Zadatak 061 (Branko, srednja škola)

Koliki je opseg pravokutnika upisanog krugu polumjera r = 2, ako je površina pravokutnika polovica površine kruga?

$$A)\ 3\cdot\sqrt{\pi+9} \qquad B)\ 2\cdot\sqrt{\pi^2+4} \qquad C)\ 4\cdot\sqrt{\pi+2} \qquad D)\ 4\cdot\sqrt{\pi+4} \qquad E)\ \sqrt{\pi^2+9}$$

Rješenje 061

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad (x\cdot y)^n=x^n\cdot y^n \quad , \quad \sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \quad , \quad \sqrt{x^2}=x \ , \ x\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Opseg i površina pravokutnika

Opseg je zbroj duljina svih stranica pravokutnika

$$O=2\cdot(a+b).$$

Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P=a\cdot b.$$

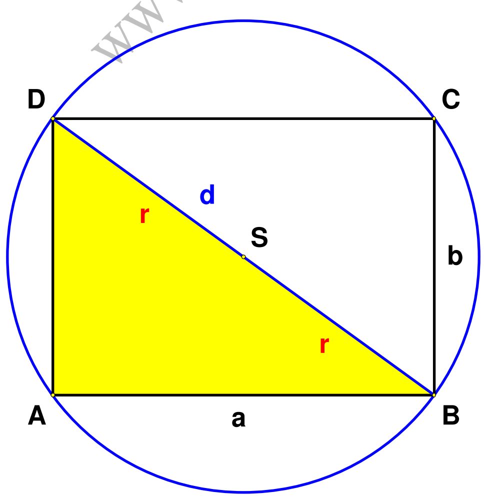
Kružnica je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke stalna.
Krug je dio ravnine omeđen kružnicom.
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kružnice).
Površina kruga polumjera r dana je formulom

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2=a^2+b^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|CD|=a \quad , \quad |BC|=|AD|=b \quad , \quad |SB|=|SD|=r \quad , \quad |BD|=d=2\cdot r$$

Uočimo pravokutni trokut ABD i pomoću Pitagorina počka dobije se:

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2 \Rightarrow (2\cdot r)^2=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(2\cdot r)^2 \Rightarrow a^2+b^2=(2\cdot 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=4^2 \Rightarrow a^2+b^2=16.$$

Budući da je površina pravokutnika jednaka polovici površine kruga, slijedi:

$$a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \pi \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \Rightarrow a \cdot b = 2 \cdot \pi.$$

Računamo zbroj duljina stranica a + b pravokutnika koristeći formulu za kvadrat binoma.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 = 16 \\ a \cdot b = 2 \cdot \pi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 16 + 2 \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow (a+b)^2 = 16 + 4 \cdot \pi \Rightarrow (a+b)^2 = 16 + 4 \cdot \pi \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = \sqrt{16 + 4 \cdot \pi} \Rightarrow a + b = \sqrt{4 \cdot (4 + \pi)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{bmatrix} \Rightarrow a + b = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4 + \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{4 + \pi} \Rightarrow a + b = 2 \cdot \sqrt{4 + \pi} \Rightarrow a + b = 2 \cdot \sqrt{\pi + 4}.$$

Opseg pravokutnika iznosi:

$$O = 2 \cdot (a + b) \Rightarrow O = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\pi + 4} \Rightarrow O = 4 \cdot \sqrt{\pi + 4}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 061

Kolika je površina pravokutnika upisanog krugu polumjera r = 2, ako je površina pravokutnika polovica površine kruga?

$$A)\ 2 \cdot \pi \qquad B)\ 4 \cdot \pi \qquad C)\ \pi^2 \qquad D)\ 3 \cdot \pi \qquad E)\ \frac{1}{2} \cdot \pi$$

Rezultat: A.

Zadatak 062 (Viktor, srednja škola)

Duljine osnovica jednakokračnog trapeza su 20 cm i 6 cm, a površina mu je 31.2 cm^2. Duljina kraka trapeza je:

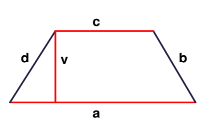
$$A)\ 14\ cm \qquad B)\ 13\ cm \qquad C)\ 7.4\ cm \qquad D)\ 3.6\ cm$$

Rješenje 062

Ponovimo!

Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je jednakokračan ako su mu nasuprotne neparalelne stranice jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni.

Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \; , \; \beta = \beta_1 \; , \; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \; , \; b = b_1 \; , \; c = c_1.$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

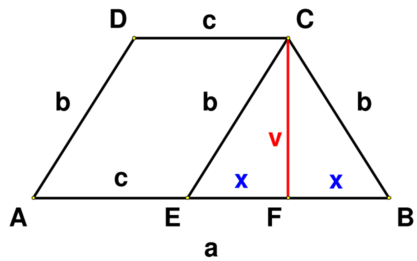
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

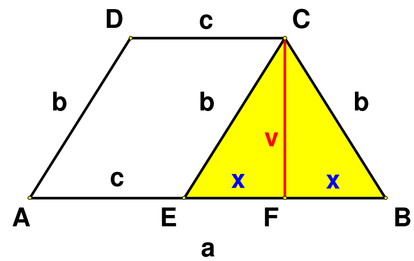
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

1.inačica





Sa slika vidi se:

$$\left|AB\right|=a \quad , \quad \left|AD\right|=\left|EC\right|=\left|BC\right|=b \quad , \quad \left|DC\right|=\left|AE\right|=c \quad , \quad \left|FC\right|=\text{v}$$

$$\left|EF\right|=\left|FB\right|=x$$

Iz ploštine trapeza ABCD izračuna se njegova visina v.

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot \text{v} \;\Rightarrow\; P=\frac{a+c}{2}\cdot \text{v} \;/\cdot \frac{2}{a+c} \;\Rightarrow\; \text{v}=\frac{2\cdot P}{a+c} \;\Rightarrow\; \text{v}=\frac{2\cdot 31.2}{20+6} \;\Rightarrow\; \text{v}=2.4 \;\Rightarrow\; \text{v}=2.4\ cm.$$

Uočimo jednakokračan trokut ΔEBC. Za njegovu osnovicu $\left|EB\right|$ vrijedi:

$$\left|EB\right|=\left|EF\right|+\left|FB\right|=x+x=2\cdot x.$$

Dalje je

$$\left|EB\right|=\left|AB\right|-\left|AE\right| \;\Rightarrow\; 2\cdot x=a-c \;\Rightarrow\; 2\cdot x=a-c \;/:2 \;\Rightarrow\; x=\frac{a-c}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{20-6}{2} \;\Rightarrow\; x=7 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=7\ cm.$$

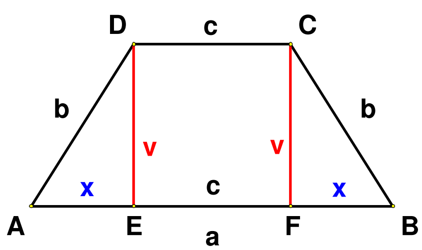
Uočimo pravokutan trokut ΔFBC i pomoću Pitagorina poučka izračuna se krak b.

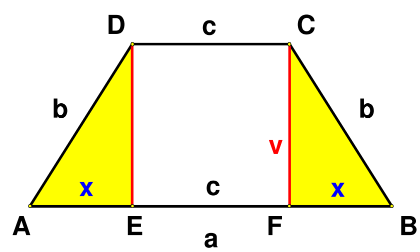
$$\left|BC\right|^2=\left|FC\right|^2+\left|FB\right|^2 \;\Rightarrow\; b^2=\text{v}^2+x^2 \;\Rightarrow\; b^2=\text{v}^2+x^2 \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; b=\sqrt{\text{v}^2+x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b=\sqrt{(2.4)^2+7^2} \;\Rightarrow\; b=\sqrt{5.76+49} \;\Rightarrow\; b=\sqrt{54.76} \;\Rightarrow\; b=7.4 \;\Rightarrow\; b=7.4\ cm.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica





Sa slika vidi se:

$$\left|AB\right|=a \quad , \quad \left|DC\right|=\left|EF\right|=c \quad , \quad \left|ED\right|=\left|FC\right|=\text{v}$$

Uočimo da su pravokutni trokuti ΔAED i ΔFBC sukladni jer se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici pa je

$$\left|AE\right|=\left|FB\right|=x.$$

Dalje vrijedi:

$$\left|AE\right|+\left|EF\right|+\left|FB\right|=\left|AB\right| \Rightarrow x+c+x=a \Rightarrow 2\cdot x=a-c \Rightarrow 2\cdot x=a-c \;/:2 \Rightarrow x=\frac{a-c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{20-6}{2} \Rightarrow x=7 \Rightarrow x=7\ cm.$$

Iz ploštine trapeza ABCD izračuna se njegova visina v.

