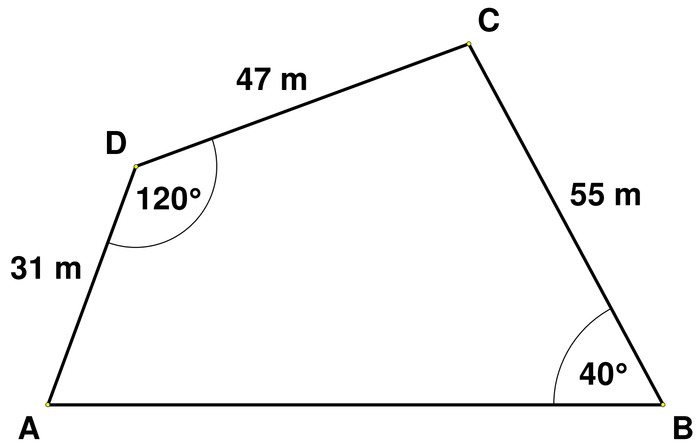
Zadatak 101 (4A, 4B, TUPŠ)

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.



a) Izračunajte udaljenost točaka A i C.
b) Izračunajte mjeru kuta BAC.
c) Kolika je površina zemljišta sa slike?

Rješenje 101

Ponovimo!

$$1^{\circ}=60' \quad , \quad 1'=60'' \quad , \quad b\cdot\frac{a}{b}=a \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Rezolvirati znači jedinice – veličine višega reda pretvoriti u jedinice – veličine nižega reda. Tu množimo s pretvornicima.

Na primjer,

$$4\ h\ 15\ \min\ 20\ s=4\cdot 3600\ s+15\cdot 60\ s+20\ s=15320\ s.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

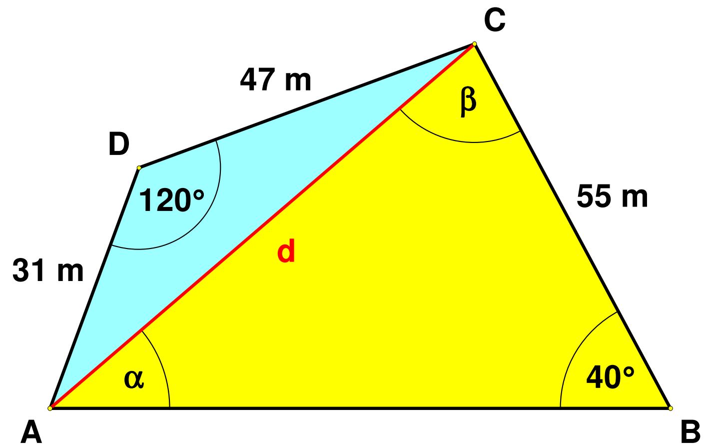
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^{2}=a^{2}+c^{2}-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad c^{2}=a^{2}+b^{2}-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta.



Sa slike vidi se:

$$|BC| = 55 \ , \ |CD| = 47 \ , \ |DA| = 31 \ , \ \angle CDA = 120^\circ \ , \ \angle ABC = 40^\circ \ , \ \angle CAB = \alpha$$

$$\angle BCA = \beta \ , \ |AC| = d$$

a)
Uočimo trokut ACD. Pomoću poučka o kosinusima dobivamo:

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |DA|^2 \cdot \cos\angle CDA \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ d^2 = 47^2 + 31^2 - 2 \cdot 47 \cdot 31 \cdot \cos 120^\circ \ \Rightarrow \ d^2 = 2209 + 961 - 2914 \cdot (-0.5) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ d^2 = 4627 \ \Rightarrow \ d^2 = 4627 \ /\sqrt{\ } \ \Rightarrow \ d = \sqrt{4627} \ \Rightarrow \ d = 68.02 \ m.$$

b)
Računamo mjeru kuta BAC. Uočimo trokut ABC. Iz sinusovog poučka razabiremo da je:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin 40^\circ} \ \Rightarrow \ \frac{\sin\alpha}{|BC|} = \frac{\sin 40^\circ}{|AC|} \ \Rightarrow \ \frac{\sin\alpha}{|BC|} = \frac{\sin 40^\circ}{|AC|} \ / \cdot |BC| \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \sin 40^\circ \ \Rightarrow \ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|BC|}{|AC|} \cdot \sin 40^\circ\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{55}{68.02} \cdot \sin 40^\circ\right) \ \Rightarrow \ \alpha = 31^\circ 18' 56''.$$

c)
U trokutu ABC izračunamo mjeru kuta β. Kut β računamo iz osnovne relacije

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

za kutove trokuta.

$$\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ \ \Rightarrow \ \beta + 31^\circ 18' 56'' + 40^\circ = 180^\circ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \beta = 180^\circ - 31^\circ 18' 56'' - 40^\circ \ \Rightarrow \ \beta = 140^\circ - 31^\circ 18' 56'' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \beta = 139^\circ 59' 60'' - 31^\circ 18' 56'' \ \Rightarrow \ \beta = 108^\circ 41' 4''.$$

Da bismo izračunali površinu četverokuta ABCD konstruirat ćemo dijagonalu AC i dobiti dva trokuta: ΔABC i ΔACD. Površina četverokuta ABCD jednaka je zbroju površina trokuta ΔABC i ΔACD.

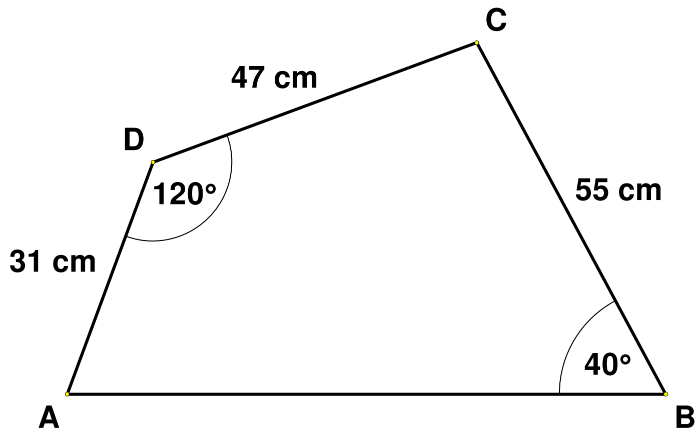
$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} \ \Rightarrow \ P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin\beta + \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |DA| \cdot \sin 120^\circ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 68.02 \cdot \sin 108^{\circ} 41' 4'' + \frac{1}{2} \cdot 47 \cdot 31 \cdot \sin 120^{\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 1771.97 + 630.90 \Rightarrow P_{ABCD} = 2402.87 \ m^2.$$

Vježba 101

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.

