdot k\\ \gamma&=4\cdot k\\ \delta&=7\cdot k\end{aligned}\right\}-k\ \text{koeficijent proporcionalnosti}.$$

Zbroj kutova u četverokutu je 360^0.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ \Rightarrow 2\cdot k+3\cdot k+4\cdot k+7\cdot k=360^\circ \Rightarrow 16\cdot k=360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot k=360^\circ \; /:16 \Rightarrow k=22.5^\circ.$$

Mjere kutova su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot k\\ \beta=3\cdot k\\ \gamma=4\cdot k\\ \delta=7\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \left[k=22.5^\circ\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot 22.5^\circ\\ \beta=3\cdot 22.5^\circ\\ \gamma=4\cdot 22.5^\circ\\ \delta=7\cdot 22.5^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=45^\circ \text{ šiljasti kut}\\ \beta=67.5^\circ \text{ šiljasti kut}\\ \gamma=90^\circ \text{ pravi kut}\\ \delta=157.5^\circ \text{ tupi kut}\end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 147

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 148 (Tomo, maturant)

Dijagonale jednakokračnog trapeza su okomite, a površina je 50. Kolika je dijagonala?

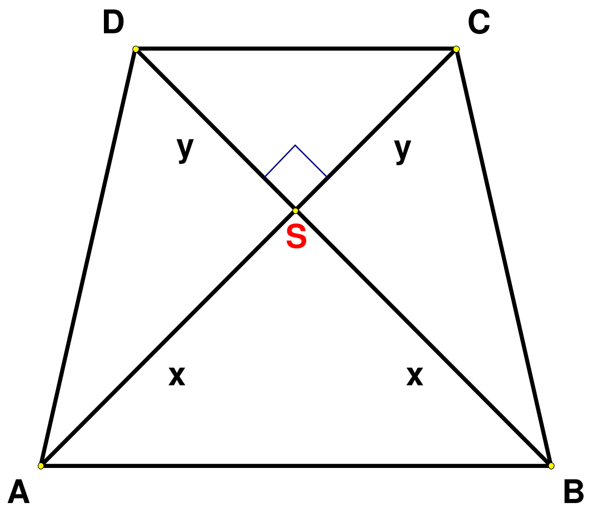
Rješenje 148

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je jednakokračan ako su mu nasuprotne neparalelne stranice jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P=\frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$



Sa slike vidi se:

$$|AS|=|BS|=x \;,\; |SC|=|SD|=y \;,\; d=|AC|=|BD|=x+y$$

$$\angle BSA = \angle CSB = \angle DSC = \angle ASD = 90^\circ$$

Površina trapeza ABCD jednaka je zbroju površina pravokutnih trokuta:

$$\Delta ABS, \Delta BCS, \Delta CDS \text{ i } \Delta DAS.$$

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{x \cdot x}{2} + \frac{y \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} \\ P = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} = 50 \;/\cdot 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x \cdot y + x \cdot y = 100 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 100 \Rightarrow (x+y)^2 = 100 \;/\sqrt{} \Rightarrow x + y = \sqrt{100} \Rightarrow x + y = 10.$$

Duljina dijagonale je 10.

$$d = x + y = 10.$$

Vježba 148

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 149 (Valentina, ekonomska škola)

Dijagonale paralelograma imaju duljine 6 cm i 10 cm, a jedna njegova stranica ima duljinu 7 cm. Kut među dijagonalama iznosi:

$A.\ 75^\circ \quad B.\ 90^\circ \quad C.\ 45^\circ \quad D.\ 60^\circ \quad E.\ 30^\circ$

Rješenje 149

Ponovimo!

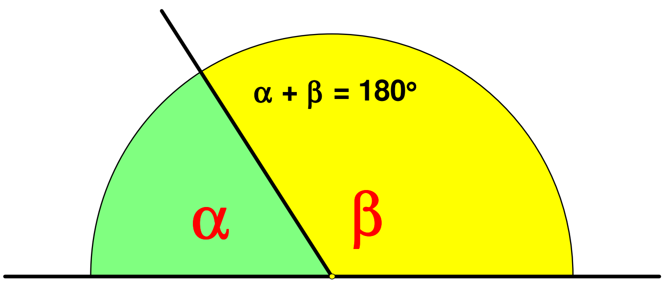
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Njegove dijagonale se raspolavljaju.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c},$$

