Zadatak 001 (Ivan, tehnička škola)

Odredi kutove tetivnog četverokuta ako se odnose kao 1 : 3 : 8 : 6.

Rješenje 001

1.inačica

Iz danog proširenog razmjera vidimo da je

$$\alpha = k, \beta = 3k, \gamma = 8k, \delta = 6k.$$

Zbroj kutova u četverokutu je 360°:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° \quad \Rightarrow \quad k + 3k + 8k + 6k = 360° \quad \Rightarrow \quad 18k = 360° \quad / : 18 \quad \Rightarrow \quad k = 20°.$$

$$\alpha = 20°, \beta = 3 \cdot 20° = 60°, \gamma = 8 \cdot 20° = 160°, \delta = 6 \cdot 20° = 120°.$$

2.inačica

Iz danog proširenog razmjera slijedi da je

$$\alpha = k, \beta = 3k, \gamma = 8k, \delta = 6k.$$

Četverokut je tetivni ako i samo ako je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180°:

$$\alpha + \gamma = 180° \quad , \quad \beta + \delta = 180°.$$

Iz $\alpha + \gamma = 180°$ slijedi:

$$k + 8k = 180° \quad \Rightarrow \quad 9k = 180° \quad / : 9 \quad \Rightarrow \quad k = 20°.$$

$$\alpha = 20°, \beta = 3 \cdot 20° = 60°, \gamma = 8 \cdot 20° = 160°, \delta = 6 \cdot 20° = 120°.$$

Vježba 001

Odredi kutove tetivnog četverokuta ako se odnose kao 3 : 2 : 6 : 7.

Rezultat: $\alpha = 60°, \beta = 40°, \gamma = 120°, \delta = 140°.$

Zadatak 002 (Ana, gimnazija)

Ako se jedna stranica pravokutnika produlji za 50%, a druga smanji za 50%, za koliko će se promijeniti površina pravokutnika?

Rješenje 002

Neka su a i b stranice prvog pravokutnika. Tada stranice novonastalog pravokutnika iznose:

$$a' = a + 0.50a = 1.5a,$$

$$b' = b - 0.50b = 0.5b.$$

Omjer nove i stare površine je:

$$\frac{P'}{P} = \frac{a' \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{1.5a \cdot 0.5b}{a \cdot b} = 0.75 = 75\%.$$

Površina će se smanjiti 25%.

Vježba 002

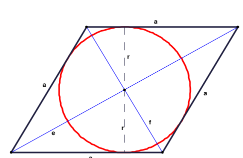
Ako se jedna stranica pravokutnika produlji za 20%, a druga smanji za 20%, za koliko će se promijeniti površina pravokutnika?

Rezultat: Smanjit će se za 4%.

Zadatak 003 (Katarina, gimnazija)

U romb je upisana kružnica polumjera r. Ako je stranica romba šest puta manja od zbroja dijagonala, odredite tu stranicu.

Rješenje 003



Za romb vrijede sljedeće relacije:

$$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2, \tag{1}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f. \tag{2}$$

U romb je upisana kružnica polumjera r pa se površina romba može i ovako izračunati:

$$P = a \cdot 2r. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot e \cdot f = a \cdot 2r \ / \cdot 2$$

$$e \cdot f = 4 \cdot a \cdot r. \tag{4}$$

Budući da je stranica romba šest puta manja od zbroja dijagonala, napisat ćemo:

$$e + f = 6 \cdot a.$$

Kvadriramo jednakost:

$$e^2 + 2ef + f^2 = 36a^2.$$

Uporabimo (1):

$$4a^2 + 2ef = 36a^2.$$

Zbog (4) slijedi:

$$4a^2 + 2 \cdot 4ar = 36a^2 \quad => \quad 4a^2 + 8ar = 36a^2 \quad => \quad 8ar = 36a^2 - 4a^2 \quad => \quad 8ar = 32a^2 \ / : 8a \quad =>$$

$$=> \quad r = 4a \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{4} \cdot r.$$

Vježba 003

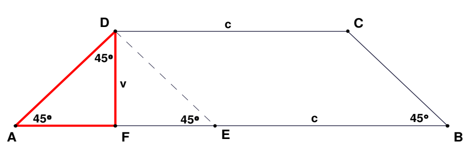
U romb je upisana kružnica polumjera r. Ako je stranica romba četiri puta manja od zbroja dijagonala, odredite tu stranicu.