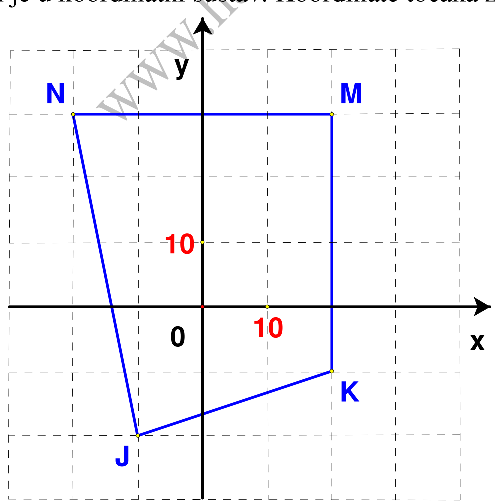


a) Izračunajte udaljenost točaka A i C.
b) Izračunajte mjeru kuta BAC.
c) Kolika je površina zemljišta sa slike?

Rezultat: 68.02 cm, 31° 18' 56", 2402.87 cm^2.

Zadatak 102 (4A, 4B, TUPŠ)

Oblik igrališta ucrtan je u koordinatni sustav. Koordinate točaka zadane su u metrima.



a) Koje koordinate ima točka J?
b) Koliko metara iznosi najkraći put od točke N do točke J?
c) Kolika je ploština dijela igrališta određenoga točkama JMN?

Rješenje 102

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ako su poznate koordinate vrhova trokuta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ njegova ploština može se izračunati po jednoj od formula:

- $P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|$
- $P=\frac{1}{2}\cdot\left|y_1\cdot(x_2-x_3)+y_2\cdot(x_3-x_1)+y_3\cdot(x_1-x_2)\right|.$

Apsolutna vrijednost osigurava da ploština bude pozitivna. Treba paziti na cikličku izmjenu indeksa u formulama: 1, 2, 3 → 2, 3, 1 → 3, 1, 2.

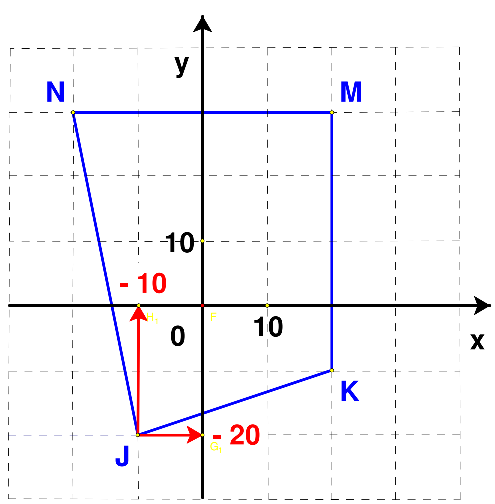
Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

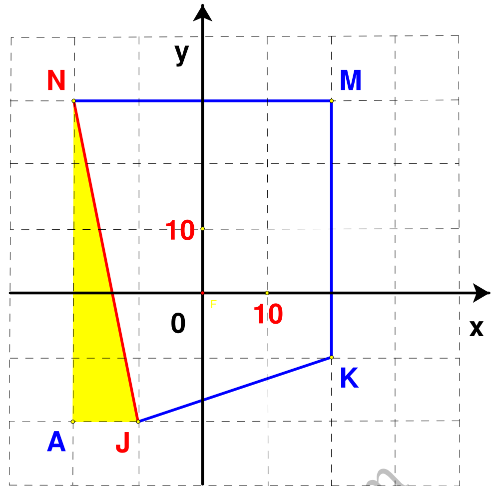
a) Odredimo koordinate točke J.



Povučemo točkom J paralelu s y – osi. Ta paralela siječe x – os u točki kojoj je pridružen točno jedan realan broj, – 10.
Povučemo li točkom J paralelu s x – osi ta paralela siječe y – os u točki kojoj je pridružen točno jedan realan broj, – 20.
Tražene koordinate točke J su:

$$J(x,\ y)=J(-10,\ -20).$$

b) Računamo najkraći put od točke N do točke J.



1.inačica

Sa slike vidi se:

$$|NA|=50\ m\ ,\ |AJ|=10\ m$$

Uočimo pravokutan trokut NAJ s pravim kutom u točki A i hipotenuzom $\overline{NJ}$. Duljine kateta tog trokuta su $|NA|=50\ m$ i $|AJ|=10\ m.$ Primjenom Pitagorina poučka na trokut NAJ dobije se:

$$|NJ|^2=|NA|^2+|AJ|^2\ \Rightarrow\ |NJ|^2=(50\ m)^2+(10\ m)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |NJ|^2=2500\ m^2+100\ m^2\ \Rightarrow\ |NJ|^2=2600\ m^2\ \Rightarrow\ |NJ|^2=2600\ m^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{2600\ m^2}\ \Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{100\cdot 26\ m^2}\ \Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{100}\cdot\sqrt{26}\ m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |NJ|=10\cdot\sqrt{26}\ m\ \Rightarrow\ |NJ|=50.99\ m.$$

2.inačica

Sa slike vidi se da koordinate točaka N i J glase:

$$\left.\begin{array}{l} N(x,\ y)=N(-20,\ 30) \\ J(x,\ y)=J(-10,\ -20) \end{array}\right\}.$$

Sada treba izračunati udaljenost između točaka N i J.

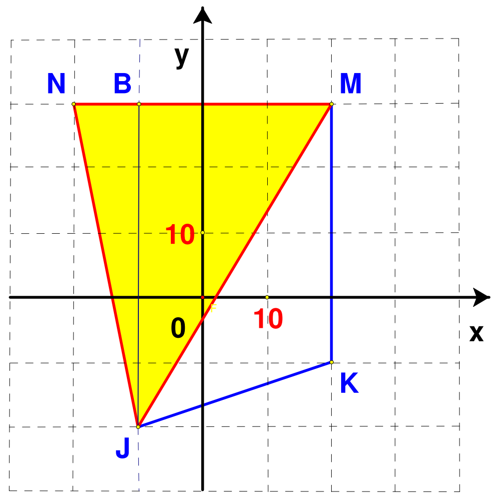
$$\left.\begin{array}{l} N(x_1,\ y_1)=N(-20,\ 30) \\ J(x_2,\ y_2)=J(-10,\ -20) \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\ |NJ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{(-10-(-20))^2+(-20-30)^2}\ \Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{(-10+20)^2+(-50)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{10^2+(-50)^2}\ \Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{100+2500}\ \Rightarrow\ |NJ|=\sqrt{2600}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |NJ| = \sqrt{100 \cdot 26} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{100} \cdot \sqrt{26} \Rightarrow |NJ| = 10 \cdot \sqrt{26} \Rightarrow |NJ| = 50.99 \ m.$$

c) Računamo ploštinu dijela igrališta određenoga točkama JMN.