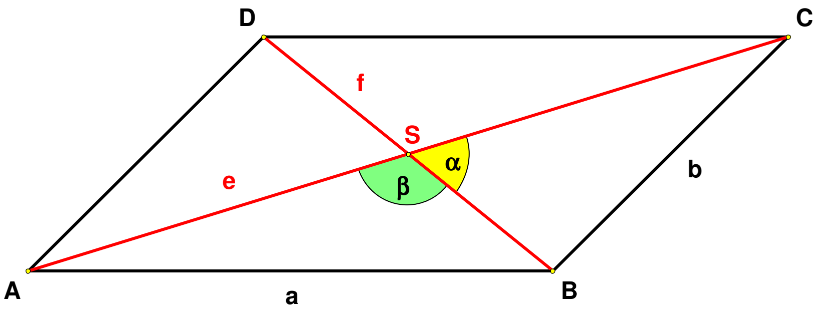
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Sukuti (susjedni) kutovi zajedno čine 180°. Sukuti su kutovi koji imaju jedan zajednički krak, a preostala su dva kraka različiti polupravci istoga pravca.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 7 \;,\; |AC| = 10 \;,\; |BD| = 6 \;,\; |AS| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 5 \;,\; |BS| = \frac{1}{2} \cdot |BD| = 3$$

$$\angle BSA = \beta \;,\; \angle CSB = \alpha$$

$$\cos(\beta) = \frac{|AS|^2 + |BS|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AS| \cdot |BS|} \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{25 + 9 - 49}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = -\frac{15}{30} \Rightarrow \cos(\beta) = -\frac{15}{30} \Rightarrow \cos(\beta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow \beta = 120^\circ.$

Sada je

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 120^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 149

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 150 (Bug, ekonomska škola)

Jedna stranica paralelograma iznosi 4 cm, druga 6 cm, a dijagonala $4 \cdot \sqrt{2}$ cm. Duljina druge dijagonale je:

$$A.\ 6\ cm \qquad B.\ 6 \cdot \sqrt{2}\ cm \qquad C.\ 8\ cm \qquad D.\ 4 \cdot \sqrt{3}\ cm$$

Rješenje 150

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos(\alpha) \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

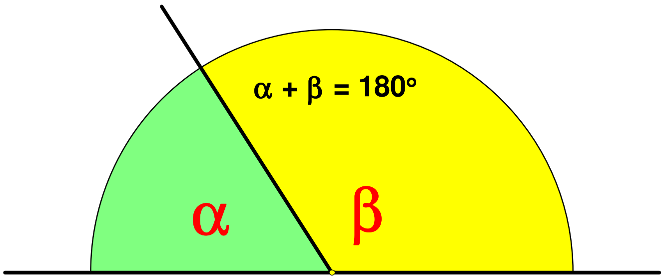
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Njegove dijagonale se raspolavljaju. Kutovi uz svaku stranicu suplementarni su (njihov zbroj je 180^0).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)\ \Rightarrow\ \cos(\beta)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

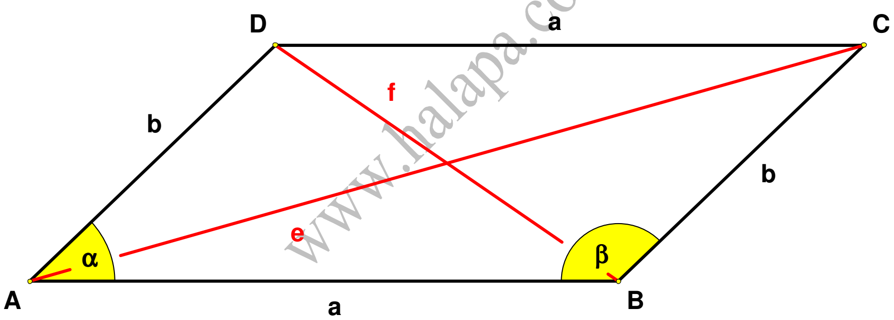
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\ \Rightarrow\ \cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

Sukuti (susjedni) kutovi zajedno čine 180°. Sukuti su kutovi koji imaju jedan zajednički krak, a preostala su dva kraka različiti polupravci istoga pravca.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

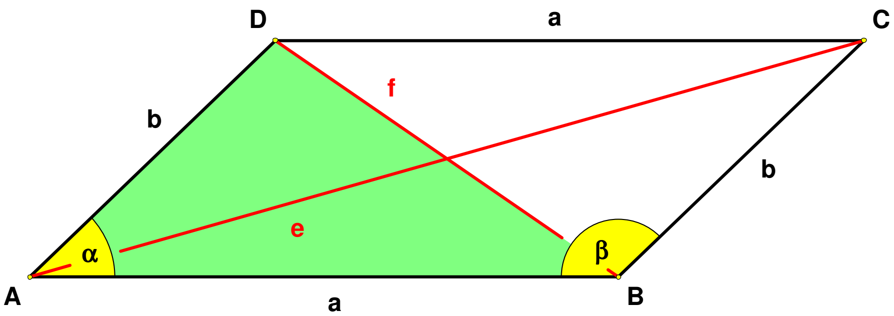
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|CD|=a=6\ ,\ |AD|=|BC|=b=4\ ,\ |BD|=f=4\cdot\sqrt{2}\ ,\ |AC|=e$$

$$\angle DAB=\alpha\ ,\ \angle ABC=\beta\ ,\ \alpha+\beta=180^{\circ}$$



Uočimo trokut ABD i uporabimo kosinusov poučak.