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot \mathrm{v} \Rightarrow P=\frac{a+c}{2}\cdot \mathrm{v} \;/\cdot \frac{2}{a+c} \Rightarrow \mathrm{v}=\frac{2\cdot P}{a+c} \Rightarrow \mathrm{v}=\frac{2\cdot 31.2}{20+6} \Rightarrow \mathrm{v}=2.4 \Rightarrow \mathrm{v}=2.4\ cm.$$

Uočimo pravokutan trokut ΔFBC i pomoću Pitagorina poučka izračuna se krak b.

$$\left|BC\right|^2=\left|FC\right|^2+\left|FB\right|^2 \Rightarrow b^2=\mathrm{v}^2+x^2 \Rightarrow b^2=\mathrm{v}^2+x^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow b=\sqrt{\mathrm{v}^2+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{(2.4)^2+7^2} \Rightarrow b=\sqrt{5.76+49} \Rightarrow b=\sqrt{54.76} \Rightarrow b=7.4 \Rightarrow b=7.4\ cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 062

Duljine osnovica jednakokračnog trapeza su 2 dm i 0.6 dm, a površina mu je 0.312 dm^2. Duljina kraka trapeza je:

$A)\ 1.4\ dm \qquad B)\ 1.3\ dm \qquad C)\ 0.74\ dm \qquad D)\ 0.36\ dm$

Rezultat: C.

Zadatak 063 (Cazim, gimnazija)

Ako se pravokutniku kraća stranica poveća za 8 cm, a dulja smanji 4 cm, dijagonala ne mijenja svoju duljinu, ali se ploština poveća za 240 cm^2. Nađi duljinu stranica pravokutnika.

Rješenje 063

Ponovimo!

$$(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad (x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad x=y \Rightarrow x^2=y^2.$$

Kako zapisati da je broj a za x veći od broja b?

$$a-x=b \quad \text{ili} \quad a=b+x \quad \text{ili} \quad a-b=x.$$

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne). Pravokutnik je paralelogram kojemu je barem jedan kut pravi (90º). Ploština pravokutnika, duljina stranica a i b, izračunava se po formuli

$$P=a\cdot b.$$

Dužinu koja spaja suprotne vrhove pravokutnika zovemo dijagonala pravokutnika. Duljina dijagonale iznosi:

$$d^2=a^2+b^2 \Rightarrow d=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

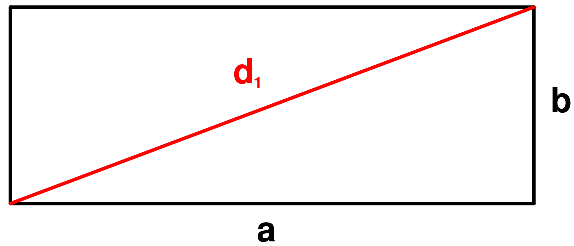
$$c^2=a^2+b^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

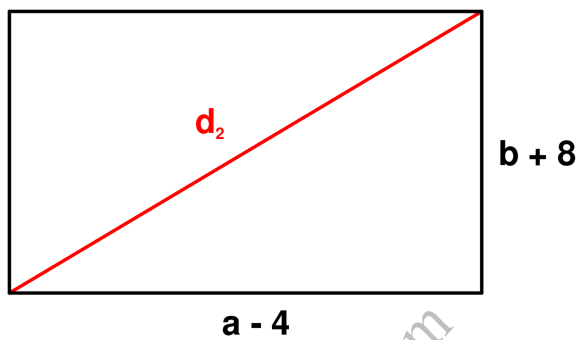
Početno stanje

$$P_1=a\cdot b$$
$$d_1^2=a^2+b^2.$$



Konačno stanje

$$P_2 = (a-4)\cdot(b+8)$$
$$d_2^2 = (a-4)^2 + (b+8)^2.$$



Budući da se ploština pravokutnika povećala za 240, a duljina dijagonale ostala ista, možemo napisati sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} P_2 = P_1 + 240 \\ d_1^2 = d_2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (a-4)\cdot(b+8) = a\cdot b + 240 \\ a^2 + b^2 = (a-4)^2 + (b+8)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot b + 8\cdot a - 4\cdot b - 32 = a\cdot b + 240 \\ a^2 + b^2 = a^2 - 8\cdot a + 16 + b^2 + 16\cdot b + 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot b + 8\cdot a - 4\cdot b - 32 = a\cdot b + 240 \\ a^2 + b^2 = a^2 - 8\cdot a + 16 + b^2 + 16\cdot b + 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 8\cdot a - 4\cdot b - 32 = 240 \\ 0 = -8\cdot a + 16 + 16\cdot b + 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8\cdot a - 4\cdot b = 240 + 32 \\ 8\cdot a - 16\cdot b = 16 + 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8\cdot a - 4\cdot b = 272 \\ 8\cdot a - 16\cdot b = 80 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8\cdot a - 4\cdot b = 272 \\ 8\cdot a - 16\cdot b = 80 \;/\cdot(-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 8\cdot a - 4\cdot b = 272 \\ -8\cdot a + 16\cdot b = -80 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12\cdot b = 192 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot b = 192 \;/:12 \Rightarrow b = 16 \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = 16 \\ 8\cdot a - 4\cdot b = 272 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8\cdot a - 4\cdot 16 = 272 \Rightarrow 8\cdot a - 64 = 272 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot a = 272 + 64 \Rightarrow 8\cdot a = 336 \Rightarrow 8\cdot a = 336 \;/:8 \Rightarrow a = 42.$$

Duljine stranica pravokutnika iznose: a = 42 cm, b = 16 cm.

Vježba 063

Ako se pravokutniku kraća stranica poveća za 8 cm, a dulja smanji 4 cm, dijagonala ne mijenja svoju duljinu, ali se ploština poveća za 240 cm^2. Nađi duljinu dijagonale pravokutnika.

Rezultat: 44.94 cm.

Zadatak 064 (Vesna, gimnazija)

Ako kutovi četverokuta čine aritmetički niz sa razlikom 30°, onda je zbroj kosinusa tih kutova jednak:

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 2$

Rješenje 064

Ponovimo!