1.inačica

Sa slike vidi se:

$$|NM| = 40 \ m \ , \ |BJ| = 50 \ m$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

$$P = \frac{|NM| \cdot |BJ|}{2} \Rightarrow P = \frac{40 \ m \cdot 50 \ m}{2} \Rightarrow P = \frac{2000 \ m^2}{2} \Rightarrow P = \frac{2000 \ m^2}{2} \Rightarrow P = 1000 \ m^2.$$

2.inačica

Sa slike odredimo koordinate vrhova trokuta N(– 20, 30), J(– 10, – 20), M(20, 30) pa njegova ploština iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} N(x_1, y_1) = N(-20, 30) \\ J(x_2, y_2) = J(-10, -20) \\ M(x_3, y_3) = M(20, 30) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right| \right] \Rightarrow$$

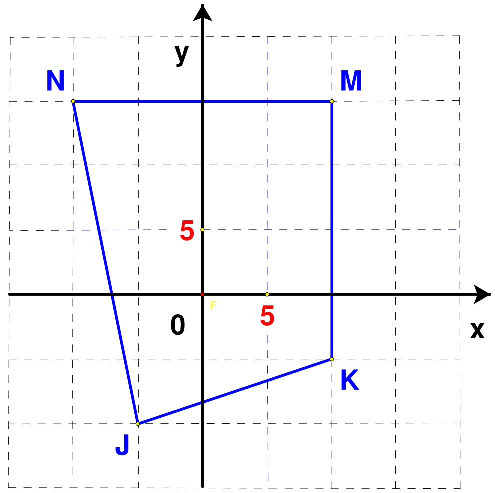
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| -20 \cdot (-20 - 30) - 10 \cdot (30 - 30) + 20 \cdot (30 - (-20)) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| -20 \cdot (-50) - 10 \cdot 0 + 20 \cdot (30 + 20) \right| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| 1000 + 20 \cdot 50 \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| 1000 + 1000 \right| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left| 2000 \right| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 2000 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 2000 \Rightarrow P = 1000 \ m^2.$$

Vježba 102

Oblik igrališta ucrtan je u koordinatni sustav. Koordinate točaka zadane su u metrima.



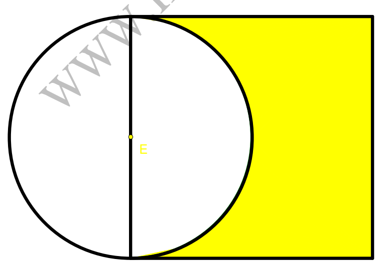
a) Koje koordinate ima točka J?
b) Koliko metara iznosi najkraći put od točke N do točke J?
c) Kolika je ploština dijela igrališta određenoga točkama JMN?

Rezultat: J(– 5, – 10), 25.50 m, 250 m^2.

Zadatak 103 (Marija, ekonomska škola)

U polovištu jedne stranice kvadrata nalazi se središte kružnice (vidi sliku). Ako je duljina stranice kvadrata 8 cm, tada površina osjenčanog lika iznosi:

$A.\ (64-8\cdot\pi)\ cm^2$ $B.\ (64-16\cdot\pi)\ cm^2$ $C.\ 56\cdot\pi\ cm^2$ $D.\ 48\cdot\pi$



Rješenje 103

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

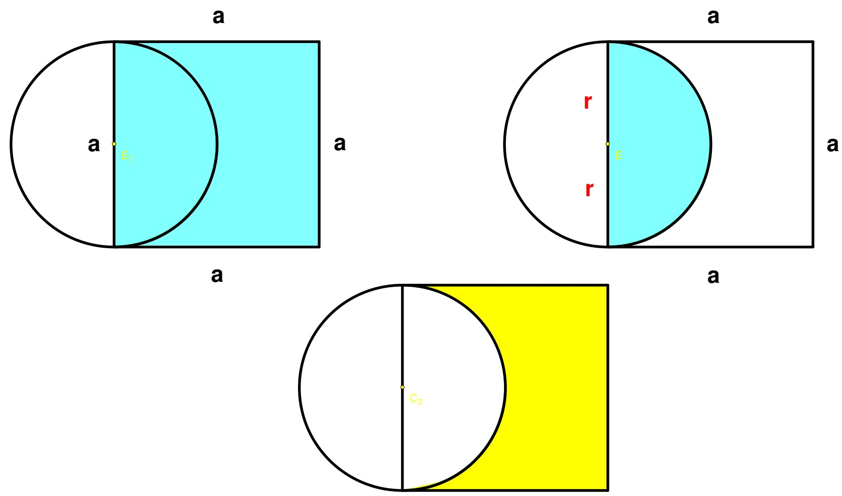
$$P=a^2.$$

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



Sa slika vidi se da je površina osjenčanog (žutog) dijela jednaka razlici površine kvadrata i površine pola kruga. Stranica kvadrata je istodobno promjer kruga pa vrijedi:

$$2 \cdot r = a \Rightarrow 2 \cdot r = a \;/:2 \Rightarrow r = \frac{a}{2}.$$

Površina osjenčanog lika iznosi:

$$P = a^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 8^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \pi \Rightarrow$$

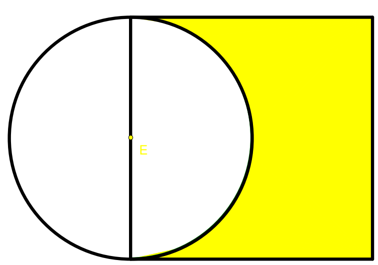
$$\Rightarrow P = (64 - 8 \cdot \pi)\ cm^2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 103

U polovištu jedne stranice kvadrata nalazi se središte kružnice (vidi sliku). Ako je duljina stranice kvadrata 4 cm, tada površina osjenčanog lika iznosi:

$A.\ (16 - 4 \cdot \pi)\ cm^2$ $\quad B.\ (16 - 2 \cdot \pi)\ cm^2$ $\quad C.\ 36 \cdot \pi\ cm^2$ $\quad D.\ 8 \cdot \pi$



Rezultat: B.

