Zadatak 041 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)

Ako se duljina stranice kvadrata uveća za 2 cm, površina se uveća za 100 cm^2. Kolika je površina manjeg kvadrata?

Rješenje 041

Neka je x duljina stranice manjeg kvadrata. Njegova površina je

$$P_1 = x^2.$$

Ako se duljina stranice uveća za 2 cm površina će iznositi:

$$P_2 = (x+2)^2.$$

Budući da je površina uvećana za 100 cm^2, slijedi:

$$P_2 = P_1 + 100 \Rightarrow (x+2)^2 = x^2 + 100 \Rightarrow x^2 + 4\cdot x + 4 = x^2 + 100 \Rightarrow 4\cdot x + 4 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x = 100 - 4 \Rightarrow 4\cdot x = 96 \;/:4 \Rightarrow x = 24\ cm.$$

Površina manjeg kvadrata iznosi:

$$\left.\begin{matrix} x = 24\ cm \\ P_1 = x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_1 = (24\ cm)^2 \Rightarrow P_1 = 576\ cm^2.$$

Vježba 041

Ako se duljina stranice kvadrata uveća za 2 cm, površina se uveća za 100 cm^2. Kolika je površina većeg kvadrata?

Rezultat: 676 cm^2.

Zadatak 042 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)

Razlika opsega dvaju kvadrata je 8, a razlika njihovih površina 16. Nađite zbroj njihovih površina.

Rješenje 042

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Neka je x duljina stranice većeg kvadrata, a y duljina stranice manjeg kvadrata. Postavimo jednadžbe:

- razlika opsega dvaju kvadrata je 8:

$$4\cdot x - 4\cdot y = 8 \;/:4 \Rightarrow x - y = 2,$$

- razlika površina dvaju kvadrata je 16:

$$x^2 - y^2 = 16.$$

Rješavamo sustav jednadžbi.

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{iz prve jednadžbe izračunamo x} \\ \text{i uvrstimo u drugu jednadžbu} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 + y \\ x^2 - y^2 = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2+y)^2 - y^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\cdot y + y^2 - y^2 = 16 \Rightarrow 4 + 4\cdot y = 16 \Rightarrow 4\cdot y = 16 - 4 \Rightarrow 4\cdot y = 12 \;/:4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 3 \\ x = 2 + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2 + 3 \Rightarrow x = 5.$$

Zbroj površina kvadrata je:

$$\left.\begin{matrix} x = 5\ ,\ y = 3 \\ P = x^2 + y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = 5^2 + 3^2 \Rightarrow P = 25 + 9 \Rightarrow P = 34.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x^2-y^2=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ (x-y)\cdot(x+y)=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 2\cdot(x+y)=16 \;/:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=10 \;/:2 \Rightarrow x=5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=5 \\ x+y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 5+y=8 \Rightarrow y=3.$$

Zbroj površina kvadrata je:

$$\left.\begin{array}{l} x=5 \;,\; y=3 \\ P=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P=5^2+3^2 \Rightarrow P=25+9 \Rightarrow P=34.$$

Vježba 042

Razlika opsega dvaju kvadrata je 8, a razlika njihovih površina 16. Nađite zbroj njihovih opsega.

Rezultat: 32.

Zadatak 043 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)

Kako glasi jednadžba pravca s obzirom na kojega su točke P(– 6, 1) i T(1, 3) simetrične?

Rješenje 043

Ponovimo!

Ako su zadane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, polovište dužine $\overline{AB}$ glasi:

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Koeficijent smjera pravca koji prolazi točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ je:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Jednadžba pravca točkom $T(x_1, y_1)$:

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1).$$

Uvjet okomitosti pravaca $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$ glasi:

$$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Najprije odredimo polovište S dužine $\overline{PT}$:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1)=P(-6, 1) \;,\; T(x_2, y_2)=T(1, 3) \\ S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow S\left(\frac{-6+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow S\left(-\frac{5}{2}, 2\right).$$

Koeficijent smjera pravca PT je:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1)=P(-6, 1) \;,\; T(x_2, y_2)=T(1, 3) \\ k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=\frac{3-1}{1+6} \Rightarrow k_1=\frac{2}{7}.$$

Traženi pravac okomit je na pravac PT pa njegov koeficijent smjera glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{2}{7} \\ k_2 = -\frac{1}{k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{7}{2}.$$

Jednadžba pravca s obzirom na kojega su točke P i T simetrične je:

$$\left.\begin{array}{l} S\left(x_1, y_1\right) = S\left(-\frac{5}{2}, 2\right) \ , \ k = -\frac{7}{2} \\ y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 2 = -\frac{7}{2} \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y - 2 = -\frac{7}{2} \cdot x - \frac{35}{4} \ / \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot y - 8 = -14 \cdot x - 35 \Rightarrow 4 \cdot y = -14 \cdot x - 35 + 8 \Rightarrow 4 \cdot y = -14 \cdot x - 27 \Rightarrow 14 \cdot x + 4 \cdot y + 27 = 0.$$

Vježba 043

Kako glasi jednadžba pravca s obzirom na kojega su točke A(1, 3) i B(– 6, 1) simetrične?

Rezultat: $14 \cdot x + 4 \cdot y + 27 = 0.$

Zadatak 044 (Zoran, Jan, Luka, maturanti gimnazije)

U rombu stranica iznosi 13, a kraća dijagonala 10. Kolika je veća dijagonala?

Rješenje 044

Ponovimo!

Za romb duljine stranice a i duljina dijagonala e i f vrijedi:

$$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2.$$

Veća dijagonala iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f = 10 \ , \ a = 13 \\ e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow e^2 + 10^2 = 4 \cdot 13^2 \Rightarrow e^2 + 100 = 676 \Rightarrow e^2 = 576 \ / \sqrt{} \Rightarrow e = 24.$$

Vježba 044

U rombu stranica iznosi 13, a dulja dijagonala 24. Kolika je manja dijagonala?

Rezultat: 10.

Zadatak 045 (Luka, Zoran, Jan, maturanti gimnazije)

Dijagonale romba iznose 6 i 8. Nađite visinu romba.

Rješenje 045

Ponovimo!