Svođenje na prvi kvadrant:

$$\cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice. Zbroj veličina svih kutova u četverokutu iznosi 360°.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Budući da kutovi četverokuta čine aritmetički niz sa razlikom 30°, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\alpha\\ \beta=\alpha+30^0\\ \gamma=\beta+30^0=\alpha+30^0+30^0=\alpha+60^0\\ \delta=\gamma+30^0=\alpha+60^0+30^0=\alpha+90^0\end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0 \Rightarrow \alpha+\alpha+30^0+\alpha+60^0+\alpha+90^0=360^0 \Rightarrow 4\cdot\alpha+180^0=360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\alpha=360^0-180^0 \Rightarrow 4\cdot\alpha=180^0 \Rightarrow 4\cdot\alpha=180^0 \ /:4 \Rightarrow \alpha=45^0.$$

Kutovi četverokuta iznose:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=45^0\\ \beta=\alpha+30^0=45^0+30^0=75^0\\ \gamma=\alpha+60^0=45^0+60^0=105^0\\ \delta=\alpha+90^0=45^0+90^0=135^0\end{array}\right\}.$$

Zbroj kosinusa tih kutova je:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=\cos45^0+\cos75^0+\cos105^0+\cos135^0=$$

$$=\cos45^0+\cos75^0+\cos\left(180^0-75^0\right)+\cos\left(180^0-45^0\right)=$$

$$=\cos45^0+\cos75^0-\cos75^0-\cos45^0=\cos45^0+\cos75^0-\cos75^0-\cos45^0=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 064

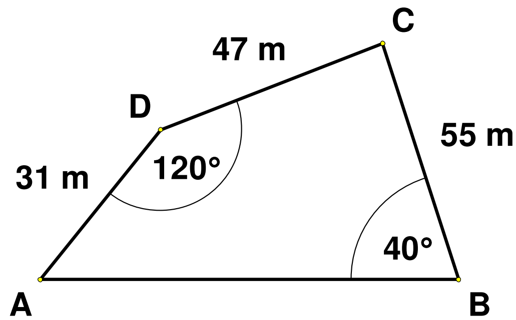
Ako kutovi četverokuta čine aritmetički niz sa razlikom 20°, onda je zbroj kosinusa tih kutova jednak:

$$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 2$$

Rezultat: C.

Zadatak 065 (Sanja, srednja škola)

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.



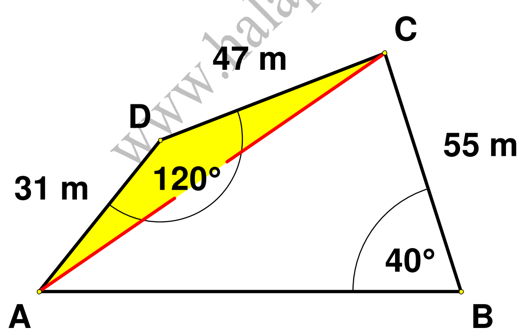
Izračunajte udaljenost točaka A i C.

Rješenje 065

Ponovimo!

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Uočimo trokut $\triangle$ACD. Sa slike se vidi:

$$|CD| = 47\ m \quad , \quad |DA| = 31\ m \quad , \quad \angle ADC = 120^0$$

Uporabom poučka o kosinusu dobije se udaljenost točaka A i C.

$$|AC|^2 = |DA|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |DA| \cdot |CD| \cdot \cos\angle ADC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|^2 = |DA|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |DA| \cdot |CD| \cdot \cos\angle ADC \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

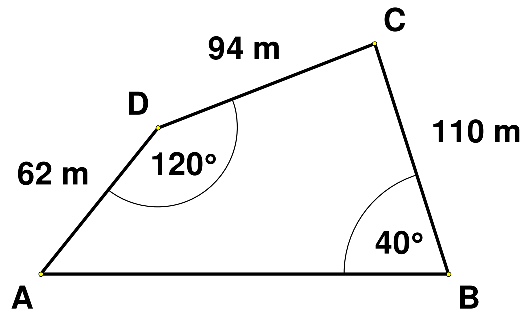
$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{|DA|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |DA| \cdot |CD| \cdot \cos\angle ADC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{31^2 + 47^2 - 2 \cdot 31 \cdot 47 \cdot \cos 120^0} = 68.$$

Udaljenost točaka A i C je 68 m.

Vježba 065

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.

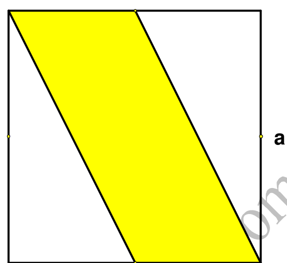


Izračunajte udaljenost točaka A i C.

Rezultat: 136 m.

Zadatak 066 (Marina, strukovna škola)

Na slici je prikazan kvadrat kojemu je stranica duljine a. Stranicama kvadrata označena su polovišta. Kolika je površina osjenčanoga dijela kvadrata?



$$A.\ \frac{a^2}{3} \qquad B.\ \frac{a^2}{2} \qquad C.\ \frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{2} \qquad D.\ \frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{3}$$

Rješenje 066

Ponovimo!

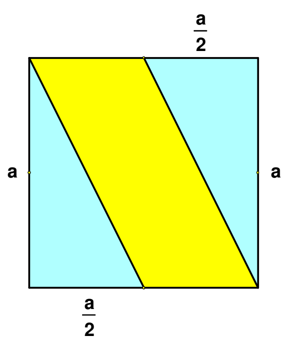
$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Ploština kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Ploština pravokutnog trokuta duljina kateta a i b izračunava se po formuli

$$P = \frac{a\cdot b}{2}.$$



Sa slike vidi se da je ploština osjenčanog lika (žuta boja) jednaka razlici ploštine kvadrata duljine stranice a i dvostruke ploštine pravokutnog trokuta duljina kateta $\frac{a}{2}$ i a.

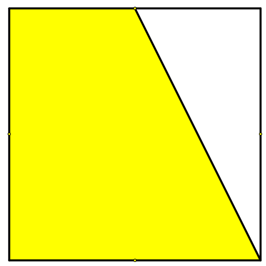
$$P = P_k - 2 \cdot P_t \Rightarrow P = a^2 - 2 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} \Rightarrow P = a^2 - 2 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} \Rightarrow P = a^2 - \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = a^2 - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1} \Rightarrow P = a^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow P = \frac{a^2}{1} - \frac{a^2}{2} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot a^2 - a^2}{2} \Rightarrow P = \frac{a^2}{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 066

Na slici je prikazan kvadrat kojemu je stranica duljine a. Stranicama kvadrata označena su polovišta. Kolika je površina osjenčanoga dijela kvadrata?



$$A. \ \frac{3 \cdot a^2}{4} \qquad B. \ \frac{a^2}{3} \qquad C. \ \frac{2 \cdot a^2}{3} \qquad D. \ \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Rezultat: A.

Zadatak 067 (XY, strukovna škola)

Dokažimo da je četverokut ABCD, A(2, – 5), B(12, – 5), C(12, 5), D(2, 5) kvadrat.

Rješenje 067

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Provjeravamo da su sve stranice jednake duljine.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -5) \\ B(x_2, y_2) = B(12, -5) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(12-2)^2 + (-5-(-5))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{10^2 + (-5+5)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{10^2 + 0^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{10^2} \Rightarrow |AB| = 10.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1)=B(12,\ -5) \\ C(x_2,\ y_2)=C(12,\ 5) \\ |BC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BC|=\sqrt{(12-12)^2+(5-(-5))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC|=\sqrt{0^2+(5+5)^2} \Rightarrow |BC|=\sqrt{0^2+10^2} \Rightarrow |BC|=\sqrt{10^2} \Rightarrow |BC|=10.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1)=C(12,\ 5) \\ D(x_2,\ y_2)=D(2,\ 5) \\ |CD|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |CD|=\sqrt{(2-12)^2+(5-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CD|=\sqrt{(-10)^2+0^2} \Rightarrow |CD|=\sqrt{100+0} \Rightarrow |CD|=\sqrt{100} \Rightarrow |CD|=10.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} D(x_1,\ y_1)=D(2,\ 5) \\ A(x_2,\ y_2)=A(2,\ -5) \\ |DA|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |DA|=\sqrt{(2-2)^2+(-5-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DA|=\sqrt{0^2+(-10)^2} \Rightarrow |DA|=\sqrt{0+100} \Rightarrow |DA|=\sqrt{100} \Rightarrow |DA|=10.$$

Provjeravamo da su duljine dijagonala jednake.