$$\cos(\alpha)=\frac{|AD|^2+|AB|^2-|BD|^2}{2\cdot|AD|\cdot|AB|}\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{4^2+6^2-\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 4\cdot 6}\ \Rightarrow$$

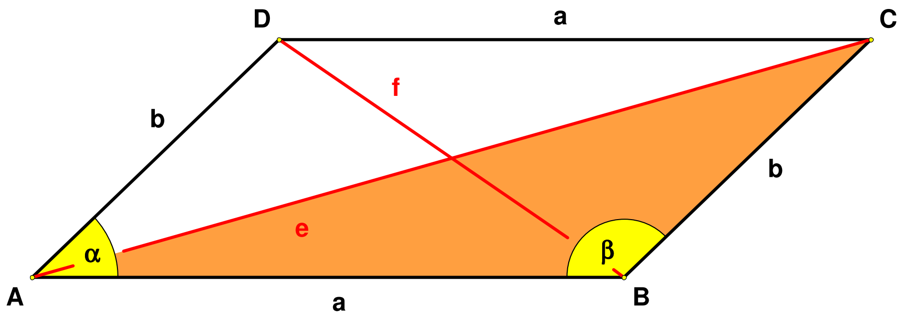
$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{16+36-4^{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{48} \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{52-16\cdot 2}{48} \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{20}{48} \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{20}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{5}{12}.$$

Budući da su kutovi α i β suplementarni, vrijedi:

$$\alpha+\beta=180^{\circ} \Rightarrow \beta=180^{\circ}-\alpha \Rightarrow \cos(\beta)=\cos\left(180^{\circ}-\alpha\right) \Rightarrow \cos(\beta)=-\cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\beta)=-\frac{5}{12}.$$



Uočimo trokut ABC i uporabom poučka o kosinusu izračunamo duljinu dijagonale e.

$$|AC|^{2}=|AB|^{2}+|BC|^{2}-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2}=6^{2}+4^{2}-2\cdot 6\cdot 4\cdot\left(-\frac{5}{12}\right) \Rightarrow e^{2}=36+16+12\cdot 4\cdot\frac{5}{12} \Rightarrow e^{2}=52+12\cdot 4\cdot\frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2}=52+20 \Rightarrow e^{2}=72 \Rightarrow e^{2}=72 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow e=\sqrt{72} \Rightarrow e=\sqrt{36\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow e=6\cdot\sqrt{2}\ cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 150

Jedna stranica paralelograma iznosi 8 cm, druga 12 cm, a dijagonala $8\cdot\sqrt{2}$ cm. Duljina druge dijagonale je:

$A.\ 12\ cm \qquad B.\ 12\cdot\sqrt{2}\ cm \qquad C.\ 16\ cm \qquad D.\ 8\cdot\sqrt{3}\ cm$

Rezultat: B.

Zadatak 151 (Filip, maturant)

Ako je omjer većeg kuta među dijagonalama pravokutnika prema manjem kutu 2 : 1, onda je omjer stranica pravokutnika a : b jednak (a > b):

$A.\ \sqrt{3}:1 \qquad B.\ 2:1 \qquad C.\ \sqrt{2}:1 \qquad D.\ 3:2$

Rješenje 151

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

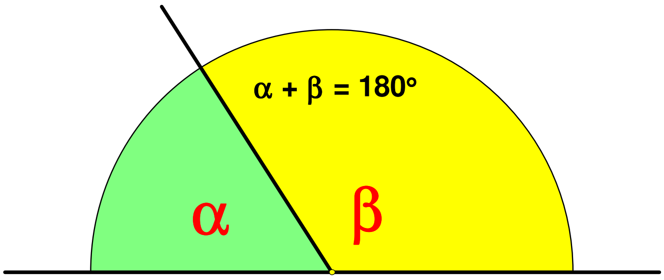
tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