Rezultat: $a = \frac{2}{3} \cdot r.$

Zadatak 004 (Ines, gimnazija)

Kut pri osnovici jednakokračnog trapeza iznosi 45°. Ako je duljina gornje osnovice 12, a visina trapeza 3, kolika je duljina osnovice?

Rješenje 004



$$c = |DC| = 12, \quad \alpha = 45°, \quad v = |DF| = 3.$$

Trokut AFD je jednakokračan pravokutan trokut pa je $|AF| = v = 3$. Tada je

$$|AE| = 2 \cdot |AF| = 2 \cdot 3 = 6.$$

Duljina osnovice iznosi:

$$a = |AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |DC| = 6 + 12 = 18.$$

Vježba 004

Kut pri osnovici jednakokračnog trapeza iznosi 45°. Ako je duljina gornje osnovice 10, a visina trapeza 4, kolika je duljina osnovice?

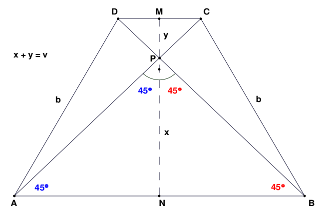
Rezultat: 18.

Zadatak 005 (Ines, gimnazija)

Osnovice jednakokračnog trapeza su 20 i 12. Ako se dijagonale sijeku pod pravim kutom, izračunajte površinu!

Rješenje 005

a = $|AB|$ = 20, c = $|CD|$ = 12



U jednakokračnom pravokutnom trokutu visina osnovice jednaka je polovini osnovice.

Zato je u trokutu ABP:

$$x = |PN| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = |NB| = 10.$$

Analogno za trokut DPC vrijedi:

$$y = |MP| = \frac{1}{2} \cdot |DC| = |MC| = 6.$$

Tada je visina v = x + y = 10 + 6 = 16 pa je površina trapeza:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{20+12}{2} \cdot 16 = 32 \cdot 8 = 256.$$

Vježba 005

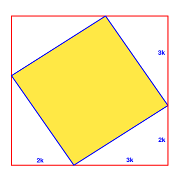
Osnovice jednakokračnog trapeza su 40 i 24. Ako se dijagonale sijeku pod pravim kutom, izračunajte površinu!

Rezultat: 1024.

Zadatak 006 (Den, tehnička škola)

U kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat čiji vrhovi dijele stranice polaznog kvadrata u omjeru 2 : 3. Nađi površinu upisanog kvadrata.

Rješenje 006



Odredimo koeficijent k:

$$2k + 3k = a \Rightarrow 5k = a \Rightarrow k = \frac{a}{5}.$$

Površina upisanog kvadrata jednaka je površini velikog kvadrata umanjenog za površine četiri pravokutna trokuta:

$$P = a^2 - 4 \cdot \frac{2k \cdot 3k}{2} = a^2 - 12k^2 = a^2 - 12 \cdot \left(\frac{a}{5}\right)^2 = a^2 - 12 \cdot \frac{a^2}{25} = \frac{13}{25} \cdot a^2.$$

Vježba 006

U kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat čiji vrhovi dijele stranice polaznog kvadrata u omjeru 1 : 4. Nađi površinu upisanog kvadrata.