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ -5) \\ C(x_2,\ y_2)=C(12,\ 5) \\ |AC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AC|=\sqrt{(12-2)^2+(5-(-5))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{10^2+(5+5)^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{10^2+10^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{2\cdot 10^2} \Rightarrow$$

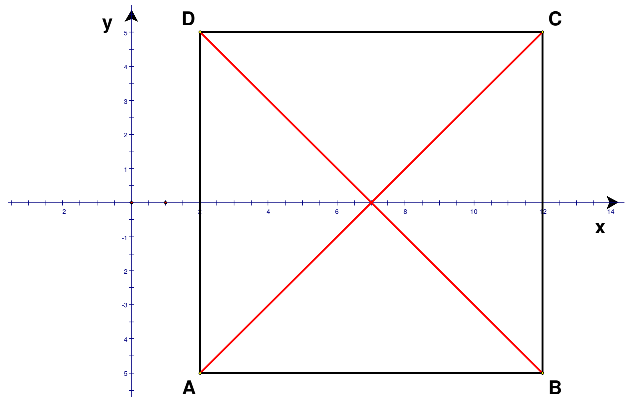
$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{10^2\cdot 2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{10^2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |AC|=10\cdot\sqrt{2}.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1)=B(12,\ -5) \\ D(x_2,\ y_2)=D(2,\ 5) \\ |BD|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BD|=\sqrt{(2-12)^2+(5-(-5))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BD|=\sqrt{(-10)^2+(5+5)^2} \Rightarrow |BD|=\sqrt{(-10)^2+10^2} \Rightarrow |BD|=\sqrt{100+100} \Rightarrow$$

$$|BD|=\sqrt{100\cdot 2} \Rightarrow |BD|=\sqrt{100}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |BD|=10\cdot\sqrt{2}.$$

Četverokut ABCD je kvadrat.



Vježba 067

Dokažimo da je četverokut ABCD, A(1, 1), B(5, 4), C(2, 8), D(– 2, 5) kvadrat.

Rezultat: Dokaz analogan. Četverokut ABCD je kvadrat.

Zadatak 068 (Zoran, srednja škola)

Zadana su dva susjedna vrha paralelograma A(– 3, 5) i B(1, 7) i sjecište dijagonala M(1, 1). Odredite koordinate druga dva vrha.

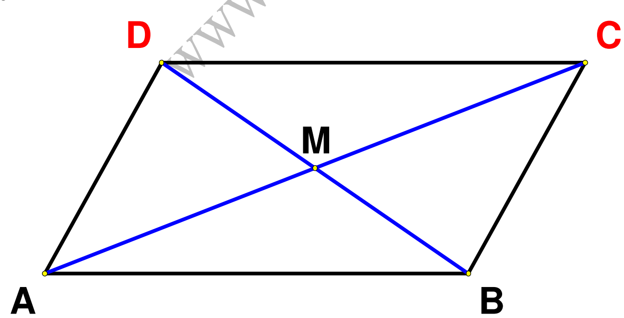
Rješenje 068

Ponovimo!

Ako su zadane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, polovište dužine $\overline{AB}$ glasi:

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima. Dijagonala paralelograma je spojnica dva nesusjedna vrha. Paralelogram ima dvije dijagonale koje se međusobno raspolavljaju.



Budući da se dijagonale paralelograma ABCD raspolavljaju, točka M je polovište dijagonale $\overline{AC}$. Koordinate točke C iznose:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-3, 5) \\ C(x_2, y_2) = C(x_2, y_2) \\ M(x_P, y_P) = M(1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_P = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_P = \frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \frac{-3+x_2}{2} \\ 1 = \frac{5+y_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \frac{-3+x_2}{2} \;/\cdot 2 \\ 1 = \frac{5+y_2}{2} \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = -3+x_2 \\ 2 = 5+y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3+x_2 = 2 \\ 5+y_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = 2+3 \\ y_2 = 2-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = 5 \\ y_2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(x_2, y_2) = C(5, -3).$$

Budući da se dijagonale paralelograma ABCD raspolavljaju, točka M je polovište dijagonale $\overline{BD}$. Koordinate točke D iznose:

$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1, y_1\right)=B(1, 7) \\ D\left(x_2, y_2\right)=D\left(x_2, y_2\right) \\ M\left(x_P, y_P\right)=M(1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_P=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y_P=\frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1=\frac{1+x_2}{2} \\ 1=\frac{7+y_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1=\frac{1+x_2}{2} \ /\cdot 2 \\ 1=\frac{7+y_2}{2} \ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=1+x_2 \\ 2=7+y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+x_2=2 \\ 7+y_2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=2-1 \\ y_2=2-7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=1 \\ y_2=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow D\left(x_2, y_2\right)=D(1, -5).$$

Vježba 068

Zadana su dva susjedna vrha paralelograma C(5, – 3) i D(1, – 5) kao i sjecište dijagonala M(1, 1). Odredite koordinate druga dva vrha.

Rezultat: A(– 3, 5), B(1, 7).

Zadatak 069 (Vedra Tea ☺, srednja škola)

Paralelogram ABCD određen je vrhovima A(1, 1, 1), B(2, 3, 1), D(0, 2, 1). Odredite koordinate vrha C.

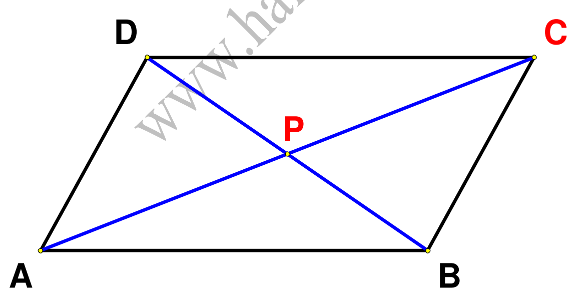
Rješenje 069

Ponovimo!

Ako su zadane točke A(x_1, y_1, z_1) i B(x_2, y_2, z_2), polovište dužine $\overline{AB}$ glasi:

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima. Dijagonala paralelograma je spojnica dva nesusjedna vrha. Paralelogram ima dvije dijagonale koje se međusobno raspolavljaju.



Računamo koordinate točke P koja je polovište dijagonale $\overline{BD}$.

$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1, y_1, z_1\right)=B(2, 3, 1) \\ D\left(x_2, y_2, z_2\right)=D(0, 2, 1) \\ P\left(x_P, y_P, z_P\right)=P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_P=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y_P=\frac{y_1+y_2}{2} \\ z_P=\frac{z_1+z_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_P=\frac{2+0}{2} \\ y_P=\frac{3+2}{2} \\ z_P=\frac{1+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_P = \frac{2}{2} \\ y_P = \frac{5}{2} \\ z_P = \frac{2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_P = 1 \\ y_P = \frac{5}{2} \\ z_P = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P\left(x_P, y_P, z_P\right) = P\left(1, \frac{5}{2}, 1\right).$$

Budući da se dijagonale paralelograma ABCD raspolavljaju, točka P je polovište dijagonale $\overline{AC}$. Koordinate točke C iznose:

$$\left.\begin{matrix} A\left(x_1, y_1, z_1\right) = A(1, 1, 1) \\ C\left(x_2, y_2, z_2\right) = C\left(x_2, y_2, z_2\right) \\ P\left(x_P, y_P, z_P\right) = P\left(1, \frac{5}{2}, 1\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_P = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z_P = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = \frac{1 + x_2}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_2}{2} \\ 1 = \frac{1 + z_2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = \frac{1 + x_2}{2} \;/\cdot 2 \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_2}{2} \;/\cdot 2 \\ 1 = \frac{1 + z_2}{2} \;/\cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 = 1 + x_2 \\ 5 = 1 + y_2 \\ 2 = 1 + z_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 + x_2 = 2 \\ 1 + y_2 = 5 \\ 1 + z_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 2 - 1 \\ y_2 = 5 - 1 \\ z_2 = 2 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C\left(x_2, y_2, z_2\right) = C(1, 4, 1).$$

Vježba 069

Paralelogram ABCD određen je vrhovima A(1, 1, 1), B(2, 3, 1), C(1, 4, 1). Odredite koordinate vrha D.

Rezultat: D(0, 2, 1).

Zadatak 070 (Haris, gimnazija)

Kvadrat i pravokutnik imaju jednake ploštine. Izračunaj opseg kvadrata ako je opseg pravokutnika 50 cm, a dulja stranica pravokutnika je 4 puta veća od njegove kraće stranice.

Rješenje 070

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj x n puta veći od broja y?

$$x = n \cdot y \quad , \quad \frac{x}{n} = y \quad , \quad \frac{x}{y} = n.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne.