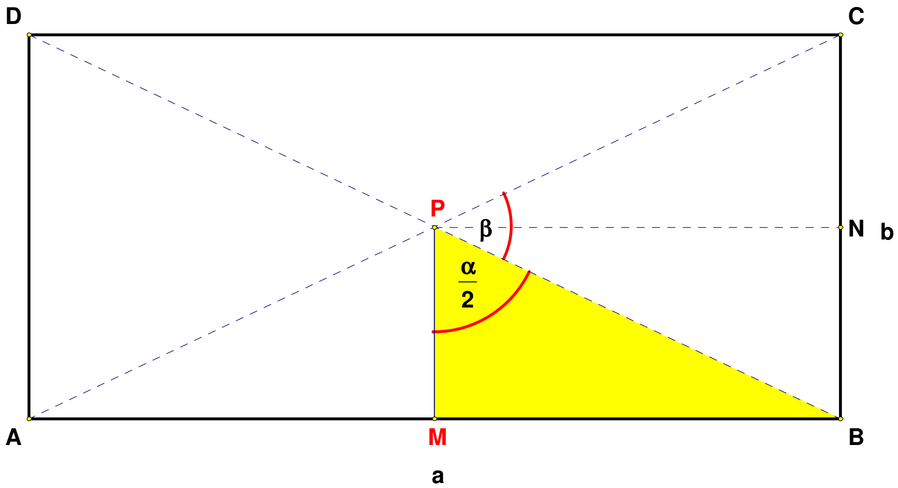
Sukuti (susjedni) kutovi zajedno čine 180°. Sukuti su kutovi koji imaju jedan zajednički krak, a preostala su dva kraka različiti polupravci istoga pravca.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = a \;,\; |MB| = \frac{a}{2} \;,\; |BC| = |AD| = b \;,\; |BN| = |MP| = \frac{b}{2}$$

$$\angle BPA=\alpha \ , \ \angle BPM=\frac{\alpha}{2} \ , \ \angle CPB=\beta$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha:\beta=2:1\\ \alpha+\beta=180^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=2\cdot\beta\\ \alpha+\beta=180^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot\beta+\beta=180^\circ \Rightarrow 3\cdot\beta=180^\circ \Rightarrow 3\cdot\beta=180^\circ \ /:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=60^\circ \Rightarrow \left[\alpha=2\cdot\beta\right] \Rightarrow \alpha=2\cdot 60^\circ \Rightarrow \alpha=120^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=60^\circ.$$

Uočimo pravokutan trokut MBP i uporabimo funkciju tangens.

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{|MB|}{|MP|} \Rightarrow tg\left(60^\circ\right)=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow a:b=\sqrt{3}:1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 151

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 152 (Filip, maturant)

Duljine stranica paralelograma su 3 i 5. Zbroj kvadrata dijagonala je:

$A.\ 68 \qquad B.\ 44 \qquad C.\ 70 \qquad D.\ 59$

Rješenje 152

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix}a=b\\ c=d\end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

Transformacija zbroja u umnožak

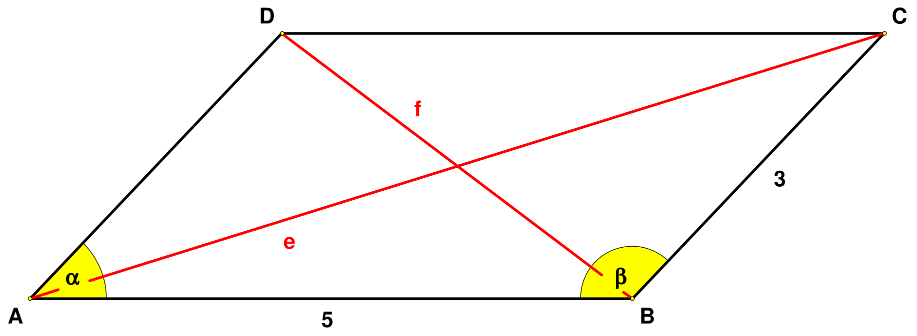
$$\cos(x)+\cos(y)=2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Njegove dijagonale se raspolavljaju. Kutovi uz svaku stranicu suplementarni su (njihov zbroj je 180^0).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha),$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta),$$

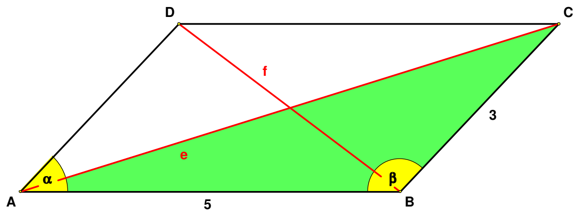
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma).$$

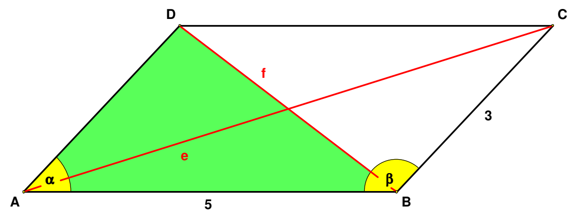


Sa slike vidi se:

$$|AB|=|CD|=5\ ,\ |BC|=|AD|=3\ ,\ |AC|=e\ ,\ |BD|=f$$

$$\alpha+\beta=180^\circ\ ,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ$$