Ako su zadane duljine dijagonala e i f, duljina visine v i duljina stranice a romba, vrijedi:

$$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \quad , \quad P = a \cdot v \quad , \quad P = \frac{e \cdot f}{2}.$$

Visina romba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} e = 6 \ , \ f = 8 \\ 4 \cdot a^2 = e^2 + f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot a^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2 = 36 + 64 \Rightarrow 4 \cdot a^2 = 100 \ /:4 \Rightarrow a^2 = 25 \ / \sqrt{} \Rightarrow a = 5.$$

$$\left.\begin{array}{l} P = a \cdot v \\ P = \frac{e \cdot f}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \ / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow v = \frac{e \cdot f}{2 \cdot a} \Rightarrow v = \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 5} \Rightarrow v = \frac{24}{5}.$$

Vježba 045

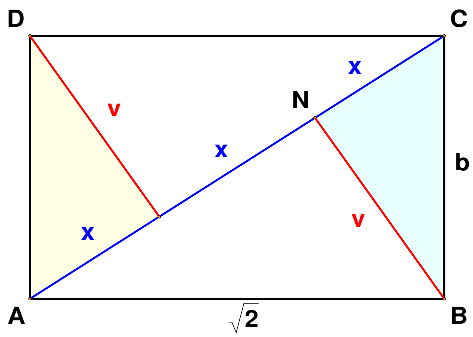
Dijagonale romba iznose 12 i 16. Nađite visinu romba.

Rezultat: $\frac{48}{5}.$

Zadatak 046 (Luka, Zoran, Jan, maturanti gimnazije)

Okomice iz dva vrha pravokutnika na dijagonalu dijele dijagonalu na 3 jednaka dijela. Duljina veće stranice je $\sqrt{2}$. Nađite duljinu manje stranice.

Rješenje 046



1.inačica

Uočimo tri pravokutna trokuta ΔABC, ΔABN, ΔBCN i uporabom Pitagorina poučka postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}(3\cdot x)^2-b^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\(2\cdot x)^2+v^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\x^2+v^2=b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}9\cdot x^2-b^2=2\\4\cdot x^2+v^2=2\\x^2+v^2=b^2\ /\cdot(-1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}9\cdot x^2-b^2=2\\4\cdot x^2+v^2=2\\-x^2-v^2=-b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zbrojimo}\\\text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow 12\cdot x^2=4\ /:12\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}.$$

Duljina manje stranice b iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{3}\\9\cdot x^2-b^2=2\end{array}\right\}\Rightarrow 9\cdot\frac{1}{3}-b^2=2\Rightarrow 3-b^2=2\Rightarrow b^2=1\ /\sqrt{\ }\Rightarrow b=1.$$

2.inačica

Uočimo tri pravokutna trokuta ΔABC, ΔABN, ΔBCN i uporabom Pitagorina poučka postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{r}(3\cdot x)^2=b^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\\(2\cdot x)^2+v^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\b^2=x^2+v^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}9\cdot x^2=b^2+2\\4\cdot x^2+v^2=2\\b^2=x^2+v^2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zbrojimo}\\\text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot x^2+4\cdot x^2+v^2+b^2=b^2+2+2+x^2+v^2\Rightarrow 12\cdot x^2=4\ /:12\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}.$$

Duljina manje stranice b iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{3}\\9\cdot x^2=b^2+2\end{array}\right\}\Rightarrow b^2+2=9\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow b^2+2=3\Rightarrow b^2=1\ /\sqrt{\ }\Rightarrow b=1.$$

3.inačica

Pravokutni trokuti ΔABN i ΔABC slični su (jer imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|AB|}{|AN|}=\frac{|AC|}{|AB|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2\cdot x}=\frac{3\cdot x}{\sqrt{2}}\Rightarrow 6\cdot x^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow 6\cdot x^2=2\ /:6\Rightarrow x^2=\frac{2}{6}\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}.$$

Iz pravokutnog trokuta ABC pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{3} \\ b^2 = (3 \cdot x)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{3} \\ b^2 = 9 \cdot x^2 - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = 9 \cdot \frac{1}{3} - 2 \Rightarrow b^2 = 3 - 2 \Rightarrow b^2 = 1 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow b = 1.$$

Vježba 046

Okomice iz dva vrha pravokutnika na dijagonalu dijele dijagonalu na 3 jednaka dijela. Duljina veće stranice je $\sqrt{2}$. Nađite duljinu dijagonale.

Rezultat: $\sqrt{3}$.

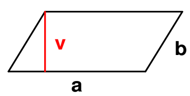
Zadatak 047 (Ana, maturantica)

Paralelogram opsega 80 cm ima jednu stranicu za 6 cm dulju od druge. Ako je duljina visine na dulju stranicu paralelograma 12 cm, kolika je njegova površina?

Rješenje 047

Ponovimo!

Paralelogram je trapez kojemu su suprotne stranice usporedne.



Opseg: $O = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

Površina: $P = a \cdot v$.

Neka je a = x duljina duže stranice. Tada je b = x – 6 duljina kraće stranice. Iz formule za opseg dobije se duljina duže stranice:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot a + 2 \cdot b \\ O = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot x + 2 \cdot (x - 6) \\ O = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot x + 2 \cdot (x - 6) = 80 \Rightarrow 2 \cdot x + 2 \cdot x - 12 = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x = 80 + 12 \Rightarrow 4 \cdot x = 92 \,/: 4 \Rightarrow x = 23\ cm.$$

Površina paralelograma iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 23\ cm\ ,\ v = 12\ cm \\ P = a \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow P = 23\ cm \cdot 12\ cm \Rightarrow P = 276\ cm^2.$$

Vježba 047

Paralelogram opsega 80 cm ima jednu stranicu za 6 cm dulju od druge. Ako je duljina visine na dulju stranicu paralelograma 10 cm, kolika je njegova površina?

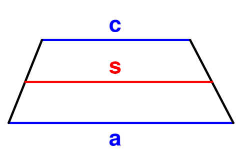
Rezultat: 230 cm^2.

Zadatak 048 (Lidija, gimnazija)

Krakovi trapeza ABCD podijeljeni su na po četiri sukladna dijela i djelišne su točke spojene dužinama. Ako su duljine dužina x i y jednake 18 cm i 24 cm, kolike su duljine osnovica trapeza?

Rješenje 048

Ponovimo!



Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza. Srednjica trapeza paralelna je s osnovicama trapeza. Duljina srednjice trapeza jednaka je polovici zbroja duljina osnovica trapeza.