Rezultat: $\frac{13}{25} \cdot a^2.$

Zadatak 007 (Ines, gimnazija)

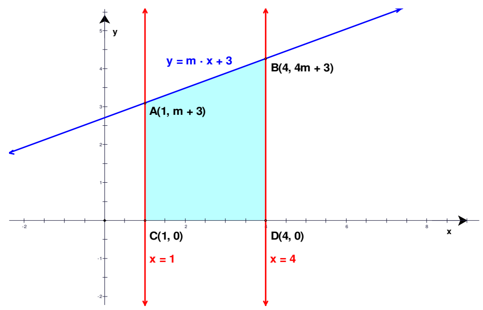
Površina konveksnog četverokuta što ga određuju pravci y = mx + 3, x = 1, x = 4 i os apscisa jednak je 14. Nađi m.

Rješenje 007

Odredimo presjek pravca y = mx + 3 s pravcima x = 1 i x = 4:

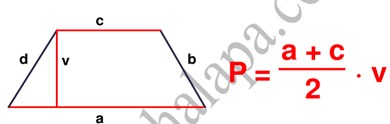
$$\left.\begin{array}{l} y = mx+3 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; y = m\cdot 1+3 = m+3 \;\;,\;\; A(1,\; m+3),$$

$$\left.\begin{array}{l} y = mx+3 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \; y = m\cdot 4+3 = 4m+3 \;\;,\;\; B(4,\; 4m+3).$$



Uočimo trapez ACDB s donjom bazom │BD│ = 4m + 3, gornjom bazom │AC│ = m + 3 i visinom │CD│ = 3.

Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



Sada je:

$$P = \frac{|BD|+|AC|}{2}\cdot |CD| \;\Rightarrow\; 14 = \frac{4m+3+m+3}{2}\cdot 3 \;\Rightarrow\; 14 = \frac{5m+6}{2}\cdot 3 \;\Rightarrow\; 14 = \frac{15m+18}{2} \;\; /\cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 15m+18 = 28 \;\Rightarrow\; 15m = 10 \;\Rightarrow\; m = \frac{2}{3}.$$

Vježba 007

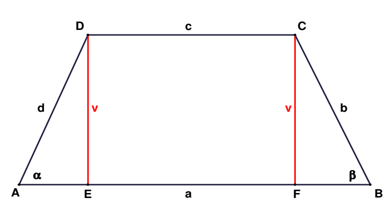
Površina konveksnog četverokuta što ga određuju pravci y = mx + 3, x = 1, x = 4 i os apscisa jednak je 9. Nađi m.

Rezultat: m = 0.

Zadatak 008 (Ana, Ivana, Sandra, Nina, gimnazija)

Visina trapeza je 12, a omjer donje i gornje osnovice (baze) iznosi 8 : 3. Tangensi kutova uz donju bazu su: $tg\,\alpha = \frac{4}{3}$ i $tg\,\beta = \frac{3}{4}$. Izračunajte a, b, c i d.

Rješenje 008



Sa slike vidi se:

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|, \quad v = |DE| = |CF| = 12,$$
$$|EF| = |DC|.$$

Uočimo pravokutan trokut AED. Tada je

$$tg\,\alpha = \frac{|DE|}{|AE|} \Rightarrow |AE| = \frac{|DE|}{tg\,\alpha} = \frac{v}{tg\,\alpha} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = \frac{36}{4} = 9.$$

Pomoću Pitagorinog poučka izračunamo d:

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2 \Rightarrow d^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow d^2 = 225 \Rightarrow d = \sqrt{225} = 15.$$

Na sličan način iz pravokutnog trokuta CFB nađemo $|FB|$ i b:

$$tg\,\beta = \frac{|CF|}{|FB|} \Rightarrow |FB| = \frac{|CF|}{tg\,\beta} = \frac{v}{tg\,\beta} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = \frac{48}{3} = 16.$$

Uporabom Pitagorinog poučka odredimo b:

$$|BC|^2 = |CF|^2 + |FB|^2 \Rightarrow b^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow b^2 = 400 \Rightarrow b = \sqrt{400} = 20.$$