Uočimo trokute ΔABC i ΔABD. Pomoću kosinusova poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} |AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos(\beta) \\ |BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\cos(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos(\beta) \\ f^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^2=25+9-30\cdot\cos(\beta) \\ f^2=25+9-30\cdot\cos(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^2=34-30\cdot\cos(\beta) \\ f^2=34-30\cdot\cos(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{jednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow e^2+f^2=34-30\cdot\cos(\beta)+34-30\cdot\cos(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2+f^2=68-30\cdot(\cos(\alpha)+\cos(\beta))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2+f^2=68-30\cdot2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Rightarrow\left[\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2+f^2=68-60\cdot\cos\left(90^\circ\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Rightarrow e^2+f^2=68-60\cdot0\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2+f^2=68.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 152

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 153 (Ivana, maturantica)

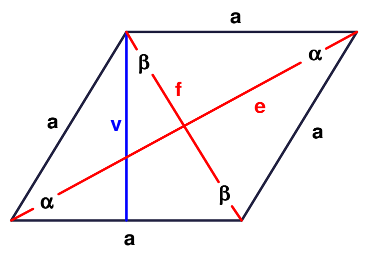
Dijagonale romba iznose 6 i 8. Visina tog romba je:

$A.\ 4.8 \qquad B.\ 5 \qquad C.\ 5.4 \qquad D.\ 6.2$

Rješenje 153

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Romb je paralelogram koji ima 2 para paralelnih stranica. Sve su mu stranice jednake duljine.

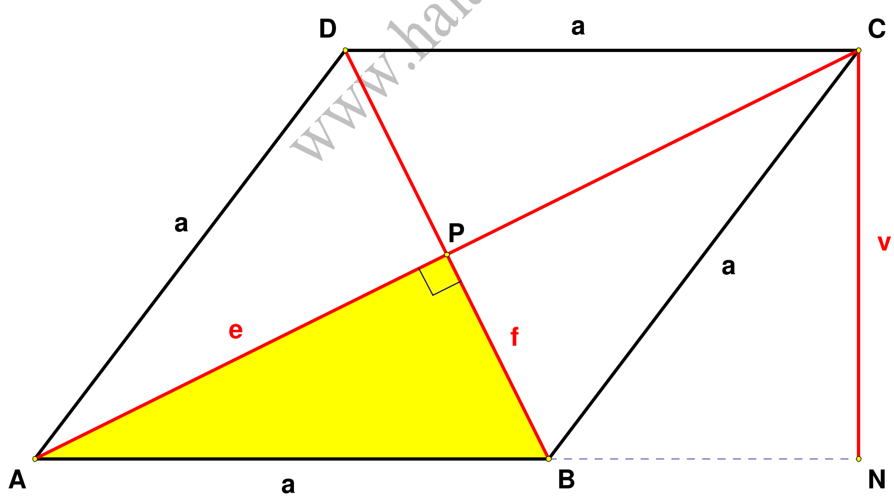


- ima dva para usporednih (paralelnih) stranica
- nasuprotne stranice su jednake duljine
- ima sve četiri stranice jednake duljine
- dijagonale se raspolavljaju
- dijagonale su međusobno okomite
- dijagonale su simetrale kutova
- suprotni kutovi su jednaki
- kutovi uz svaku stranicu suplementarni su
- može se upisati kružnica

Površina romba je

$$P = a \cdot v \quad , \quad P = \frac{e \cdot f}{2},$$

gdje je a duljina stranice, v visina, e dijagonala, f dijagonala.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \ , \ |CN| = v \ , \ |AC| = e = 8 \ , \ |AP| = \frac{e}{2} = 4$$

$$|BD| = f = 6 \ , \ |BP| = \frac{f}{2} = 3$$

Uočimo pravokutan trokut ABP i pomoću Pitagorina poučka izračunamo a.

$$|AB|^2 = |BP|^2 + |AP|^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5.$$

Površinu romba zapišemo na dva načina kako bismo izračunali v.

$$\left.\begin{array}{l} P = a \cdot v \\ P = \dfrac{e \cdot f}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \;/\cdot \frac{1}{a} \Rightarrow v = \frac{e \cdot f}{2 \cdot a} \Rightarrow v = \frac{8 \cdot 6}{2 \cdot 5} \Rightarrow v = 4.8.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 153

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 154 (Luka, tehnička škola)

Duljina jedne stranice pravokutnika poveća se za 50 %, a druge umanji za 50 %. Za koliko se promijeni površina pravokutnika?

$A.$ Umanji se za 25%. $B.$ Umanji se za 50%.
$C.$ Uveća se za 25%. $D.$ Uveća se za 50%.