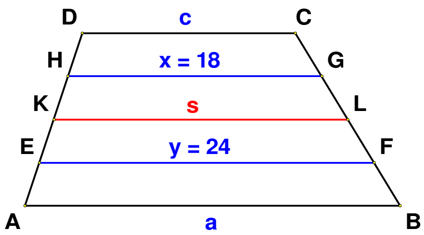
$$s = \frac{a + c}{2}.$$

Računamo duljinu osnovice trapeza.

Uočimo trapez EFGH i izračunamo njegovu srednjicu s,

$$\left.\begin{array}{l} y = 24\ ,\ x = 18 \\ s = \dfrac{y + x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{24 + 18}{2} \Rightarrow s = \frac{42}{2} \Rightarrow s = 21\ cm$$

koja je istodobno srednjica i velikog trapeza ABCD.



Iz trapeza KLCD dobije se duljina osnovice c:

$$\left.\begin{array}{l} s = 21 \;,\; x = 18 \\ \dfrac{s+c}{2} = x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{21+c}{2} = 18 \;/\cdot 2 \Rightarrow 21 + c = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 36 - 21 \Rightarrow c = 15\ cm.$$

Iz trapeza ABLK dobije se duljina osnovice a:

$$\left.\begin{array}{l} s = 21 \;,\; y = 24 \\ \dfrac{a+s}{2} = y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a+21}{2} = 24 \;/\cdot 2 \Rightarrow a + 21 = 48 \Rightarrow a = 48 - 21 \Rightarrow a = 27\ cm.$$

Vježba 048

Krakovi trapeza ABCD podijeljeni su na po četiri sukladna dijela i djelišne su točke spojene dužinama. Ako su duljine dužina x i y jednake 36 cm i 48 cm, kolike su duljine osnovica trapeza?

Rezultat: a = 54 cm , c = 30 cm.

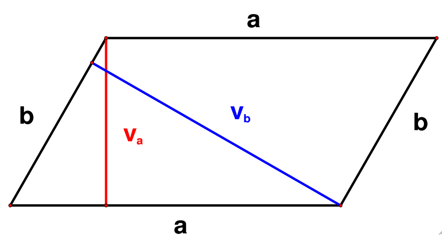
Zadatak 049 (Iva, srednja škola)

Izračunaj površinu paralelograma ako su zadane visine $v_a = 8$ cm, $v_b = 12$ cm i opseg O = 60 cm.

Rješenje 049

Ponovimo!

Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima.



Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice (baze) i pripadne visine:

$$P = a \cdot v_a \quad \text{ili} \quad P = b \cdot v_b.$$

Opseg paralelograma računa se po formuli:

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Budući da se površina paralelograma može izračunati na dva načina, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P = a \cdot v_a \\ P = b \cdot v_b \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \;/: v_a \Rightarrow a = \frac{b \cdot v_b}{v_a} \Rightarrow a = \frac{b \cdot 12\ cm}{8\ cm} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot b.$$

Iz formule za opseg dobije se duljina stranice b:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot a + 2 \cdot b \\ a = \dfrac{3}{2} \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow O = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot b + 2 \cdot b \Rightarrow O = 3 \cdot b + 2 \cdot b \Rightarrow O = 5 \cdot b \Rightarrow 5 \cdot b = 60 \;/: 5 \Rightarrow b = 12\ cm.$$

Površina paralelograma iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b = 12\ cm \;,\; v_b = 12\ cm \\ P = b \cdot v_b \end{array}\right\} \Rightarrow P = 12\ cm \cdot 12\ cm \Rightarrow P = 144\ cm^2.$$

Vježba 049

Izračunaj površinu paralelograma ako su zadane visine $v_a = 4$ cm, $v_b = 6$ cm i opseg O = 60 cm.

Rezultat: 144 cm^2.

Zadatak 050 (Marija, srednja škola)

Izračunajte kutove jednakokračnog trapeza kojemu su duljine osnovica 4 cm i 2 cm, a duljina kraka 2 cm.

Rješenje 050

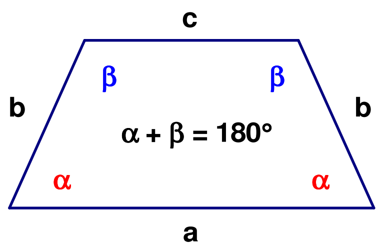
Ponovimo!

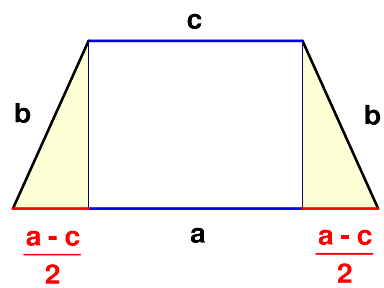
Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije kraci trapeza. Za unutrašnje kutove trapeza vrijedi da je zbroj kutova uz isti krak 180°.

Trapez je jednakokračan ako su mu kraci jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni.

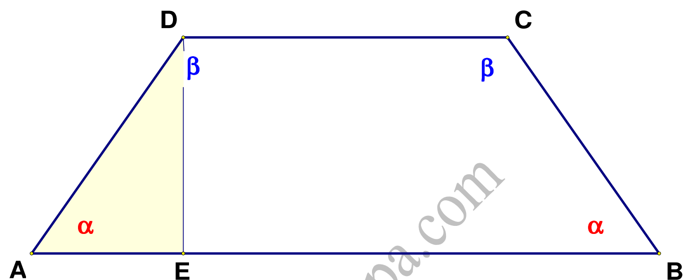
Za jednakokračan trapez vrijedi da su nasuprotni kutovi suplementni (njihov zbroj iznosi 180°).

Jednakokračni trapez zove se još i tetivni trapez jer su mu stranice tetive opisane kružnice.





Računamo kutove α i β. Sa slike vidi se:



$$|AB| = 4 \quad , \quad |DC| = 2 \quad , \quad |BC| = |AD| = 2 \quad , \quad |AE| = \frac{|AB| - |DC|}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Iz pravokutnog trokuta AED pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\alpha = \frac{|AE|}{|AD|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 60^{0}.$$

Kut β iznosi:

$$\alpha + \beta = 180^{0} \Rightarrow \beta = 180^{0} - \alpha \Rightarrow \beta = 180^{0} - 60^{0} \Rightarrow \beta = 120^{0}.$$

Vježba 050

Izračunajte kutove jednakokračnog trapeza kojemu su duljine osnovica 8 cm i 4 cm, a duljina kraka 4 cm.