Zadatak 104 (Davor, ekonomska škola)

Iz limenog kruga promjera 180 cm treba izraditi pravokutnik maksimalne površine čija je duljina dva puta veća od širine. Kolike su dimenzije tog pravokutnika?

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

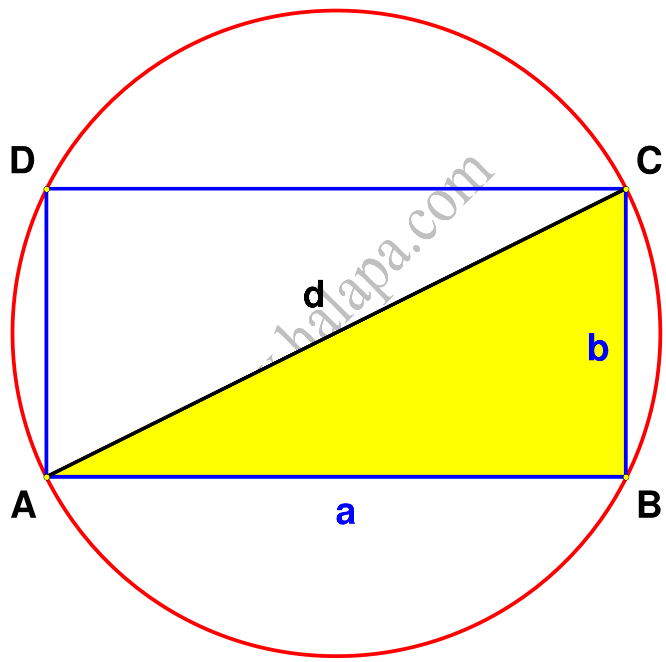
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kako zapisati "broj a je n puta veći od broja b?"

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{n} = b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = a \ , \ |BC| = |AD| = b \ , \ |AC| = d$$

Uočimo da je promjer kruga dijagonala upisanog pravokutnika ABCD. Trokut ABC je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [a = 2 \cdot b] \Rightarrow d^2 = (2 \cdot b)^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 4 \cdot b^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = 5 \cdot b^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = d^2 \Rightarrow [d = 180 \ cm] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot b^2 = (180 \ cm)^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = 32\,400 \ cm^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = 32\,400 \ cm^2 \ /:5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 6\,480 \ cm^2 \Rightarrow b^2 = 6\,480 \ cm^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow b = \sqrt{6\,480 \ cm^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1296 \cdot 5 \ cm^2} \Rightarrow b = \sqrt{1296} \cdot \sqrt{5 \ cm^2} \Rightarrow b = 36 \cdot \sqrt{5} \ cm.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{array}{l} b = 36 \cdot \sqrt{5}\ cm \\ a = 2 \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2 \cdot 36 \cdot \sqrt{5}\ cm \Rightarrow a = 72 \cdot \sqrt{5}\ cm.$$

Vježba 104

Iz limenog kruga promjera 18 dm treba izraditi pravokutnik maksimalne površine čija je širina dva puta manja od duljine. Kolike su dimenzije tog pravokutnika?

Rezultat: $a = 72 \cdot \sqrt{5}\ cm,\ b = 36 \cdot \sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 105 (4B, TUPŠ)

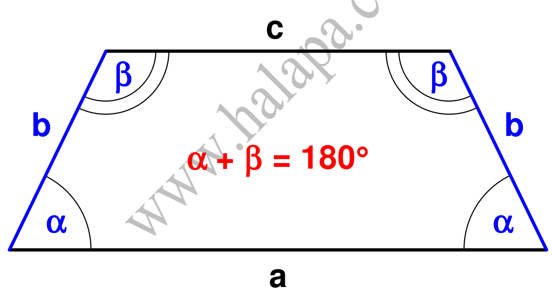
U jednakokračnome trapezu duljine krakova jednake su duljini kraće osnovice. Ako je mjera kuta između kraka i jedne dijagonale 105º, kolika je mjera kuta između kraka i dulje osnovice?

$$A.\ 20^\circ \qquad B.\ 35^\circ \qquad C.\ 45^\circ \qquad D.\ 50^\circ$$

Rješenje 105

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je jednakokračan ako su mu nasuprotne neparalelne stranice jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni. Nasuprotni kutovi su suplementni (zbroj iznosi 180º).

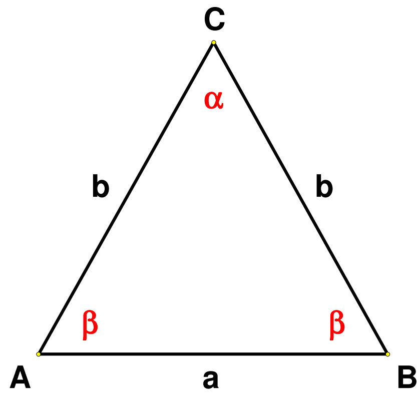


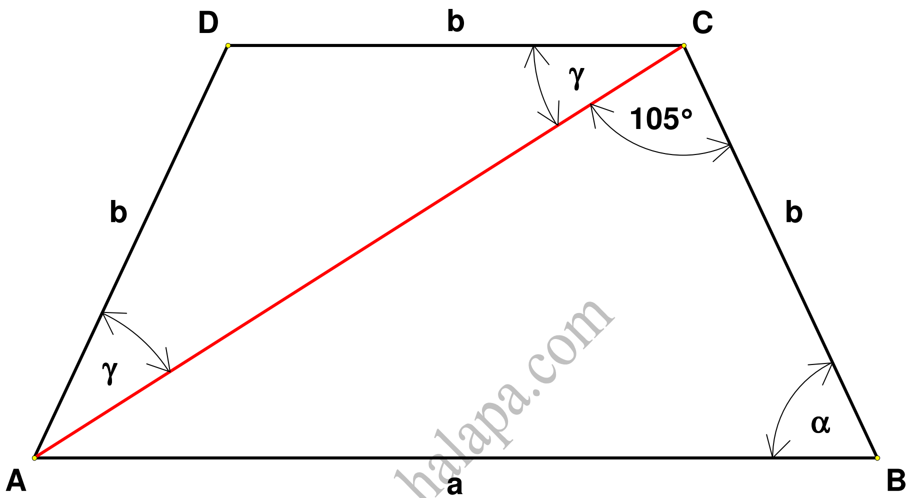
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Za jednakokračan trokut vrijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0.$$





Sa slike vidi se:

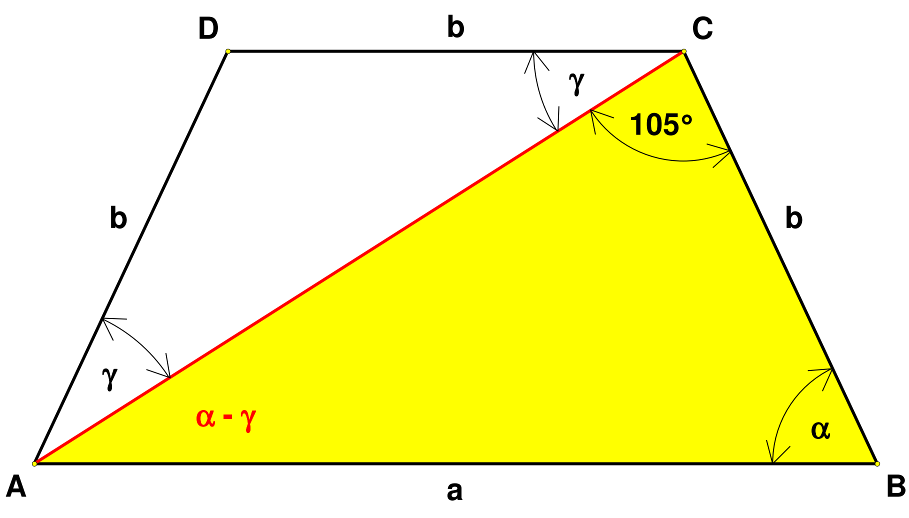
$$|AB| = a \;,\; |BC| = |CD| = |DA| = b \;,\; \angle BCA = 105^\circ \;,\; \angle DAB = \angle ABC = \alpha$$

$$\angle ACD = \angle DAC = \gamma \;,\; \angle BCD = \angle CDA = 105^\circ + \gamma$$

1.inačica

Kutovi uz krak trapeza ABCD suplementni su pa vrijedi:

$$\alpha + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 75^\circ.$$



U trokutu ABC valjane su sljedeće relacije:

- $\angle CAB = \alpha - \gamma$
- $\alpha - \gamma + \alpha + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha - \gamma + \alpha = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow 2 \cdot \alpha - \gamma = 75^\circ.$

Iz sustava jednadžba dobijemo mjeru kuta α.

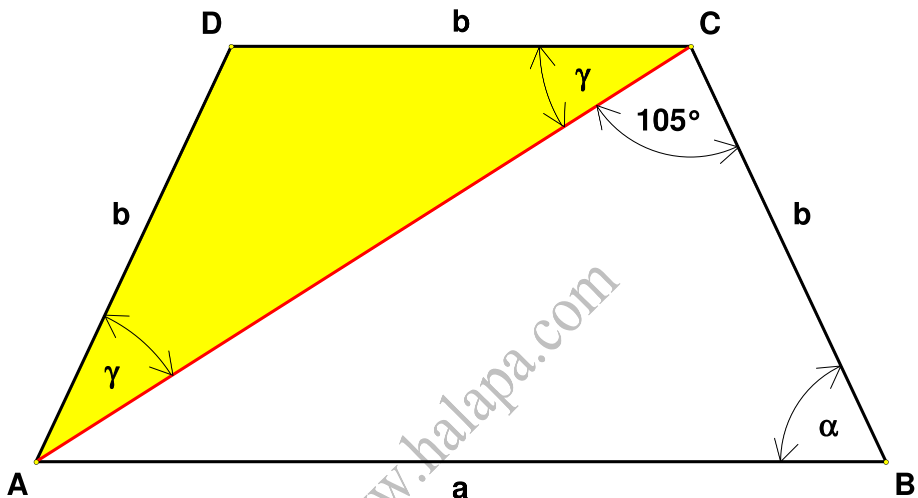
$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \gamma = 75^\circ \\ 2 \cdot \alpha - \gamma = 75^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 150^\circ \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 150^\circ \;/:3 \Rightarrow \alpha = 50^\circ.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Kutovi uz krak trapeza ABCD suplementni su pa vrijedi:

$$\alpha + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 75^\circ.$$



Za jednakokračan trokut ACD vrijedi:

$$\gamma + \gamma + \angle CDA = 180^\circ \Rightarrow \left[\angle CDA = 105^\circ + \gamma \right] \Rightarrow \gamma + \gamma + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow 3 \cdot \gamma = 75^\circ \Rightarrow 3 \cdot \gamma = 75^\circ \;/:3 \Rightarrow \gamma = 25^\circ.$$

Iz sustava jednadžba dobijemo mjeru kuta α.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \gamma = 75^\circ \\ \gamma = 25^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 25^\circ = 75^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ - 25^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 105

U jednakokračnome trapezu duljine krakova jednake su duljini kraće osnovice. Ako je mjera kuta između kraka i jedne dijagonale 25º, kolika je mjera kuta između kraka i dulje osnovice?

$A.\ 20^\circ \quad B.\ 35^\circ \quad C.\ 45^\circ \quad D.\ 50^\circ$

Rezultat: D.

Zadatak 106 (Asterix, gimnazija)

Opseg paralelograma iznosi 39 cm, a duljine visina paralelograma odnose se kao 5 : 8. Odredite duljinu kraće stranice toga paralelograma.

Rješenje 106

Ponovimo!

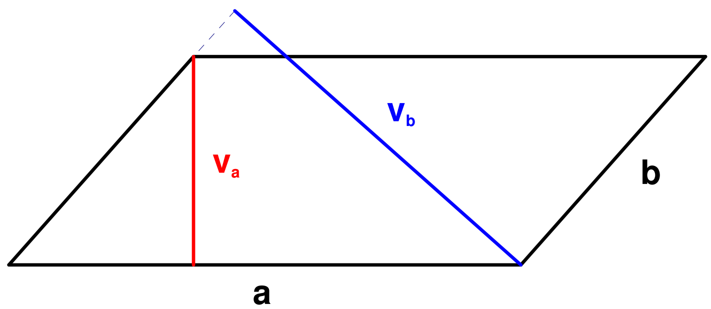
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne.
Opseg paralelograma je zbroj duljina svih stranica paralelograma

$$O=2\cdot a+2\cdot b.$$

Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice (baze) i pripadne visine:

$$P=a\cdot v_a \text{ ili } P=b\cdot v_b.$$



Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \text{ i } c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Za opseg paralelograma vrijedi

$$\left.\begin{aligned} O&=2\cdot a+2\cdot b\\ O&=39\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cdot a+2\cdot b=39.$$

Duljine visina paralelograma odnose se kao 5 : 8.

$$v_a : v_b=5:8\Rightarrow\frac{v_a}{v_b}=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{v_b}{v_a}=\frac{8}{5}.$$