Rješenje 154

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c} \quad , \quad a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.
Na primjer,

$$9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547\ \% = \frac{547}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x smanji za p% ?

$$x - \frac{p}{100} \cdot x.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Njegova je površina

$$P = a \cdot b.$$

Nakon promjene bit će:

$$P_1 = \left(a + \frac{50}{100} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{50}{100} \cdot b\right) \Rightarrow P_1 = \left(a + \frac{50}{100} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{50}{100} \cdot b\right) \Rightarrow$$

$$P_1 = \left(a + \frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{1}{2} \cdot b\right) \Rightarrow P_1 = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \Rightarrow P_1 = a \cdot b - \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \Rightarrow P_1 = P - \frac{1}{4} \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = P - \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} \cdot P \Rightarrow P_1 = P - \frac{25}{100} \cdot P.$$

P_1 se umanji za 25 %.
Ili ovako!

$$P_1 = \left(a + \frac{50}{100} \cdot a\right) \cdot \left(b - \frac{50}{100} \cdot b\right) \Rightarrow P_1 = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot b \Rightarrow P_1 = \frac{3}{4} \cdot a \cdot b \Rightarrow P_1 = P - \frac{1}{4} \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = P - \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} \cdot P \Rightarrow P_1 = P - \frac{25}{100} \cdot P.$$

P_1 se umanji za 25 %.
Odgovor je pod A.

Vježba 154

Duljine stranica pravokutnika povećaju se za 50 %. Za koliko se promijeni površina pravokutnika?

A. Uveća se za 25 %. *B.* Uveća se za 50 %.
C. Uveća se za 75 %. *D.* Uveća se za 125 %.

Rezultat: D.

Zadatak 155 (Ante, maturant)

Od žice duljine 120 cm napravljen je model kvadrata i model pravokutnika kojemu je jedna stranica trostruko dulja od druge. Kolika treba biti duljina stranice kvadrata da bi zbroj površina tih likova bio minimalan?

Rješenje 155

Ponovimo!

$$a^1 = a \ , \ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \ , \ (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \ , \ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \ , \ a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c} \ , \ \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ , \ a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Opseg pravokutnika izračunava se po formuli:

$$O = 2 \cdot (a + b),$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je **minimum** ako je **a > 0**, maksimum ako je a < 0.
Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \quad , \quad (f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

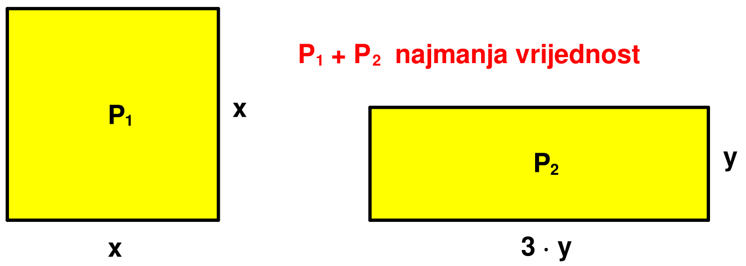
IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- $\text{za } f''(x_i)>0 \text{ u } x_i \text{ je minimum}$
- $\text{za } f''(x_i)<0 \text{ u } x_i \text{ je maksimum}.$

1.inačica



Neka je x duljina stranice kvadrata. Za njegov opseg i površinu vrijedi:

$$O_1=4\cdot x \quad , \quad P_1=x^2.$$

Neka je y duljina kraće stranice pravokutnika. Dulja stranica iznosi 3 · y. Za njegov opseg i površinu vrijedi:

$$O_2=2\cdot(y+3\cdot y) \;\Rightarrow\; O_2=8\cdot y \;,\; P_2=3\cdot y\cdot y \;\Rightarrow\; P_2=3\cdot y^2.$$

Modeli kvadrata i pravokutnika napravljeni su od žice duljine 120 cm pa vrijedi jednadžba:

$$O_1+O_2=120 \;\Rightarrow\; 4\cdot x+8\cdot y=120 \;\Rightarrow\; 8\cdot y=-4\cdot x+120 \;\Rightarrow\; 8\cdot y=-4\cdot x+120 \;/:8 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}\cdot x+15.}$$

Zbroj površina kvadrata i pravokutnika je kvadratna funkcija.

$$f=P_1+P_2 \;\Rightarrow\; f=x^2+3\cdot y^2 \;\Rightarrow\; f=x^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot x+15\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f=x^2+3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x^2-15\cdot x+225\right) \;\Rightarrow\; f=x^2+\frac{3}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\; f=\frac{7}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675.}$$

Vodeći je koeficijent ove funkcije pozitivan.

$$a=\frac{7}{4}>0.$$

Imat će najmanju vrijednost u točki s apscisom

$$x=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Izračunajmo to!

$$f=\frac{7}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f=\frac{7}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675 \\ a=\frac{7}{4}\ ,\ b=-45\ ,\ c=675 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x=-\frac{b}{2\cdot a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{-45}{2\cdot\frac{7}{4}} \Rightarrow x=\frac{45}{2\cdot\frac{7}{4}} \Rightarrow x=\frac{45}{\frac{7}{2}} \Rightarrow x=\frac{90}{7}.$$

Duljina stranice kvadrata je $\frac{90}{7}$ cm.