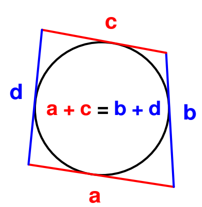
Rezultat: 60°, 120°.

Zadatak 051 (Branka, srednja škola)

U jednakokračan trapez može se upisati kružnica. Koliki je krak trapeza ako je površina trapeza 30 cm^2 i kut trapeza 50°?

Rješenje 051

Ponovimo!



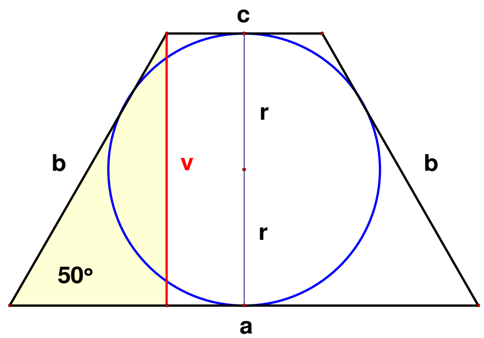
Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut.

Četverokut je tangencijalni ako i samo ako su zbrojevi duljina suprotnih stranica međusobno jednaki:

$$a + c = b + d.$$

Površina trapeza jednaka je produktu polovice zbroja duljina osnovica trapeza i duljine visine trapeza:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$



Budući da je jednakokračan trapez tangencijalan, slijedi:

$$a + c = b + b \Rightarrow a + c = 2 \cdot b.$$

Iz površine trapeza dobije se njegova visina v:

$$\left.\begin{array}{l} P = 30 \ , \ a + c = 2 \cdot b \\ P = \frac{a+c}{2} \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow 30 = \frac{2 \cdot b}{2} \cdot v \Rightarrow 30 = \frac{2 \cdot b}{2} \cdot v \Rightarrow b \cdot v = 30 \ / : b \Rightarrow v = \frac{30}{b}.$$

Sa slike vidi se:

$$\sin 50^0 = \frac{v}{b} \Rightarrow \sin 50^0 = \frac{v}{b} \ / \cdot b \Rightarrow v = b \cdot \sin 50^0.$$

Krak b trapeza iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} v = b \cdot \sin 50^0 \\ v = \frac{30}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow b \cdot \sin 50^0 = \frac{30}{b} \Rightarrow b \cdot \sin 50^0 = \frac{30}{b} \ / \cdot \frac{b}{\sin 50^0} \Rightarrow b^2 = \frac{30}{\sin 50^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{30}{\sin 50^0} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow b = \sqrt{\frac{30}{\sin 50^0}} \Rightarrow b = 6.26 \ cm.$$

Vježba 051

U jednakokračan trapez može se upisati kružnica. Koliki je krak trapeza ako je površina trapeza 30 cm^2 i kut trapeza 45°?

Rezultat: 6.51 cm.

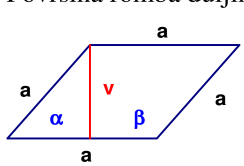
Zadatak 052 (Ivan, elektrotehnička škola)

Oko kruga polumjera r opisan je romb čiji jedan kut iznosi 150°. Kolika je površina romba?

Rješenje 052

Ponovimo!

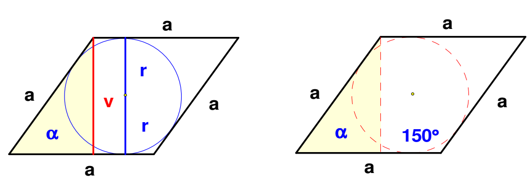
Površina romba duljine stranice a i visine v iznosi:



$$P = a \cdot v.$$

Kutovi uza svaku stranicu romba su suplementni:

$$\alpha + \beta = 180^0.$$



Sa slika vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} v = 2 \cdot r \\ \sin\alpha = \dfrac{v}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2 \cdot r}{a} \ / \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot r}{\sin\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 150^0 \\ \alpha + \beta = 180^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 150^0 = 180^0 \Rightarrow \alpha = 180^0 - 150^0 \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

Površina romba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} v = 2 \cdot r \ , \ a = \dfrac{2 \cdot r}{\sin\alpha} \\ P = a \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot r}{\sin\alpha} \cdot 2 \cdot r \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2}{\sin\alpha} \Rightarrow \left[\alpha = 30^0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2}{\sin 30^0} \Rightarrow P = \frac{4 \cdot r^2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow P = 8 \cdot r^2.$$

Vježba 052

Oko kruga polumjera 1 cm opisan je romb čiji jedan kut iznosi 150°. Kolika je površina romba?

Rezultat: 8 cm^2.

Zadatak 053 (Denis, ekonomska škola)

Površina pravokutnika je 90 cm^2, a duljina dijagonale je 15 cm. Nađi zbroj duljina stranica pravokutnika.

Rješenje 053

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow a + b = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b}.$$

Opći je oblik bikvadratne jednadžbe:

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0.$$

Rješavamo je zamjenom (supstitucijom)

$$t = x^2$$

nakon čega ona prelazi u kvadratnu jednadžbu:

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0.$$

Odredivši rješenja t_1 i t_2 ove jednadžbe, rješenja početne dobivamo iz

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \quad , \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}.$$

Vidimo da će bikvadratna jednadžba imati općenito četiri rješenja.

Pravokutnik je paralelogram kojemu je barem jedan kut pravi. Dijagonala pravokutnika je spojnica dva nesusjedna vrha. Pravokutnik ima dvije dijagonale koje su sukladne i međusobno se raspolavljaju.