Iz omjera

$$a : c = 8 : 3$$

slijedi

$$3 \cdot a = 8 \cdot c \Rightarrow a = \frac{8}{3} \cdot c.$$

Duljina donje osnovice može se ovako izraziti:

$$|AB| = |AE| + |EF| + |FB| \Rightarrow a = |AE| + |CD| + |FB| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{8}{3}c = 9 + c + 16 \Rightarrow \frac{8}{3}c = 25 + c \;/\cdot 3 \Rightarrow 8c = 75 + 3c \Rightarrow 5c = 75 \;/:5 \Rightarrow c = 15.$$

Duljina donje baze je:

$$a = \frac{8}{3} \cdot c = \frac{8}{3} \cdot 15 = 40.$$

Vježba 008

Visina trapeza je 12, a omjer donje i gornje osnovice (baze) iznosi 16 : 6. Tangensi kutova uz donju bazu su: $tg\,\alpha = \frac{4}{3}$ i $tg\,\beta = \frac{3}{4}$. Izračunajte a, b, c i d.

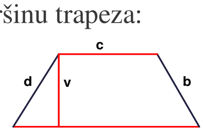
Rezultat: a = 40, b = 20, c = 15, d = 15.

Zadatak 009 (Ivana, Ivana, Dijana, Marina, Zoran, hotelijerska škola)

Zadane su duljine stranica trapeza: a = 8 cm, b = 10 cm, c = 2 cm, d = 8 cm. Izračunajte površinu trapeza.

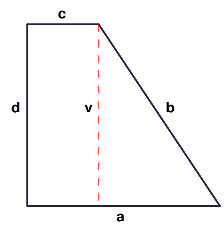
Rješenje 009

Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

Nacrtamo zadani trapez i sa slike uočimo da je v = d jer je krak d okomit na osnovicu a.



Površina trapeza iznosi:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot d = \frac{8\ cm + 2\ cm}{2} \cdot 8\ cm = 40\ cm^2.$$

Vježba 009

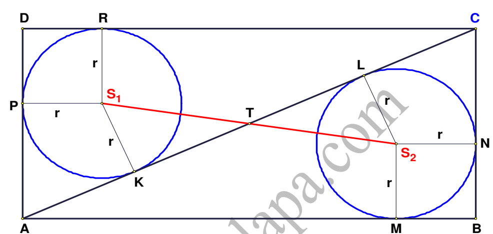
Zadane su duljine stranica trapeza: a = 9 cm, b = 10 cm, c = 3 cm, d = 8 cm. Izračunajte površinu trapeza.

Rezultat: $48\ cm^2$.

Zadatak 010 (Marko, gimnazija)

Pravokutnik ABCD čije stranice imaju duljine 8 i 6, podijeljen je dijagonalom na trokute ΔABC i ΔCDA. Kolika je udaljenost između središta kružnica upisanih u te trokute?

Rješenje 010

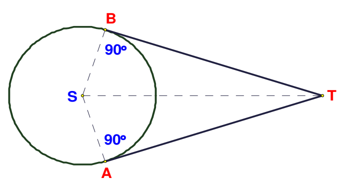


$$|AB| = |CD| = 8, \quad |AD| = |BC| = 6$$

Iz pravokutnog trokuta ABC dobije se:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

Za točku izvan kružnice vrijedi:



$$|TA| = |TB|$$

Sa slike vidi se:

$$|BM| = |BN| = r,$$

$$|AL| = |AM| = |AB| - |BM| = 8 - r,$$

$$|CL| = |CN| = |CB| - |BN| = 6 - r.$$

Budući da je

$$|AC| = |AL| + |CL|,$$

slijedi

$$10 = 8 - r + 6 - r \quad => \quad 2r = 4 \quad => \quad r = 2.$$

Polumjer kružnica je r = 2.