2.inačica

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x)=\frac{7}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675 \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{7}{4}\cdot x^2-45\cdot x+675\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{7}{4}\cdot x^2\right)'-(45\cdot x)'+675' \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{4}\cdot\left(x^2\right)'-45\cdot x'+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{4}\cdot 2\cdot x-45\cdot 1 \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{4}\cdot 2\cdot x-45 \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{2}\cdot x-45.$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{7}{2}\cdot x-45=0 \Rightarrow \frac{7}{2}\cdot x=45 \Rightarrow \frac{7}{2}\cdot x=45\ /\cdot\frac{2}{7} \Rightarrow x=\frac{90}{7}.$$

Jednadžba ima jednu realnu nultočku, tj. postoji jedna stacionarna točka zadane funkcije.
Tražimo drugu derivaciju tako da deriviramo prvu derivaciju zadane funkcije.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{7}{2}\cdot x-45\right)'=\left(\frac{7}{2}\cdot x\right)'-45'=\frac{7}{2}\cdot x'-0=\frac{7}{2}\cdot 1=\frac{7}{2}>0.$$

Druga derivacija je pozitivna pa funkcija f ima lokalni minimum za $x=\frac{90}{7}$.

Duljina stranice kvadrata je $\frac{90}{7}$ cm.

Vježba 155

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 156 (Lidija, gimnazija)

Srednjica trapeza duga je 10 cm i njome je trapez podijeljen na dva dijela čije su površine u omjeru 3 : 5. Duljina kraće osnovice trapeza jednaka je:

A. 5 *cm* *B.* 6 *cm* *C.* 4 *cm* *D.* 3 *cm*

Rješenje 156

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b\cdot d}\cdot c.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \text{ ili } \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

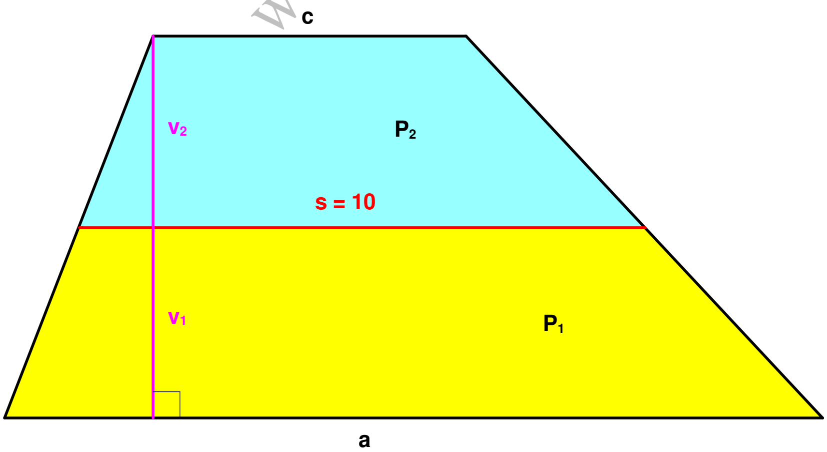
gdje je v visina trapeza.
Srednjica trapeza je spojnica polovišta krakova trapeza. Ona je paralelna osnovici trapeza, a duljina joj je jednaka polovini zbroja duljina osnovica trapeza.

$$s = \frac{a+c}{2}.$$

Udaljenost između dviju paralelnih stranica trapeza jest njegova visina.
Srednjica trapeza dijeli visinu na dva jednaka dijela.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica



Za srednjicu trapeza vrijedi:

$$\frac{a+c}{2} = s \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{2} = 10 \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{2} = 10 \; / \cdot 2 \;\Rightarrow\; a + c = 20 \;\Rightarrow\; a = 20 - c.$$

Površina velikog trapeza jednaka je zbroju površina dvaju manjih trapeza.

$$\frac{a+c}{2} \cdot (v_1 + v_2) = \frac{a+s}{2} \cdot v_1 + \frac{s+c}{2} \cdot v_2 \;\Rightarrow\; 10 \cdot (v_1 + v_2) = \frac{a+10}{2} \cdot v_1 + \frac{10+c}{2} \cdot v_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 10 \cdot (v_1 + v_2) = \frac{a+10}{2} \cdot v_1 + \frac{10+c}{2} \cdot v_2 \; / \cdot 2 \;\Rightarrow\; 20 \cdot (v_1 + v_2) = (a+10) \cdot v_1 + (10+c) \cdot v_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, a=20-c \,\right] \Rightarrow 20\cdot\left(v_1+v_2\right)=\left(20-c+10\right)\cdot v_1+\left(10+c\right)\cdot v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot\left(v_1+v_2\right)=\left(30-c\right)\cdot v_1+\left(10+c\right)\cdot v_2 \Rightarrow 20\cdot v_1+20\cdot v_2=\left(30-c\right)\cdot v_1+\left(10+c\right)\cdot v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot v_1+20\cdot v_2=\left(30-c\right)\cdot v_1+\left(10+c\right)\cdot v_2 \;/\cdot\frac{1}{v_1} \Rightarrow 20+20\cdot\frac{v_2}{v_1}=30-c+\left(10+c\right)\cdot\frac{v_2}{v_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot\frac{v_2}{v_1}-\left(10+c\right)\cdot\frac{v_2}{v_1}=30-c-20 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}\cdot\left(20-10-c\right)=10-c \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}\cdot\left(10-c\right)=10-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1}\cdot\left(10-c\right)-\left(10-c\right)=0 \Rightarrow \left(10-c\right)\cdot\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10-c=0 \\ \dfrac{v_2}{v_1}-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=10 \text{ nije moguće} \\ \dfrac{v_2}{v_1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=1 \Rightarrow v_2=v_1.$$