Ploština pravokutnika izračunava se po formuli:

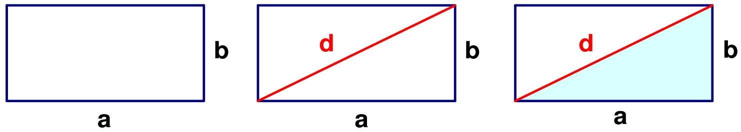
$$P = a \cdot b.$$

Opseg pravokutnika izračunava se po formuli:

$$O = 2 \cdot (a + b).$$

Dijagonala pravokutnika izračunava se po formuli:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



1.inačica

Iz uvjeta u zadatku dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} P=a\cdot b\ ,\ P=90 \\ d=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ d=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b=90 \\ \sqrt{a^2+b^2}=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b=90\ /:a \\ \sqrt{a^2+b^2}=15\ /\ ^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\dfrac{90}{a} \\ a^2+b^2=225 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{zamjene}\end{bmatrix} \Rightarrow a^2+\left(\frac{90}{a}\right)^2=225 \Rightarrow a^2+\frac{8100}{a^2}=225\ /\cdot a^2 \Rightarrow a^4+8100=225\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4-225\cdot a^2+8100=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{bikvadratna jednadžba} \\ \text{zamjena , } t=a^2\end{bmatrix} \Rightarrow t^2-225\cdot t+8100=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2-225\cdot t+8100=0 \\ a=1\ ,\ b=-225\ ,\ c=8100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-225\ ,\ c=8100 \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{225\pm\sqrt{50625-4\cdot1\cdot8100}}{2\cdot1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{225\pm\sqrt{50625-32400}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{225\pm\sqrt{18225}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{225\pm135}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{225+135}{2} \\ t_2=\dfrac{225-135}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{360}{2} \\ t_2=\dfrac{90}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=180 \\ t_2=45 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji (zamjeni).

- $$\left.\begin{array}{l} t=a^2 \\ t=180 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=180\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a_{1,2}=\pm\sqrt{180} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow a_{1,2}=\pm\sqrt{36\cdot5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\pm6\cdot\sqrt{5} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=6\cdot\sqrt{5} \\ a_2=-6\cdot\sqrt{5}\ \text{nije rješenje} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{stranica} \\ a=6\cdot\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\dfrac{90}{a} \\ a=6\cdot\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{90}{6\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika}\end{bmatrix} \Rightarrow b=\frac{90}{6\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow b=\frac{90\cdot\sqrt{5}}{6\cdot5} \Rightarrow b=\frac{90\cdot\sqrt{5}}{30} \Rightarrow b=3\cdot\sqrt{5}\ cm.$$

Opseg pravokutnika (zbroj duljina stranica) iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=6\cdot\sqrt{5}\ ,\ b=3\cdot\sqrt{5} \\ O=2\cdot(a+b) \end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot\left(6\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}\right) \Rightarrow O=2\cdot9\cdot\sqrt{5} \Rightarrow O=18\cdot\sqrt{5}\ cm.$$

- $$\left.\begin{array}{l} t=a^2 \\ t=45 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=45\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a_{3,4}=\pm\sqrt{45} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow a_{3,4}=\pm\sqrt{9\cdot5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{3,4}=\pm 3\cdot\sqrt{5} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_3=3\cdot\sqrt{5} \\ a_4=-3\cdot\sqrt{5} \text{ nije rješenje} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{stranica} \\ a=3\cdot\sqrt{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=\dfrac{90}{a} \\ a=3\cdot\sqrt{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{90}{3\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow b=\frac{90}{3\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow b=\frac{90\cdot\sqrt{5}}{3\cdot 5} \Rightarrow b=\frac{90\cdot\sqrt{5}}{15} \Rightarrow b=6\cdot\sqrt{5}\ cm.$$

Opseg pravokutnika (zbroj duljina stranica) iznosi:

$$\left.\begin{matrix} a=3\cdot\sqrt{5}\ ,\ b=6\cdot\sqrt{5} \\ O=2\cdot(a+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow O=2\cdot\left(3\cdot\sqrt{5}+6\cdot\sqrt{5}\right) \Rightarrow O=2\cdot 9\cdot\sqrt{5} \Rightarrow O=18\cdot\sqrt{5}\ cm.$$

2.inačica

Iz uvjeta u zadatku dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} P=a\cdot b\ ,\ P=90 \\ d=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ d=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot b=90 \\ \sqrt{a^2+b^2}=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot b=90 \\ \sqrt{a^2+b^2}=15\ /^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot b=90 \\ a^2+b^2=225 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a+b=\sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b}\right] \Rightarrow a+b=\sqrt{225+2\cdot 90} \Rightarrow a+b=\sqrt{225+180} \Rightarrow a+b=\sqrt{405} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{bmatrix} \Rightarrow a+b=\sqrt{81\cdot 5} \Rightarrow a+b=9\cdot\sqrt{5}.$$

Opseg pravokutnika (zbroj duljina stranica) iznosi:

$$\left.\begin{matrix} a+b=9\cdot\sqrt{5} \\ O=2\cdot(a+b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow O=2\cdot 9\cdot\sqrt{5} \Rightarrow O=18\cdot\sqrt{5}\ cm.$$

Vježba 053

Površina pravokutnika je 12 cm^2, a duljina dijagonale je 5 cm. Nađi zbroj duljina stranica pravokutnika.

Rezultat: 14 cm.

Zadatak 054 (Mario, gimnazija)

U rombu stranice duljine a veća dijagonala je 5 puta dulja od manje. Izračunaj površinu romba.

Rješenje 054

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad ,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad ,\quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad ,\quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Romb je paralelogram koji ima sve stranice jednake duljine. Dijagonale romba raspolavljaju se i međusobno su okomite. Dijagonale romba raspolavljaju njegove kutove. Površina romba dana je izrazom

$$P=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f,$$

gdje su e i f duljine dijagonala.

Pitagorin poučak

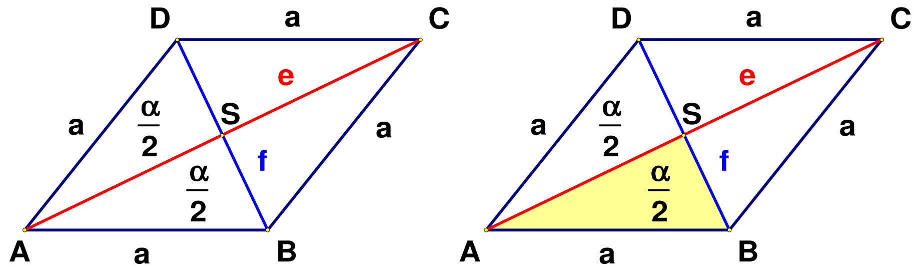
Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer katete nasuprot tog kuta i hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer katete uz taj kut i hipotenuze.