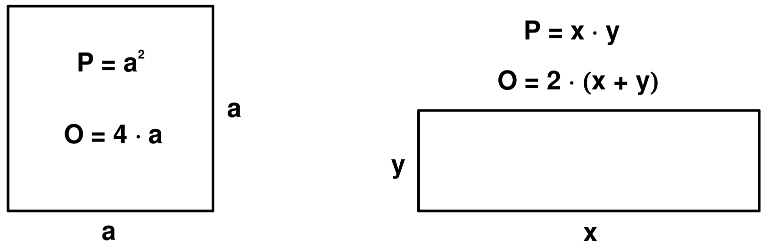
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut. Dijagonala pravokutnika je spojnica dva nesusjedna vrha. Pravokutnik ima dvije dijagonale koje su sukladne i međusobno se raspolavljaju. Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

$$P = a \cdot b.$$

Opseg pravokutnika izračunava se po formuli:

$$O = 2 \cdot (a + b).$$

Kvadrat je četverokut s četiri prava kuta i četiri sukladne stranice. Stranice su jednake duljine, a nasuprotne stranice su paralelne. Dijagonale su jednake, raspolavljaju se i sijeku pod pravim kutom.



Neka je a duljina stranice kvadrata, a neka su x i y duljine stranica pravokutnika.
Budući da je zadan opseg pravokutnika O, a dulja stranica pravokutnika je 4 puta veća od njegove kraće stranice, vrijedi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} O=50 \\ O=2\cdot(x+y) \\ x=4\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 50=2\cdot(4\cdot y+y) \Rightarrow 50=2\cdot 5\cdot y \Rightarrow 50=10\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot y=50 \Rightarrow 10\cdot y=50 \;/:10 \Rightarrow y=5.$$

Duljine stranica pravokutnika su:

$$\left.\begin{array}{l} y=5 \\ x=4\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=5 \\ x=4\cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=5 \\ x=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=5\ cm \\ x=20\ cm \end{array}\right\}.$$

Ploština pravokutnika je:

$$\left.\begin{array}{l} x=20\ cm\ ,\ y=5\ cm \\ P=x\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow P=20\ cm\cdot 5\ cm \Rightarrow P=100\ cm^2.$$

Kvadrat i pravokutnik imaju jednaku ploštinu pa duljina stranice kvadrata iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P=100 \\ P=a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=100 \Rightarrow a^2=100 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a=\sqrt{100} \Rightarrow a=10 \Rightarrow a=10\ cm.$$

Opseg kvadrata je:

$$\left.\begin{array}{l} a=10\ cm \\ O=4\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow O=4\cdot 10\ cm \Rightarrow O=40\ cm.$$

Vježba 070

Kvadrat i pravokutnik imaju jednake ploštine. Izračunaj opseg kvadrata ako je opseg pravokutnika 100 cm, a dulja stranica pravokutnika je 4 puta veća od njegove kraće stranice.

Rezultat: 80 cm.

Zadatak 071 (M – N – K, gimnazija)

Srednjica trapeza duga je 10 cm i njome je trapez podijeljen na dva dijela čije su ploštine u omjeru 3 : 5. Duljina kraće osnovice trapeza jednaka je:

$$A.\ 5\ cm \qquad B.\ 6\ cm \qquad C.\ 4\ cm \qquad D.\ 3\ cm$$

Rješenje 071

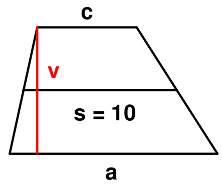
Ponovimo!
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza. Duljina srednjice trapeza jednaka je polovici zbroja duljina osnovica trapeza.

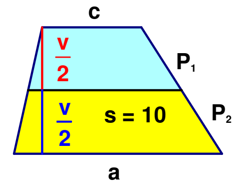
$$s=\frac{a+c}{2}.$$

Ploština trapeza računa se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje su a i c osnovice, a v visina trapeza.
Uočimo da srednjica trapeza raspolavlja visinu trapeza.





$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{5} \\ s = \frac{a+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2}}{\frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2}} = \frac{3}{5} \\ s = \frac{a+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\frac{10+c}{2} \cdot \frac{v}{2}}{\frac{a+10}{2} \cdot \frac{v}{2}} = \frac{3}{5} \\ 10 = \frac{a+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{10+c}{a+10} = \frac{3}{5} \\ 10 = \frac{a+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{10+c}{a+10} = \frac{3}{5} \;/\cdot 5\cdot(a+10) \\ 10 = \frac{a+c}{2} \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot(10+c) = 3\cdot(a+10) \\ 20 = a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot(10+c) = 3\cdot(a+10) \\ a+c = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot(10+c) = 3\cdot(a+10) \\ a = 20-c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 5\cdot(10+c) = 3\cdot(20-c+10) \Rightarrow 5\cdot(10+c) = 3\cdot(30-c) \Rightarrow 50+5\cdot c = 90-3\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot c + 3\cdot c = 90-50 \Rightarrow 8\cdot c = 40 \Rightarrow 8\cdot c = 40 \;/:8 \Rightarrow c = 5.$$

Duljina kraće osnovice trapeza jednaka je 5 cm. Odgovor je pod A.

Vježba 071

Srednjica trapeza duga je 10 cm i njome je trapez podijeljen na dva dijela čije su ploštine u omjeru 3 : 5. Duljina dulje osnovice trapeza jednaka je:

$A.\ 20\ cm \qquad B.\ 25\ cm \qquad C.\ 15\ cm \qquad D.\ 30\ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 072 (Vicky, gimnazija)

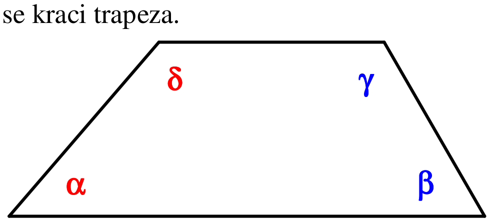
Mjere dvaju kutova trapeza su 20° i 125°. Odredite mjere preostalih dvaju kutova trapeza.

Rješenje 072

Ponovimo!
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Zbroj unutarnjih kutova četverokuta iznosi 360°.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

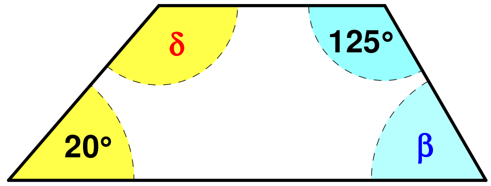
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza.



Za unutarnje kutove trapeza vrijedi tvrdnja:

- zbroj kutova trapeza uz isti krak je 180°
- kutovi trapeza uz isti krak su suplementni, tj.

$$\alpha + \delta = 180^0 \quad , \quad \beta + \gamma = 180^0.$$



Sa slike vidi se:

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 20^0 + \delta = 180^0 \\ \beta + 125^0 = 180^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta = 180^0 - 20^0 \\ \beta = 180^0 - 125^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta = 160^0 \\ \beta = 55^0 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 20^0 + \delta = 180^0 \\ 20^0 + \beta + 125^0 + \delta = 360^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta = 180^0 - 20^0 \\ \beta + 145^0 + \delta = 360^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta = 160^0 \\ \beta + 145^0 + \delta = 360^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta + 145^0 + 160^0 = 360^0 \Rightarrow \beta = 360^0 - 145^0 - 160^0 \Rightarrow \beta = 55^0.$$

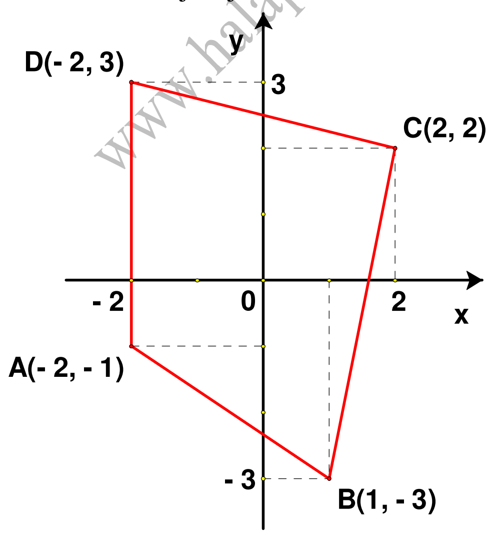
Vježba 072

Mjere dvaju kutova trapeza su 40° i 110°. Odredite mjere preostalih dvaju kutova trapeza.