Ploština paralelograma može se izračunati na dva načina:

$$P_a=P_b\Rightarrow a\cdot v_a=b\cdot v_b\Rightarrow a\cdot v_a=b\cdot v_b\ /\cdot\frac{1}{b\cdot v_a}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{v_b}{v_a}\Rightarrow\left[\frac{v_b}{v_a}=\frac{8}{5}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{8}{5}\ /\cdot b\Rightarrow a=\frac{8}{5}\cdot b.$$

Iz sustava jednadžba dobijemo duljinu kraće stranice b.

$$\left.\begin{aligned} &2\cdot a+2\cdot b=39\\ &a=\frac{8}{5}\cdot b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{matrix}\right]\Rightarrow 2\cdot\frac{8}{5}\cdot b+2\cdot b=39\Rightarrow\frac{16}{5}\cdot b+2\cdot b=39\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{16}{5}\cdot b+2\cdot b=39\ /\cdot 5\Rightarrow 16\cdot b+10\cdot b=195\Rightarrow 26\cdot b=195\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\cdot b=195\ /:26\Rightarrow b=7.5\ cm.$$

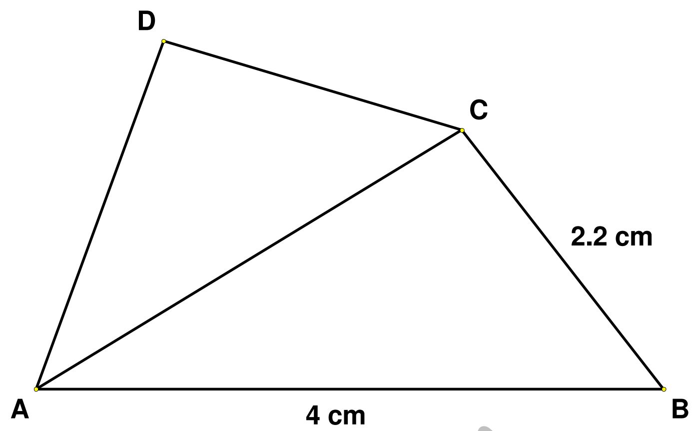
Vježba 106

Opseg paralelograma iznosi 3.9 dm, a duljine visina paralelograma odnose se kao 10 : 16. Odredite duljinu kraće stranice toga paralelograma.

Rezultat: 7.5 cm.

Zadatak 107 (Ivan, ekonomska škola)

U četverokutu ABCD, prikazanome na skici, su $\angle ACD = 60^\circ$ i $\angle BCD = 150^\circ$. Kolika je duljina dijagonale $\overline{AC}$ zaokružena na jednu decimalu?

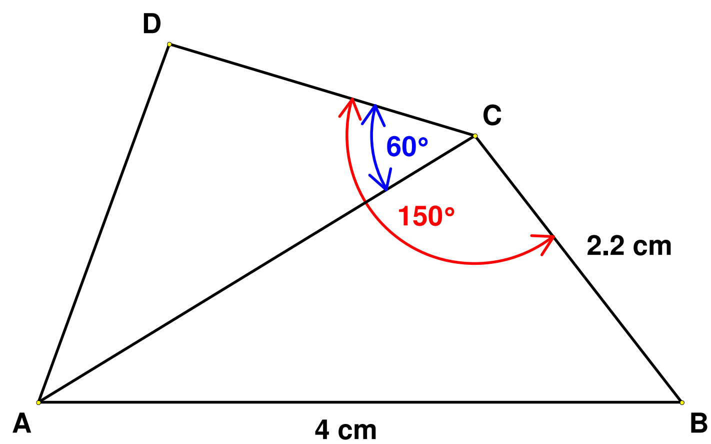


$A.\ 3.3\ cm$ $B.\ 3.6\ cm$ $C.\ 4.0\ cm$ $D.\ 4.1\ cm$

Rješenje 107

Ponovimo!

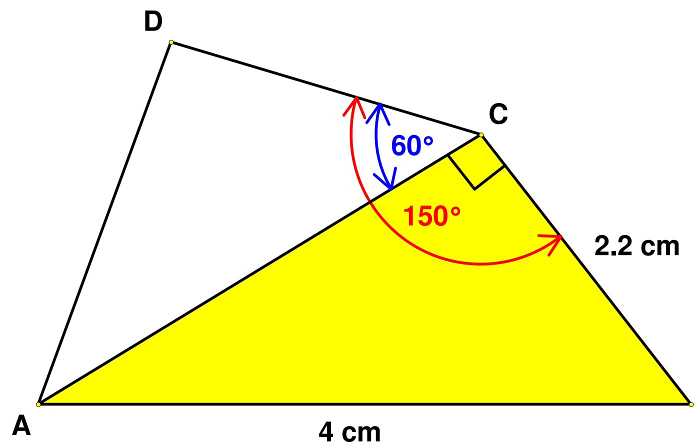
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 4\ cm\ ,\ |BC| = 2.2\ cm\ ,\ \angle ACD = 60^\circ\ ,\ \angle BCD = 150^\circ$$

$$\angle BCA = \angle BCD - \angle ACD = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$



Trokut ABC je pravokutan. Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 4^2 - 2.2^2 \Rightarrow |AC|^2 = 11.16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 11.16 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |AC| = \sqrt{11.16} \Rightarrow |AC| = 3.3\ cm.$$

Odgovor je pod A.

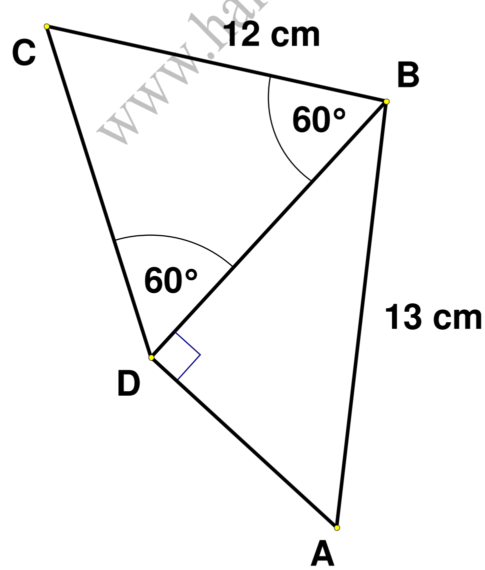
Vježba 107

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 108 (Katarina, maturantica)

Koliki je opseg četverokuta ABCD prikazanoga na skici?