Trokuti ΔKTS_1 i ΔLTS_2 su podudarni (sukladni) jer se podudaraju u jednoj stranici i njoj priležećim kutovima. Zato je

$$|KT| = |TL|,\ |TS_1| = |TS_2|.$$

Duljine $|AK|$ i $|CL|$ odredimo iz jednakosti:

$$|AK| = |AP| = |AD| - |PD| = 6 - r = 6 - 2 = 4,$$
$$|CL| = |CN| = 6 - r = 6 - 2 = 4.$$

Sada je

$$|KT| = \frac{1}{2} \cdot |KL| = \frac{1}{2} \cdot \left(|AC| - |AK| - |CL| \right) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 4 - 4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Iz pravokutnog trokuta KTS_1 proizlazi:

$$|TS_1| = \sqrt{|KS_1|^2 + |KT|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Konačno je:

$$|S_1 S_2| = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Vježba 010

Pravokutnik ABCD čije stranice imaju duljine 8 i 6, podijeljen je dijagonalom na trokute ΔABC i ΔCDA. Koliki je zbroj površina kružnica upisanih u te trokute?

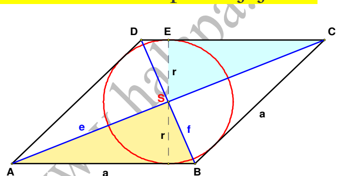
Rezultat: 8π.

Zadatak 011 (Marko, gimnazija)

Dijagonale romba imaju duljine 30 cm i 40 cm. Dirališna točka romba upisane kružnice dijeli stranicu romba na dva odsječka. Koliko iznosi duljina većeg odsječka?

Rješenje 011

Dijagonale romba su međusobno okomite i raspolavljaju se.



$$e = |AC| = 40,\ f = |BD| = 30,\ |AS| = |SC| = 20,\ |BS| = |SD| = 15.$$

Duljinu stranice romba nađemo, na primjer, iz pravokutnog trokuta ABS pomoću Pitagorinog poučka:

$$a^2 = |AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \left(\frac{40}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow a = 25.$$

Iz formula za površinu romba dobije se visina romba:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{e \cdot f}{2} \\ P &= a \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow v = \frac{e \cdot f}{2 \cdot a} = \frac{40 \cdot 30}{2 \cdot 25} = 24.$$

Budući da je promjer upisane kružnice jednak visini romba slijedi:

$$2 \cdot r = v \Rightarrow r = \frac{v}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Duljinu većeg odsječka $|EC|$ dobijemo iz pravokutnog trokuta SCE pomoću Pitagorinog poučka:

$$|EC| = \sqrt{|SC|^2 - |SE|^2} = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - r^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

Vježba 011

Dijagonale romba imaju duljine 30 cm i 40 cm. Dirališna točka romba upisane kružnice dijeli stranicu romba na dva odsječka. Koliko iznosi duljina manjeg odsječka?

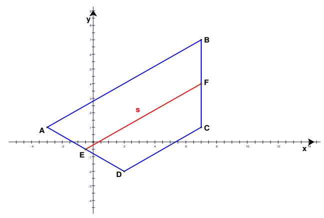
Rezultat: 9.

Zadatak 012 (Petra, gimnazija)

Točke A(– 3, 1), B(7, 7), C(7, 1), D(2, – 2) vrhovi su trapeza. Kolika je duljina srednjice?