Rezultat: 140° i 70°.

Zadatak 073 (Tanja, gimnazija)

Na slici je četverokut ABCD. Kolika je mjera kuta u vrhu B?



$A.\ 45^0 \qquad B.\ 60^0 \qquad C.\ 67^0 37'12'' \qquad D.\ 70^0 57'08''$

Rješenje 073

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Ako su dane točke A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2), onda su koordinate vektora koji ih spaja:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}.$$

Ako su $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ i $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$ dva vektora, tada za kut α među njima vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

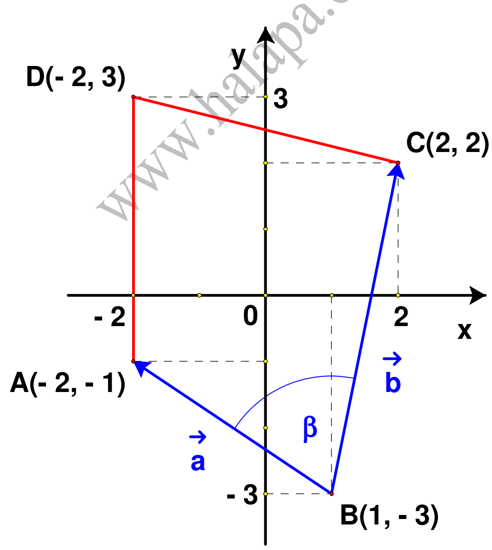
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica



Odredimo vektore $\vec{a} = \vec{BA}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.

- $$\left. \begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(1, -3) \\ A(x_2, y_2) = A(-2, -1) \\ \vec{a} = \vec{BA} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = (-2 - 1) \cdot \vec{i} + (-1 - (-3)) \cdot \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -3 \cdot \vec{i} + (-1 + 3) \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1,\, y_1) = B(1, -3) \\ C(x_2,\, y_2) = C(2, 2) \\ \vec{b} = \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{b} = (2-1)\cdot\vec{i} + (2-(-3))\cdot\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \vec{i} + (2+3)\cdot\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = \vec{i} + 5\cdot\vec{j}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{a} = -3\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} \\ \vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow a_x = -3\ ,\ a_y = 2 \\ \\ \left.\begin{array}{l} \vec{b} = \vec{i} + 5\cdot\vec{j} \\ \vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow b_x = 1\ ,\ b_y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\cos\beta = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{-3\cdot 1 + 2\cdot 5}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{1^2 + 5^2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{-3+10}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{1+25}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} \Rightarrow$$

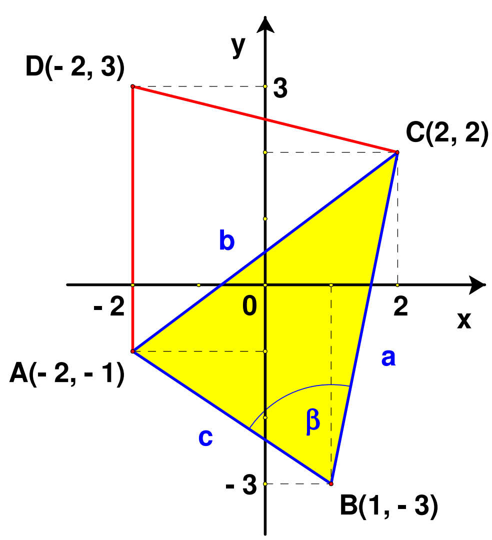
$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13\cdot 2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{\left(\sqrt{13}\right)^2\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{13\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{13\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{13\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{13\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{26} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{7\cdot\sqrt{2}}{26}\right) \Rightarrow \beta = 67^0\, 37'12''.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica



Uočimo trokut ABC i izračunamo duljine njegovih stranica.

- duljina stranice a

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(1, -3) \\ C(x_2, y_2) = C(2, 2) \\ a = |BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{(2-1)^2 + (2-(-3))^2} \Rightarrow a = \sqrt{1^2 + (2+3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{1 + 5^2} \Rightarrow a = \sqrt{1+25} \Rightarrow a = \sqrt{26}$$

- duljina stranice b

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-2, -1) \\ C(x_2, y_2) = C(2, 2) \\ b = |AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow b = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2} \Rightarrow b = \sqrt{(2+2)^2 + (2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow b = \sqrt{16+9} \Rightarrow b = \sqrt{25} \Rightarrow b = 5$$

- duljina stranice c

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-2, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(1, -3) \\ c = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-(-1))^2} \Rightarrow c = \sqrt{(1+2)^2 + (-3+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3^2 + (-2)^2} \Rightarrow c = \sqrt{9+4} \Rightarrow c = \sqrt{13}.$$

Uporabom kosinusovog poučka dobijemo mjeru kuta u vrhu B.

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\left(\sqrt{26}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{26 + 13 - 25}{2 \cdot \sqrt{13 \cdot 2} \cdot \sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{14}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{14}{2 \cdot \left(\sqrt{13}\right)^2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{14}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{14}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{13 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{13 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot 2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{26} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{7 \cdot \sqrt{2}}{26}\right) \Rightarrow \beta = 67^0 37'12''.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 073

Na slici je četverokut ABCD. Kolika je mjera kuta u vrhu C?

$A.\ 90^0 34'25''$ $\qquad B.\ 91^0 30'20''$ $\qquad C.\ 92^0 43'35''$ $\qquad D.\ 93^0$

Rezultat: C.

Zadatak 074 (Kolačić ☺, srednja škola)

Gradilište u obliku jednakokračnog trapeza treba ograditi daskama širine 25 cm. Duljine osnovica trapeza su 40 m i 25 m, a duljina kraka 10 m. Ako daske stavljamo po širini, onda je za ogradu potrebno dasaka

$A.\ 240 \qquad B.\ 36 \qquad C.\ 3600 \qquad D.\ 680 \qquad E.\ 20$

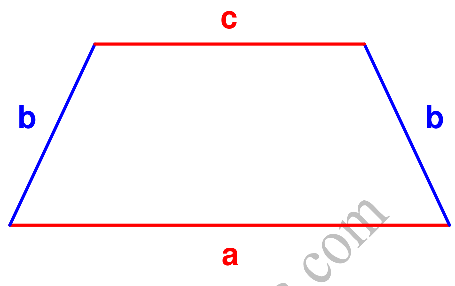
Rješenje 074

Ponovimo!

$$1\ m = 100\ cm.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza.
Trapez je jednakokračan ako su mu kraci jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni.
Jednakokračni trapez zove se još i tetivni trapez jer su mu stranice tetive opisane kružnice.
Opseg jednakokračnog trapeza računa se po formuli:

$$O = a + 2 \cdot b + c.$$



Najprije izračunamo opseg gradilišta koje ima oblik jednakokračnog trapeza.

$$\left.\begin{array}{l} a = 40\ m \\ b = 10\ m \\ c = 25\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ O = a + 2 \cdot b + c\ \right] \Rightarrow O = 40\ m + 2 \cdot 10\ m + 25\ m \Rightarrow O = 85\ m \Rightarrow O = 8500\ cm.$$

Budući da je zadana širina jedne daske s = 25 cm, ukupan broj dasaka dobije se dijeljenjem opsega gradilišta sa tom širinom.

$$\left.\begin{array}{l} O = 8500\ cm \\ s = 25\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ n = \frac{O}{s}\ \right] \Rightarrow n = \frac{8500\ cm}{25\ cm} \Rightarrow n = 340.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 074

Gradilište u obliku jednakokračnog trapeza treba ograditi daskama širine 12.5 cm. Duljine osnovica trapeza su 40 m i 25 m, a duljina kraka 10 m. Ako daske stavljamo po širini, onda je za ogradu potrebno dasaka

$A.\ 240 \qquad B.\ 36 \qquad C.\ 3600 \qquad D.\ 680 \qquad E.\ 20$

Rezultat: D.