Rješenje 108

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Opseg četverokuta računa se po formuli:

$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

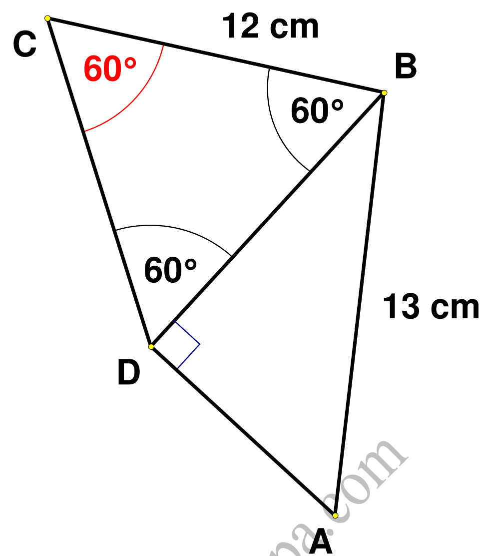
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake duljine i sva tri unutarnja kuta imaju 60º.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AB|=13\ cm\ ,\ |BC|=12\ cm\ ,\ \angle CDB=\angle DBC=\angle BCD=60^\circ\ \text{jednakostraničan trokut}$$

$$|DB|=|BC|=|CD|=12\ cm\ \text{jednakostraničan trokut}$$

Uočimo pravokutan trokut BDA za koji je duljina jedne katete $|DB|$ = 12 cm i hipotenuze $|AB|$ =13 cm. Duljinu katete $|DA|$ izračunamo pomoću Pitagorina poučka.

$$|DA|^2=|AB|^2-|DB|^2\ \Rightarrow\ |DA|^2=(13\ cm)^2-(12\ cm)^2\ \Rightarrow\ |DA|^2=169\ cm^2-144\ cm^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |DA|^2=25\ cm^2\ \Rightarrow\ |DA|^2=25\ cm^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ |DA|=\sqrt{25\ cm^2}\ \Rightarrow\ |DA|=5\ cm.$$

Opseg četverokuta ABCD iznosi:

$$O=|AB|+|BC|+|CD|+|DA|\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}|AB|=13\ cm\\|BC|=12\ cm\\|CD|=12\ cm\\|DA|=5\ cm\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ O=13\ cm+12\ cm+12\ cm+5\ cm\ \Rightarrow\ O=42\ cm.$$

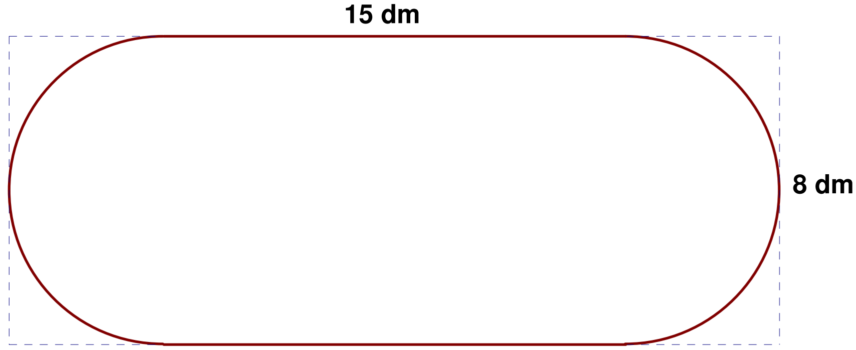
Vježba 108

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 109 (Dona, maturantica)

Iz papira pravokutnoga oblika čije su dimenzije 8 dm x 15 dm izrezan je lik kao na skici. Kolika je površina tako dobivenoga lika ako su zaobljeni dijelovi polukružnice?

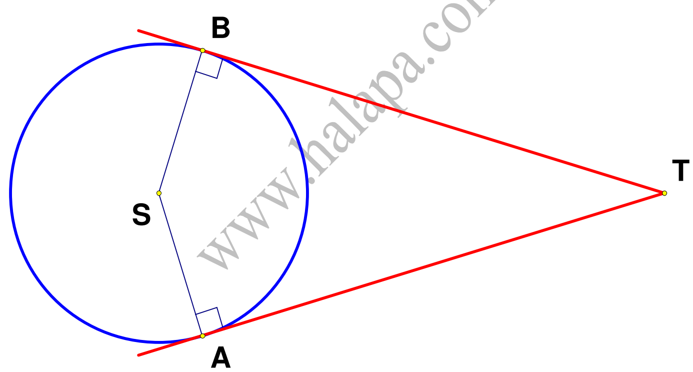


$A.\ 81.13\ dm^2 \quad B.\ 99.27\ dm^2 \quad C.\ 106.27\ dm^2 \quad D.\ 114.13\ dm^2$

Rješenje 109

Ponovimo!

Ako pravac i kružnica imaju samo jednu zajedničku točku, kažemo da pravac dira ili tangira kružnicu i pravac se u tom slučaju zove tangenta kružnice, a zajednička točka zove se dirалište. Tangenta kružnice okomita je na pravac koji prolazi središtem kružnice i dirališta. Ako je zadana točka T izvan kružnice vrijedi:



$$|TA| = |TB|.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

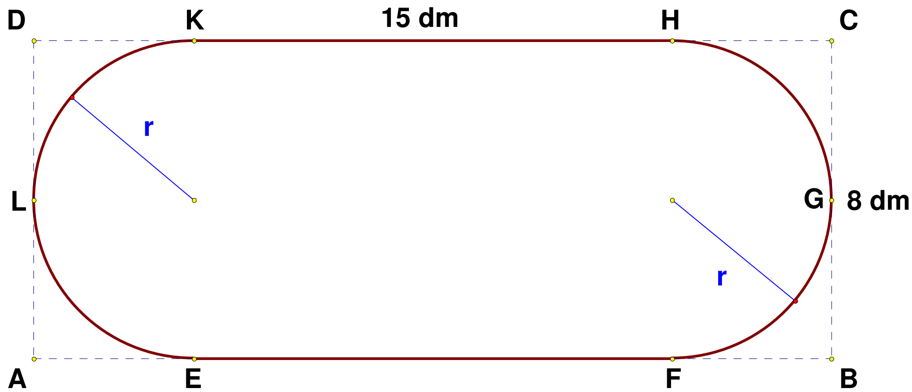
$$P = a \cdot b,$$

gdje su a i b duljine njegovih stranica.
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = 15 \;,\; |BC| = |DA| = |FH| = |KE| = 8 \;,\; |EF| = |HK| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 15 - 2 \cdot 4 = 7$$

$$|AE| = |AL| = |BF| = |BG| = |CG| = |CH| = |DK| = |DL| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = r = 4$$

Uočimo da se zadani lik sastoji od pravokutnika EFHK i dva polukruga polumjera r = 4. Tražena površina jednaka je:

$$P = |EF| \cdot |FH| + 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = |EF| \cdot |FH| + 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Rightarrow P = |EF| \cdot |FH| + r^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 7 \cdot 8 + 4^2 \cdot \pi \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow P = 106.27 \; dm^2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 109

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 110 (Davor, srednja škola)

Izračunaj ploštinu kvadrata ABCD ako su A(2, 2) i C(2, 8) dva njegova nasuprotna vrha.