Rješenje 012

1. inačica



Srednjica $\overline{EF}$ je dužina koja spaja polovišta krakova trapeza. Njezina duljina jednaka je poluzbroju duljina donje i gornje baze trapeza:

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}.$$

Duljina srednjice iznosi:

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{\sqrt{(7+3)^2 + (7-1)^2} + \sqrt{(2-7)^2 + (-2-1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{100+36} + \sqrt{25+9}}{2} = \frac{\sqrt{136} + \sqrt{34}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 34} + \sqrt{34}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{34} + \sqrt{34}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{34}.$$

2. inačica

Nađemo polovište E dužine $\overline{AD}$:

$$E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = E\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Nađemo polovište F dužine $\overline{BC}$:

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = F\left(\frac{7+7}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = F(7, 4).$$

Duljina srednjice je:

$$|EF| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(7 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{306}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 34}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{34}.$$

Vježba 012

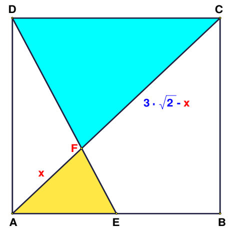
Točke A(– 3, 1), B(7, 7), C(7, 1), D(2, – 2) vrhovi su trapeza. Kolika je duljina donje baze?

Rezultat: $2 \cdot \sqrt{34}.$

Zadatak 013 (Slavica, gimnazija)

Točka E je polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata ABCD. Dužinu $\overline{DE}$ dijagonala $\overline{AC}$ siječe u točki F. Ako je duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka 3, kolika je duljina dužine $\overline{AF}$?

Rješenje 013



Iz slike se vidi:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 3 \;,\; |AE| = \frac{3}{2} \;,\; |AC| = 3 \cdot \sqrt{2} \;,\; |AF| = x \;,\; |FC| = 3 \cdot \sqrt{2} - x$$

Budući da su trokuti ΔAEF i ΔDFC slični (imaju iste kutove), slijedi razmjer:

$$|AF| : |AE| = |FC| : |DC| \;\Rightarrow\; x : \frac{3}{2} = \left(3 \cdot \sqrt{2} - x\right) : 3 \;\Rightarrow\; 3x = \frac{3}{2} \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2} - x\right) \;/ \cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6x = 9 \cdot \sqrt{2} - 3x \;\Rightarrow\; 9x = 9 \cdot \sqrt{2} \;/ : 9 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}.$$

Vježba 013

Točka E je polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata ABCD. Dužinu $\overline{DE}$ dijagonala $\overline{AC}$ siječe u točki F. Ako je duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka 3, kolika je duljina dužine $\overline{FC}$?

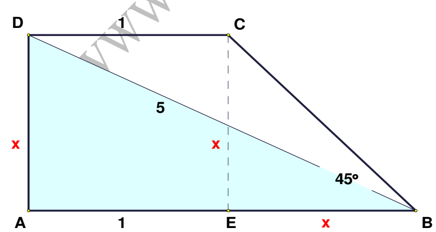
Rezultat: $2 \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 014 (Ines, hotelijerska škola)

Zadan je trapez ABCD sa pravim kutom kod vrhova A i D. Kut kod vrha B je 45°. Ako je duljina stranice │CD│ = 1 cm, a duljina dijagonale │BD│ = 5 cm, kolika je površina trapeza?

Rješenje 014

1. inačica



Iz slike se vidi:

│BD│ = 5, │AE│ = │DC│ = 1, │EB│ = │EC│ = │AD│ = x (pravokutan trokut CEB je jednakokračan).

Uočimo pravokutan trokut DAB:

│DA│ = x, │AB│ = │AE│ + │EB│ = 1 + x, │BD│ = 5.

Uporabit ćemo Pitagorin poučak:

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 \;\Rightarrow\; 5^2 = x^2 + (1+x)^2 \;\Rightarrow\; 25 = x^2 + 1 + 2x + x^2 \;\Rightarrow$$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$ **/ : 2** => $x^2 + x - 12 = 0$ => [Vièteove formule] => $x_1 = -4$ (nema smisla), $x_2 = 3$.