Zadatak 075 (Martina, gimnazija)

Zbroj duljina nasuprotnih stranica četverokuta opisanog kružnici polumjera 5 cm je 20 cm. Kolika je površina četverokuta?

Rješenje 075

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut.
Četverokut je tangencijalni ako i samo ako su zbrojevi duljina suprotnih stranica međusobno jednaki.

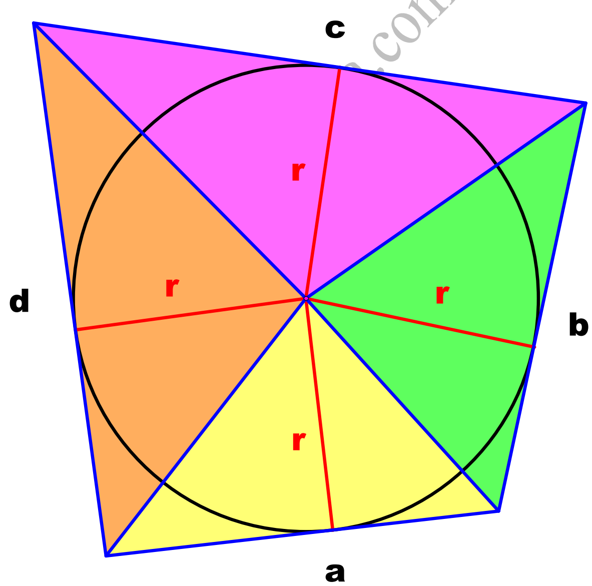
$$a+c=b+d.$$

Tangencijalni četverokut je četverokut u koji se može upisati kružnica
Površina četverokuta opisanog kružnici polumjera r jednaka je

$$P=r\cdot s,$$

gdje je s poluopseg četverokuta

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}.$$



Neka su stranice četverokuta a, b, c, d. Spajanjem vrhova četverokuta sa središtem upisane kružnice četverokut je podijeljen na trokute kojima su osnovice stranice četverokuta, a visine su polumjer upisane kružnice. Zbrajanjem površina svih tih trokuta dobijemo površinu četverokuta.

$$P=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}+\frac{d\cdot r}{2} \Rightarrow P=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+\frac{d}{2}\right)\cdot r \Rightarrow P=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r.$$

Računamo površinu četverokuta

$$P=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r \Rightarrow P=\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\cdot r \Rightarrow \begin{bmatrix} a+c=20 \\ b+d=20 \\ r=5 \end{bmatrix} \Rightarrow P=\frac{20+20}{2}\cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P = \frac{40}{2} \cdot 5 \ \Rightarrow \ P = \frac{40}{2} \cdot 5 \ \Rightarrow \ P = 20 \cdot 5 \ \Rightarrow \ P = 100 \ cm^2.$$

Vježba 075

Zbroj duljina nasuprotnih stranica četverokuta opisanog kružnici polumjera 3 cm je 20 cm. Kolika je površina četverokuta?

Rezultat: 60 cm^2.

Zadatak 076 (Jelena, strukovna škola)

Kutovi četverokuta razlikuju se uzastopce za 20°. Najveći kut iznosi:

$$A. \ 90^0 \qquad B. \ 100^0 \qquad C. \ 110^0 \qquad D. \ 120^0$$

Rješenje 076

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice. Zbroj veličina svih kutova u četverokutu iznosi 360°.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a = b + n \quad , \quad a - b = n \quad , \quad a - n = b.$$

Budući da se kutovi četverokuta razlikuju uzastopce za 20°, možemo napisati:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha \\ \beta = \alpha + 20^0 \\ \gamma = \beta + 20^0 = \alpha + 20^0 + 20^0 = \alpha + 40^0 \\ \delta = \gamma + 20^0 = \alpha + 40^0 + 20^0 = \alpha + 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha + \alpha + 20^0 + \alpha + 40^0 + \alpha + 60^0 = 360^0 \ \Rightarrow \ \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 360^0 - 20^0 - 40^0 - 60^0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4 \cdot \alpha = 240^0 \ \Rightarrow \ 4 \cdot \alpha = 240^0 \ /:4 \ \Rightarrow \ \alpha = 60^0.$$

Najveći kut iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \delta = \alpha + 60^0 \\ \alpha = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \delta = 60^0 + 60^0 \ \Rightarrow \ \delta = 120^0.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 076

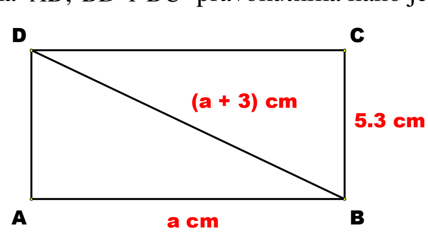
Kutovi četverokuta razlikuju se uzastopce za 20°. Najmanji kut iznosi:

$$A. \ 30^0 \qquad B. \ 60^0 \qquad C. \ 80^0 \qquad D. \ 90^0$$

Rezultat: B.

Zadatak 077 (Matea, Ivana, Petra, TUPŠ)

Zadane su duljine dužina $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ pravokutnika kako je prikazano na skici.



Kolika je površina pravokutnika?

$$A.\ 16.86\ cm^2 \qquad B.\ 19.61\ cm^2 \qquad C.\ 30.72\ cm^2 \qquad D.\ 43.99\ cm^2$$

Rješenje 077

Ponovimo!

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Površina pravokutnika

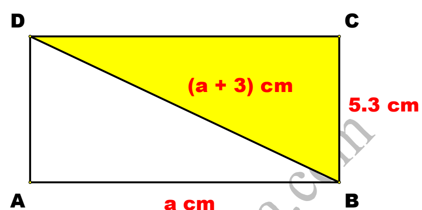
Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P = a \cdot b.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|DC| = |AB| = a \quad , \quad |AD| = |BC| = 5.3 \quad , \quad |BD| = a + 3$$

Uočimo pravokutan trokut BCD čije su duljine kateta |BC|, |DC|, a duljina hipotenuze |BD|.
Uporabimo Pitagorin poučak:

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |DC|^2 \Rightarrow (a+3)^2 = 5.3^2 + a^2 \Rightarrow a^2 + 6 \cdot a + 9 = 28.09 + a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 6 \cdot a + 9 = 28.09 + a^2 \Rightarrow 6 \cdot a + 9 = 28.09 \Rightarrow 6 \cdot a = 28.09 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot a = 19.09 \Rightarrow 6 \cdot a = 19.09 \ /:6 \Rightarrow a = 3.182.$$

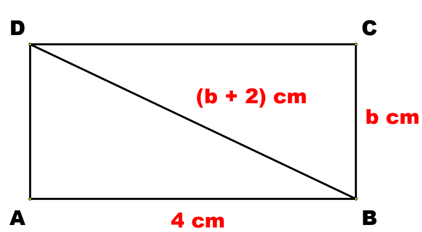
Duljine stranica pravokutnika ABCD su a = 3.182 cm, b = 5.3 cm pa njegova površina iznosi:

$$P = a \cdot b \Rightarrow P = 3.182\ cm \cdot 5.3\ cm \Rightarrow P = 16.86\ cm^2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 077

Zadane su duljine dužina $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ pravokutnika kako je prikazano na skici.



Kolika je površina pravokutnika?

$$A.\ 10\ cm^2 \qquad B.\ 11\ cm^2 \qquad C.\ 12\ cm^2 \qquad D.\ 14\ cm^2$$

Rezultat: C.

Zadatak 078 (Marina, TUPŠ)

Mjera jednog kuta četverokuta iznosi 82°, drugoga kuta 114°, a mjere preostalih dvaju kutova odnose se kao 1 : 2. Kolika je mjera manjeg od tih dvaju kutova?