Osnovni trigonometrijski identitet:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$



Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \ , \ |AC| = e \ , \ |BD| = f \ , \ |AS| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$|BS| = \frac{1}{2} \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot f \ , \ \angle BAS = \angle SAD = \frac{\alpha}{2}.$$

1.inačica

Iz pravokutnog trokuta ABS uporabom Pitagorina poučka dobije se sljedeća relacija:

$$|AS|^2 + |BS|^2 = |AB|^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot e\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot f\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot e^2 + \frac{1}{4} \cdot f^2 = a^2 \ / \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \\ e = 5 \cdot f \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} metoda \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow (5 \cdot f)^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \Rightarrow 25 \cdot f^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26 \cdot f^2 = 4 \cdot a^2 \ /: 26 \Rightarrow f^2 = \frac{4 \cdot a^2}{26} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow f = \sqrt{\frac{4 \cdot a^2}{26}} \Rightarrow f = \frac{\sqrt{4 \cdot a^2}}{\sqrt{26}} \Rightarrow f = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{26}}.$$

Duljina e druge dijagonale je:

$$\left.\begin{array}{l} f = \dfrac{2 \cdot a}{\sqrt{26}} \\ e = 5 \cdot f \end{array}\right\} \Rightarrow e = 5 \cdot \frac{2 \cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow e = \frac{10 \cdot a}{\sqrt{26}}.$$

Površina romba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} e = \dfrac{10 \cdot a}{\sqrt{26}} \ , \ f = \dfrac{2 \cdot a}{\sqrt{26}} \\ P = \dfrac{1}{2} \cdot e \cdot f \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot a}{\sqrt{26}} \cdot \frac{2 \cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot a}{\sqrt{26}} \cdot \frac{2 \cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow P = \frac{10 \cdot a^2}{\left(\sqrt{26}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{10 \cdot a^2}{26} \Rightarrow P = \frac{5 \cdot a^2}{13}.$$

2.inačica

Uočimo pravokutan trokut ABS i pomoću funkcija sinus i kosinus dobije se relacija:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|BS|}{|AB|}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{|AS|}{|AB|}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot f}{a}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot e}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{f}{2\cdot a}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{e}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{trigonometrijski identitet}\\ \cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e}{2\cdot a}\right)^2+\left(\frac{f}{2\cdot a}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{e^2}{4\cdot a^2}+\frac{f^2}{4\cdot a^2}=1 \;/\cdot 4\cdot a^2 \Rightarrow e^2+f^2=4\cdot a^2.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}e^2+f^2=4\cdot a^2\\ e=5\cdot f\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow (5\cdot f)^2+f^2=4\cdot a^2 \Rightarrow 25\cdot f^2+f^2=4\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\cdot f^2=4\cdot a^2 \;/:26 \Rightarrow f^2=\frac{4\cdot a^2}{26} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow f=\sqrt{\frac{4\cdot a^2}{26}} \Rightarrow f=\frac{\sqrt{4\cdot a^2}}{\sqrt{26}} \Rightarrow f=\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}}.$$

Duljina e druge dijagonale je:

$$\left.\begin{array}{l}f=\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}}\\ e=5\cdot f\end{array}\right\} \Rightarrow e=5\cdot\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow e=\frac{10\cdot a}{\sqrt{26}}.$$

Površina romba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}e=\frac{10\cdot a}{\sqrt{26}}\;,\; f=\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}}\\ P=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f\end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\cdot a}{\sqrt{26}}\cdot\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\cdot a}{\sqrt{26}}\cdot\frac{2\cdot a}{\sqrt{26}} \Rightarrow P=\frac{10\cdot a^2}{\left(\sqrt{26}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{10\cdot a^2}{26} \Rightarrow P=\frac{5\cdot a^2}{13}.$$

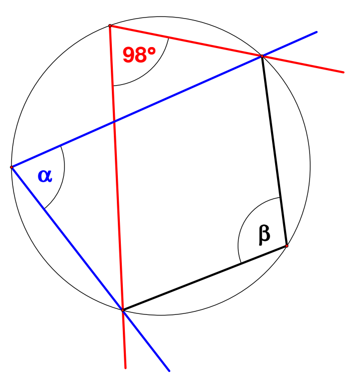
Vježba 054

U rombu stranice duljine a manja dijagonala je 5 puta kraća od veće. Izračunaj površinu romba.

Rezultat: $\frac{5\cdot a^2}{13}.$

Zadatak 055 (Maja, srednja škola)

Kolika je razlika mjera kutova α i β sa slike?



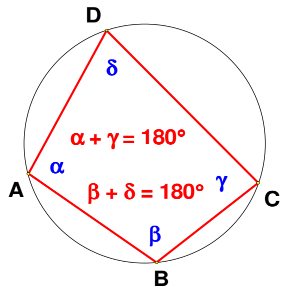
Rješenje 055

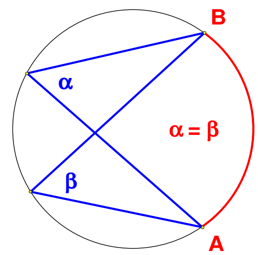
Ponovimo!

Tetivni četverokut je četverokut:

- čiji su vrhovi točke jedne kružnice,
- kojem se može opisati kružnica,
- čije su stranice tetive jedne kružnice,
- kojem je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180°.

Svaki kut s vrhom na kružnici čiji krakovi sijeku kružnicu zovemo obodni kut. Svi obodni kutovi nad istim lukom kružnice međusobno su sukladni.