Rješenje 110

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Ploština kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.

Duljina dijagonale d kvadrata izračunava se po formuli

$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

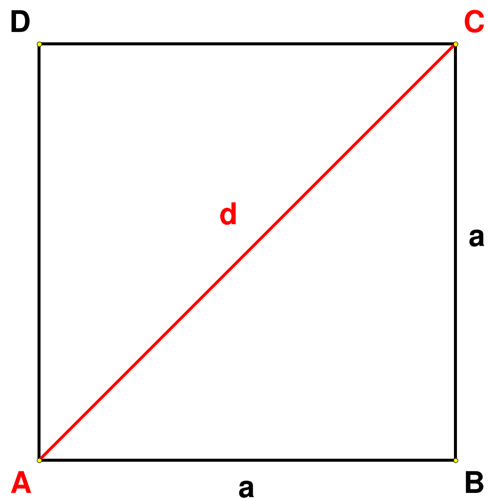
Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Udaljenost vrhova A i C jednaka je duljini dijagonale kvadrata ABCD.



$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(2, 2) \\ C\left(x_2, y_2\right) = C(2, 8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\; d = |AC| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \;\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(2-2)^2 + (8-2)^2} \Rightarrow d = \sqrt{0^2 + 6^2} \Rightarrow d = \sqrt{0+36} \Rightarrow d = \sqrt{36} \Rightarrow d = 6.$$

Ploština kvadrata iznosi:

$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = d \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = d \;/\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\; P = a^2 \;\right] \Rightarrow P = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{d^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow P = \frac{d^2}{2} \Rightarrow P = \frac{6^2}{2} \Rightarrow P = \frac{36}{2} \Rightarrow P = \frac{36}{2} \Rightarrow P = 18 \text{ kv. jedinica.}$$

Vježba 110

Izračunaj ploštinu kvadrata ABCD ako su B(2, 2) i D(2, 8) dva njegova nasuprotna vrha.

Rezultat: 18 kv. jedinica.

Zadatak 111 (Danijel, gimnazija)

Kolika je ploština četverokuta kojem su vrhovi točke u kojima kružnica $x^2 + y^2 + x - y - 20 = 0$ siječe koordinatne osi?

Rješenje 111

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Površinu četverokuta s okomitim dijagonalama duljine d_1 i d_2 računamo po formuli:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Odredimo točke u kojima kružnica siječe koordinatne osi:

- kružnica siječe x os

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x - y - 20 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 0^2 + x - 0 - 20 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + x - 20 = 0 \\ a = 1 \ . \ b = 1 \ , \ c = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ . \ b = 1 \ , \ c = -20 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1 - 9}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1 + 9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{10}{2} \\ x_2 = \dfrac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{10}{2} \\ x_2 = \dfrac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -5 \\ x_2 = 4 \end{array}\right\}.$$

Točke u kojima kružnica siječe x os su:

$$A(-5, 0) \ , \ B(4, 0).$$

- kružnica siječe y os

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x - y - 20 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^2 + y^2 + 0 - y - 20 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 - y - 20 = 0 \\ a = 1 \ . \ b = -1 \ , \ c = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ . \ b = -1 \ , \ c = -20 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1 - 9}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 + 9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{8}{2} \\ x_2 = \dfrac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{8}{2} \\ x_2 = \dfrac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 5 \end{array}\right\}.$$

Točke u kojima kružnica siječe y os su:

$$C(0, -4) \ , \ D(0, 5).$$

Budući da su točke A, B, C i D vrhovi četverokuta ABCD s okomitim dijagonalama površina je dana formulom:

$$P = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2}.$$

Računamo $|AB|$.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A(-5,\ 0) \\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B(4,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(4-(-5))^2+(0-0)^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(4+5)^2+0^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{9^2} \Rightarrow |AB|=9$$

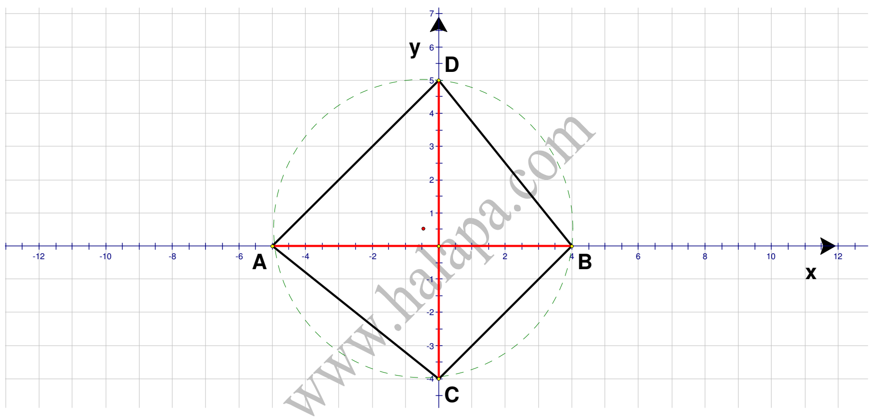
Računamo $|CD|$.

$$\left.\begin{array}{l} C\left(x_1,\ y_1\right)=C(0,\ -4) \\ D\left(x_2,\ y_2\right)=D(0,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |CD|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CD|=\sqrt{(0-0)^2+(5-(-4))^2} \Rightarrow |CD|=\sqrt{0^2+(5+4)^2} \Rightarrow |CD|=\sqrt{9^2} \Rightarrow |CD|=9.$$

Površina četverokuta ABCD iznosi:

$$P=\frac{|AB|\cdot|CD|}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |AB|=9 \\ |CD|=9 \end{array}\right] \Rightarrow P=\frac{9\cdot 9}{2} \Rightarrow P=\frac{81}{2} \text{ kv. jedinica.}$$



Vježba 111

Kolika je ploština četverokuta kojem su vrhovi točke u kojima kružnica $x^2+y^2-4=0$ siječe koordinatne osi?

Rezultat: 8 kv. jedinica.