Rješenje 078

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice. Zbroj veličina svih kutova u četverokutu iznosi 360°.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0.$$

Omjer je kvocijent dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (kvocijent) omjera, konstanta proporcionalnosti.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad \text{i} \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \;\Rightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

1.inačica

Neka je α = 82°, β = 114°. Za ostala dva kuta γ i δ vrijede jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0\\ \gamma:\delta=1:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma+\delta=360^0-(\alpha+\beta)\\ 2\cdot\gamma=\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma+\delta=360^0-\left(82^0+114^0\right)\\ \delta=2\cdot\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma+\delta=360^0-196^0\\ \delta=2\cdot\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma+\delta=164^0\\ \delta=2\cdot\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow \gamma+2\cdot\gamma=164^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\gamma=164^0 \Rightarrow 3\cdot\gamma=164^0 \;/:3 \Rightarrow \gamma=54.67^0.$$

Manji kut je γ jer je δ dva puta veći od njega.

2.inačica

Neka je α = 82°, β = 114°. Za ostala dva kuta γ i δ vrijede jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0\\ \gamma:\delta=1:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{uvodimo konstantu}\\ \text{proporcionalnosti } k\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0\\ \gamma=1\cdot k\\ \delta=2\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0\\ \gamma=k\\ \delta=2\cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow 82^0+114^0+k+2\cdot k=360^0 \Rightarrow k+2\cdot k=360^0-82^0-114^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot k=164^0 \Rightarrow 3\cdot k=164^0 \;/:3 \Rightarrow k=54.67^0.$$

Sada računamo kutove γ i δ.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = k \\ \delta = 2 \cdot k\end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = 54.67^0\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma = 54.67^0 \\ \delta = 2 \cdot 54.67^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\gamma = 54.67^0 \\ \delta = 109.34^0\end{array}\right\}.$$

Kut γ je manji.

Vježba 078

Mjera jednog kuta četverokuta iznosi 40°, drugoga kuta 50°, a mjere preostalih dvaju kutova odnose se kao 1 : 2. Kolika je mjera manjeg od tih dvaju kutova?

Rezultat: 90°.

Zadatak 079 (Marina, TUPŠ)

Dječak trči po dijagonali pravokutnog igrališta dimenzije 50 x 30 m. Za 4 minute pretrči dijagonalu 7 puta. Koliko će metara pretrčati za 45 min nastavi li trčati istom prosječnom brzinom? Napomena: prosječna brzina se računa kao omjer prijeđenog puta i vremena.

Rješenje 079

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

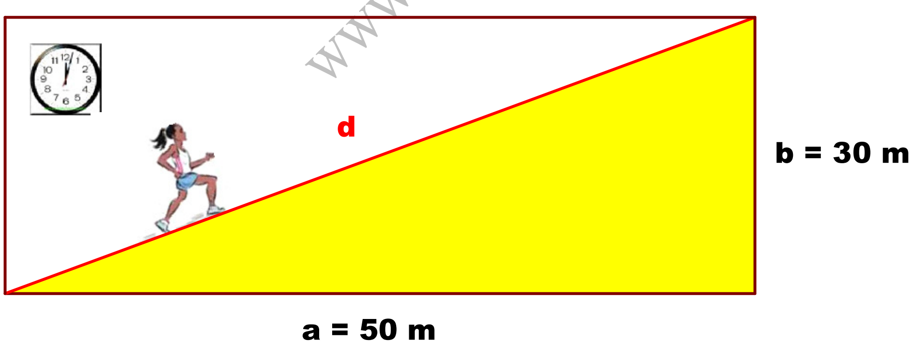
Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Prosječna brzina v računa se kao omjer prijeđenog puta s i vremena t.

$$v = \frac{s}{t}.$$



Da bismo izračunali duljinu dijagonale uporabit ćemo Pitagorin poučak.

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 50\ m \\ b = 30\ m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(50\ m)^2 + (30\ m)^2} \Rightarrow d = 58.31\ m.$$

Dječak je dijagonalu pretrčao 7 puta pa ukupni put iznosi:

$$s = 7 \cdot d \Rightarrow s = 7 \cdot 58.31\ m \Rightarrow s = 408.17\ m.$$

Budući da je put prešao za 4 minute, njegova je prosječna brzina:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow \begin{bmatrix} s = 408.17\ m \\ t = 4\ \text{min} \end{bmatrix} \Rightarrow v = \frac{408.17\ m}{4\ \text{min}} \Rightarrow v = 102.04\ \frac{m}{\text{min}}.$$

Za 45 minuta dječak će pretrčati put koji iznosi:

$$s = v \cdot t \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} v = 102.04 \,\dfrac{m}{\min} \\ t = 45 \,\min \end{array}\right] \;\Rightarrow\; s = 102.04 \,\frac{m}{\min} \cdot 45 \,\min \;\Rightarrow\; s = 4591.8 \; m.$$

Vježba 079

Marina ☺ trči po dijagonali pravokutnog igrališta dimenzije 50 x 30 m. Za 4 minute pretrči dijagonalu 7 puta. Koliko će metara pretrčati za 60 min nastavi li trčati istom prosječnom brzinom? Napomena: prosječna brzina se računa kao omjer prijeđenog puta i vremena.

Rezultat: 6122.4 m.

Zadatak 080 (Mery, gimnazija)

Izvedi formulu za opseg jednakokračnog trapeza, ako je njegova ploština P, duljina visine v, a prikloni kut kraka prema osnovici α.

Rješenje 080

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

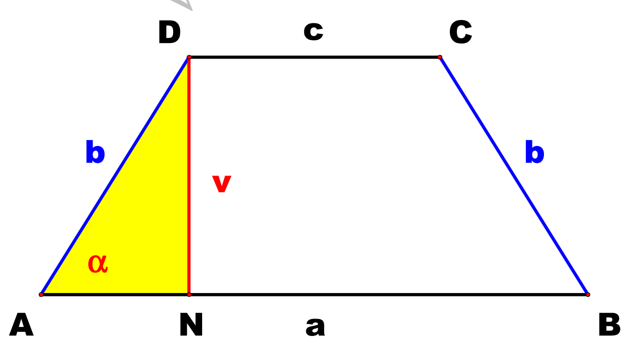
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza računa se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje je v visina trapeza. Trapez je jednakokračan ako su mu kraci jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni. Opseg jednakokračnog trapeza dan je formulom

$$O = a + c + 2 \cdot b.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = a \;\;,\;\; |BC| = |AD| = b \;\;,\;\; |CD| = c \;\;,\;\; |DN| = v$$

Uporabom formule za ploštinu trapeza dobijemo zbroj duljina osnovica a i c.

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v \;\Rightarrow\; P = \frac{a+c}{2} \cdot v \;/\cdot \frac{2}{v} \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot P}{v} = a + c \;\Rightarrow\; a + c = \frac{2 \cdot P}{v}.$$

Uočimo pravokutan trokut AND i pomoću funkcije sinus nađemo duljinu kraka b.

$$\sin\alpha = \frac{|DN|}{|AD|} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{v}{b} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{v}{b} \;/\cdot \frac{b}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; b = \frac{v}{\sin\alpha}.$$

Pomoću nađenih elemenata možemo izračunati traženi opseg jednakokračnog trapeza.

$$\left.\begin{array}{l} O = a + c + 2 \cdot b \\ a + c = \dfrac{2 \cdot P}{v} \\ b = \dfrac{v}{\sin \alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow O = \frac{2 \cdot P}{v} + 2 \cdot \frac{v}{\sin \alpha} \Rightarrow O = 2 \cdot \left(\frac{P}{v} + \frac{v}{\sin \alpha} \right).$$

Vježba 080

Izvedi formulu za ploštinu jednakokračnog trapeza, ako je njegov opseg O, duljina visine v, a prikloni kut kraka prema osnovici α.

Rezultat: $P = \dfrac{v}{2} \cdot \left(O - 2 \cdot \dfrac{v}{\sin \alpha} \right).$