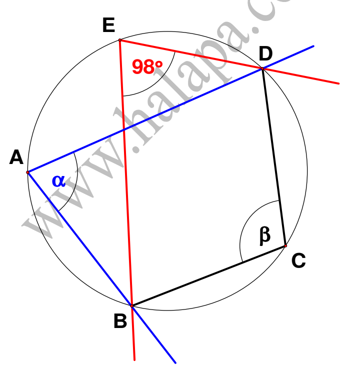




1.inačica

Sa donje slike vidi se da su obodni kutovi $\angle DEB = 98^{0}$ i $\angle DAB = \alpha$ nad istim lukom kružnice $\overset{\frown}{BCD}$ pa je

$$\alpha = 98^{0}.$$



Budući da je četverokut ABCD tetivni, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 180^{0} \\ \alpha = 98^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow 98^{0} + \beta = 180^{0} \Rightarrow \beta = 180^{0} - 98^{0} \Rightarrow \beta = 82^{0}.$$

Razlika mjera kutova α i β iznosi:

$$\alpha - \beta = 98^{0} - 82^{0} \Rightarrow \alpha - \beta = 16^{0}.$$

2.inačica

Sa gornje slike vidi se da su obodni kutovi $\angle DEB = 98^{0}$ i $\angle DAB = \alpha$ nad istim lukom kružnice $\overset{\frown}{BCD}$ pa je

$$\alpha = 98^{0}.$$

Budući da je četverokut BCDE tetivni, slijedi:

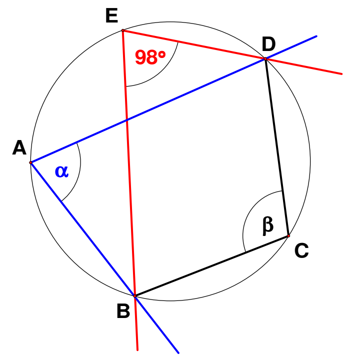
$$98^{0} + \beta = 180^{0} \Rightarrow \beta = 180^{0} - 98^{0} \Rightarrow \beta = 82^{0}.$$

Razlika mjera kutova α i β iznosi:

$$\alpha - \beta = 98^0 - 82^0 \Rightarrow \alpha - \beta = 16^0.$$

3.inačica

Sa donje slike vidi se da su četverokuti ABCD i BCDE tetivni četverokuti pa za nasuprotne kutove vrijedi:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 180^0 \\ 98^0 + \beta = 180^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 180^0 \\ \beta = 180^0 - 98^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 180^0 \\ \beta = 82^0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 82^0 = 180^0 \Rightarrow$$

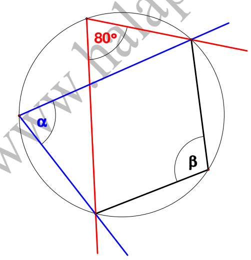
$$\Rightarrow \alpha = 180^0 - 82^0 \Rightarrow \alpha = 98^0.$$

Razlika mjera kutova α i β iznosi:

$$\alpha - \beta = 98^0 - 82^0 \Rightarrow \alpha - \beta = 16^0.$$

Vježba 055

Kolika je razlika mjera kutova α i β sa slike?



Rezultat: 100 °.

Zadatak 056 (Mile, srednja škola)

Opseg pravokutnika je 20 cm. Za koliko kvadratnih centimetara će se povećati njegova površina ako se obje stranice produlje za 2 cm?

Rješenje 056

Ponovimo!

Za pravokutnik duljina stranica a i b vrijede formule:

- opseg $O = 2 \cdot (a + b)$
- površina $P = a \cdot b$.

Površina pravokutnika je

$$P = a \cdot b.$$

Budući da mu se obje stranice produlje za 2 cm, površina novog pravokutnika bit će:

$$P_1 = (a+2) \cdot (b+2) \Rightarrow P_1 = a \cdot b + 2 \cdot a + 2 \cdot b + 4 \Rightarrow P_1 = a \cdot b + 2 \cdot (a+b) + 4 \Rightarrow P_1 = a \cdot b + O + 4.$$

Povećanje površine iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}P = a \cdot b \\ P_1 = a \cdot b + O + 4\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow P_1 - P = a \cdot b + O + 4 - a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P_1 - P = a \cdot b + O + 4 - a \cdot b \;\Rightarrow\; P_1 - P = O + 4 \;\Rightarrow\; P_1 - P = 20 + 4 \;\Rightarrow\; P_1 - P = 24.$$

Površina pravokutnika povećat će se za 24 cm^2.

Vježba 056

Opseg pravokutnika je 40 cm. Za koliko kvadratnih centimetara će se povećati njegova površina ako se obje stranice produlje za 2 cm?

Rezultat: 44 cm^2.

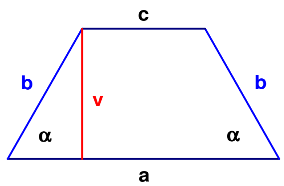
Zadatak 057 (Nevenka, srednja škola)

Jednakokračan trapez ima osnovice 9 cm i 6 cm, a krakovi s duljom osnovicom zatvaraju kut od 50°. Izračunaj površinu trapeza?

Rješenje 057

Ponovimo!

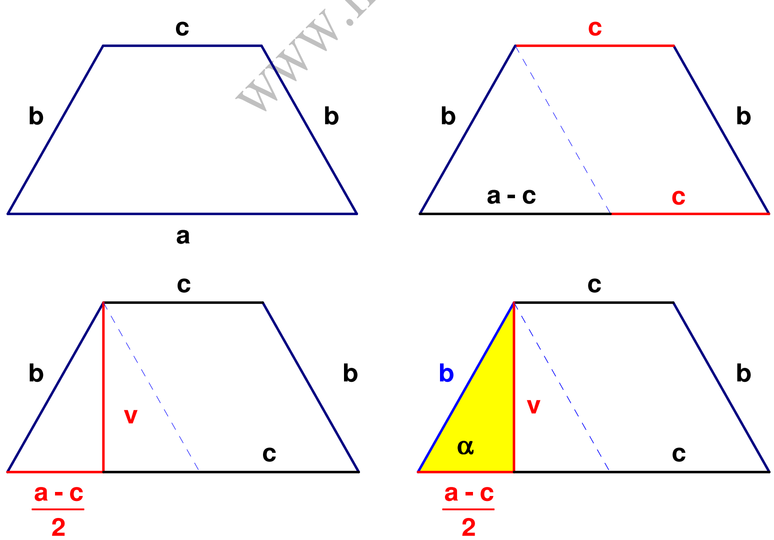
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje je v visina trapeza. Trapez je jednakokračan ako su mu kraci jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni.



Računamo:

$$\frac{a-c}{2} = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 = 1.5 \; cm.$$

Uočimo pravokutan trokut čije su katete visina trapeza v i $\frac{a-c}{2}$, a hipotenuza je krak b.