Površine manjih trapeza su u omjeru 3 : 5.

$$P_2 : P_1 = 3:5 \Rightarrow 5\cdot P_2=3\cdot P_1 \Rightarrow 5\cdot\frac{10+c}{2}\cdot v_2=3\cdot\frac{a+10}{2}\cdot v_1 \Rightarrow \left[\, v_2=v_1 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot\frac{10+c}{2}\cdot v_1=3\cdot\frac{a+10}{2}\cdot v_1 \Rightarrow 5\cdot\frac{10+c}{2}\cdot v_1=3\cdot\frac{a+10}{2}\cdot v_1 \;/\cdot\frac{2}{v_1} \Rightarrow$$

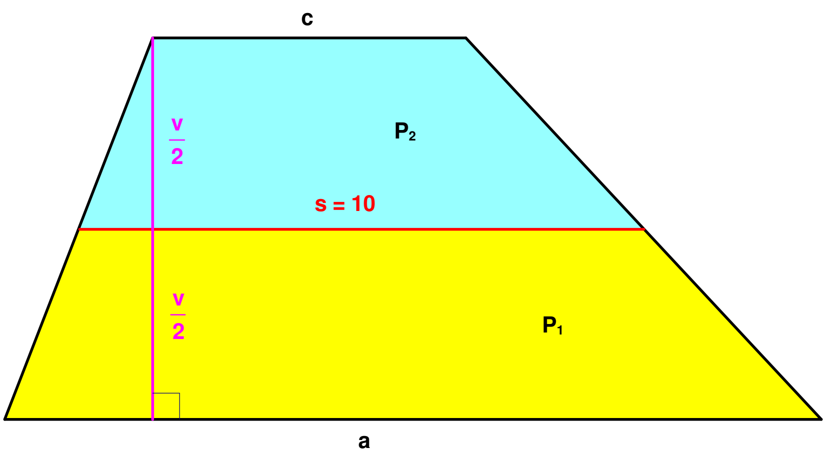
$$\Rightarrow 5\cdot\left(10+c\right)=3\cdot\left(a+10\right) \Rightarrow \left[\, a=20-c \,\right] \Rightarrow 5\cdot\left(10+c\right)=3\cdot\left(20-c+10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot\left(10+c\right)=3\cdot\left(30-c\right) \Rightarrow 50+5\cdot c=90-3\cdot c \Rightarrow 5\cdot c+3\cdot c=90-50 \Rightarrow 8\cdot c=40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot c=40 \;/:8 \Rightarrow c=5\ cm.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica



Za srednjicu trapeza vrijedi:

$$\frac{a+c}{2}=s \Rightarrow \frac{a+c}{2}=10 \Rightarrow \frac{a+c}{2}=10 \;/\cdot 2 \Rightarrow a+c=20 \Rightarrow a=20-c.$$

Primijetimo da srednjica trapeza dijeli visinu na dva jednaka dijela.
Površine manjih trapeza su u omjeru 3 : 5.

$$P_2 : P_1 = 3 : 5 \Rightarrow 5 \cdot P_2 = 3 \cdot P_1 \Rightarrow 5 \cdot \frac{10+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = 3 \cdot \frac{a+10}{2} \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \frac{10+c}{4} \cdot v = 3 \cdot \frac{a+10}{4} \cdot v \Rightarrow 5 \cdot \frac{10+c}{4} \cdot v = 3 \cdot \frac{a+10}{4} \cdot v \;/ \cdot \frac{4}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (10+c) = 3 \cdot (a+10) \Rightarrow \left[a = 20 - c \right] \Rightarrow 5 \cdot (10+c) = 3 \cdot (20 - c + 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (10+c) = 3 \cdot (30 - c) \Rightarrow 50 + 5 \cdot c = 90 - 3 \cdot c \Rightarrow 5 \cdot c + 3 \cdot c = 90 - 50 \Rightarrow 8 \cdot c = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot c = 40 \;/ : 8 \Rightarrow c = 5 \; cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 156

Odmor!

Rezultat: …