Pomoću funkcije tangens izračuna se duljina visine v.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 50^0 \ , \ \dfrac{a-c}{2} = 1.5 \\ tg\,\alpha = \dfrac{v}{\frac{a-c}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,50^0 = \frac{v}{1.5} \Rightarrow tg\,50^0 = \frac{v}{1.5} \ / \cdot 1.5 \Rightarrow v = 1.5 \cdot tg\,50^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 1.79 \Rightarrow v = 1.79 \ cm.$$

Površina trapeza iznosi:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v \Rightarrow P = \frac{9+6}{2} \cdot 1.79 \Rightarrow P = 13.43 \Rightarrow P = 13.43 \ cm^2.$$

Vježba 057

Jednakokračan trapez ima osnovice 9 dm i 6 dm, a krakovi s duljom osnovicom zatvaraju kut od 50°. Izračunaj površinu trapeza?

Rezultat: 13.43 dm^2.

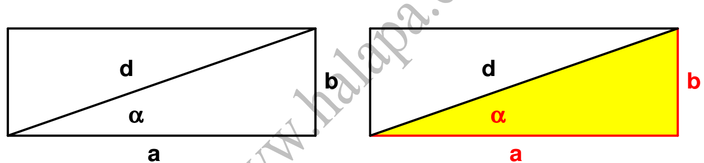
Zadatak 058 (Katarina, srednja škola)

U pravokutniku sa stranicama 6 cm i 2 cm izračunaj kut između dijagonale i duže stranice.

Rješenje 058

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne. Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut.
Dijagonala pravokutnika je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha pravokutnika.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Uočimo pravokutan trokut čije su katete a i b, a hipotenuza d. Pomoću funkcije tangens izračuna se traženi kut α.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \ , \ b = 2 \\ tg\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{2}{6} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 18^0\,26'6''.$$

Vježba 058

U pravokutniku sa stranicama 12 cm i 4 cm izračunaj kut između dijagonale i duže stranice.

Rezultat: 18° 26' 6''.

Zadatak 059 (Marko, srednja škola)

Ploština trapeza jednaka je 315 cm^2, duljina visine iznosi 15 cm, a razlika duljina osnovica trapeza je 18 cm. Kolike su duljine osnovica trapeza?

Rješenje 059

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza.
Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje su a i c duljine osnovica, v visina trapeza.

Uporabom formule za ploštinu trapeza i zadanog uvjeta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a+c}{2}\cdot v \\ P=315\ ,\ v=15 \\ a-c=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 315=\dfrac{a+c}{2}\cdot 15 \\ a-c=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 315=\dfrac{a+c}{2}\cdot 15\ /\cdot\dfrac{2}{15} \\ a-c=18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=42 \\ a-c=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot a=60 \Rightarrow 2\cdot a=60\ /:2 \Rightarrow a=30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=30 \\ a+c=42 \end{array}\right\} \Rightarrow 30+c=42 \Rightarrow c=42-30 \Rightarrow c=12.$$

Duljine osnovica su: a = 30 cm, c = 12 cm.

Vježba 059

Ploština trapeza jednaka je 36 cm^2, duljina visine iznosi 4 cm, a razlika duljina osnovica trapeza je 2 cm. Kolike su duljine osnovica trapeza?

Rezultat: a = 10 cm, c = 8 cm.

Zadatak 060 (Ana, gimnazija)

Kružnici je opisan jednakokračni trapez i upisan pravokutni jednakokračni trokut. Koliki je omjer duljine kraka trapeza i duljine hipotenuze trokuta ako je omjer njihovih površina 8?

Rješenje 060

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice paralelne. Paralelne stranice zovu se osnovice trapeza, a druge dvije stranice zovu se kraci trapeza. Udaljenost paralelnih stranica je visina trapeza. Ako trapez ima oba kraka jednaka, zove se jednakokračan trapez.

Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut.

Ako je četverokut tangencijalan, tada je zbroj duljina suprotnih stranica međusobno jednak.

Svaki kut s vrhom na kružnici čiji kraci sijeku kružnicu zovemo obodni kut.

Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi (90º).

Ploština trokuta izračunava se po formuli:

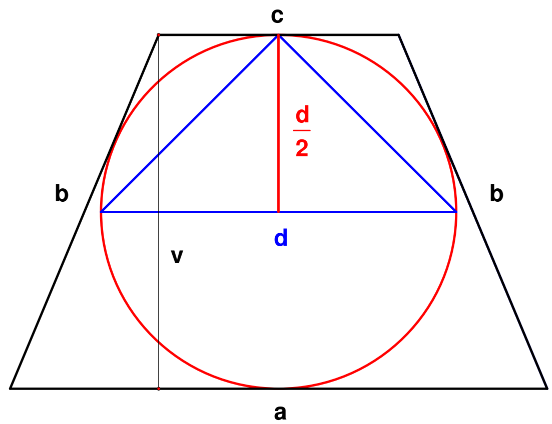
$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici

Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v,$$

gdje su a i c duljine osnovica, v visina trapeza.



Sa slike vidi se da je visina trapeza jednaka promjeru kružnice.

$$v = d.$$

Za tangencijalni trapez vrijedi

$$a + c = b + b \Rightarrow a + c = 2 \cdot b$$

pa njegova površina iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 2 \cdot b \\ v = d \\ P = \frac{a+c}{2} \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow P_1 = \frac{2 \cdot b}{2} \cdot d \Rightarrow P_1 = \frac{2 \cdot b}{2} \cdot d \Rightarrow P_1 = b \cdot d.$$

Budući da je osnovica pravokutnog trokuta jednaka promjeru kružnice, visina trokuta jednaka je njezinom polumjeru. Površina trokuta iznosi:

$$P_2 = \frac{d \cdot \frac{d}{2}}{2} \Rightarrow P_2 = \frac{d^2}{4}.$$

Računamo omjer površina.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b \cdot d}{\frac{d^2}{4}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{b \cdot d}{1}}{\frac{d^2}{4}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{4 \cdot b \cdot d}{d^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{4 \cdot b \cdot d}{d^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{4 \cdot b}{d}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{P_2} = \frac{4 \cdot b}{d} \\ \frac{P_1}{P_2} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{4 \cdot b}{d} = 8 \Rightarrow \frac{4 \cdot b}{d} = 8 \;/ : 4 \Rightarrow \frac{b}{d} = 2.$$

Vježba 060

Kružnici je opisan jednakokračni trapez i upisan pravokutni jednakokračni trokut. Koliki je omjer duljine kraka trapeza i duljine hipotenuze trokuta ako je omjer njihovih površina 16?

Rezultat: b : d = 4.