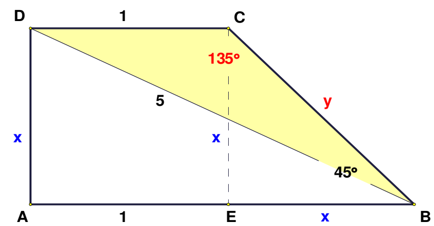
Sada je:

│DA│ = 3 cm, │AB│ = 4 cm

pa površina trapeza ABCD iznosi:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DA| = \frac{4+1}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7.5\ cm^2.$$

2. inačica



Iz slike se vidi:

$$\sphericalangle DCB = 135^0,\ |BC| = y,\ |DC| = 1,\ |EB| = |EC| = x.$$

Uočimo trokut DBC i uporabimo kosinusov poučak:

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 135^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^2 = y^2 + 1 - 2 \cdot y \cdot 1 \cdot \cos 135^0 \Rightarrow \left[\cos\left(180^0 - \alpha\right) = \cos \alpha\right] \Rightarrow 25 = y^2 + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + \sqrt{2} \cdot y - 24 = 0 \quad y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 96}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{98}}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{49 \cdot 2}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 7 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -4 \cdot \sqrt{2} \text{ (nema smisla)},\ y_2 = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Iz jednakokračnog pravokutnog trokuta CEB slijedi:

$$y = x \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{2} = x \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x = 3.$$

Sada je:

$$|DA| = 3 \text{ cm},\ |AB| = 4 \text{ cm}$$

pa površina trapeza ABCD iznosi:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DA| = \frac{4 + 1}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7.5\ cm^2.$$

Vježba 014

Zadan je trapez ABCD sa pravim kutom kod vrhova A i D. Kut kod vrha B je 45°. Ako je duljina stranice $|CD| = 1$ cm, a duljina dijagonale $|BD| = 5$ cm, koliki je opseg trapeza?

Rezultat: $8 + 3 \cdot \sqrt{2}.$

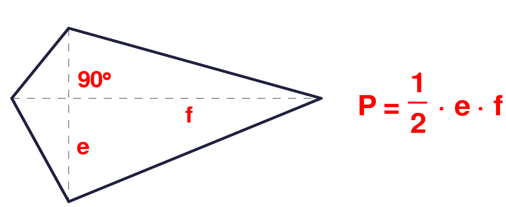
Zadatak 015 (Ines, hotelijerska škola)

U jednakokračnom trapezu s duljinama osnovica a i c dijagonale se sijeku pod pravim kutom. Kolika je površina trapeza?

Rješenje 015

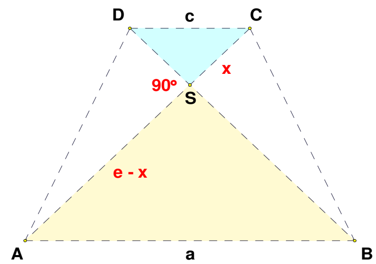
Ponovimo!

Četverokut s okomitim dijagonalama



Ako trapez ima oba kraka jednaka zove se jednakokračan trapez. Dijagonale jednakokračnog trapeza su jednake pa formula za površinu glasi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot e^{2}.$$



Iz slike se vidi:

$$|AB| = a,\ |CD| = c,\ |AC| = |BD| = e,\ |AS| = e - x,\ |SC| = x.$$

Trokut DSC je pravokutan jednakokračan pa vrijedi:

$$c=x\cdot\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{c}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Budući da su trokuti ΔABS i ΔDSC slični, vrijedi razmjer:

$$|AB|:|DC|=|AS|:|SC|\ \Rightarrow\ a:c=(e-x):x\ \Rightarrow\ a\cdot x=c\cdot e-c\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\cdot(a+c)=c\cdot e\ \Rightarrow\ [\text{zbog (1)}]\ \Rightarrow\ \frac{c}{\sqrt{2}}\cdot(a+c)=c\cdot e\ /:c\ \Rightarrow\ e=\frac{a+c}{\sqrt{2}}.$$

Površina trapeza iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot e^{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+c}{\sqrt{2}}\right)^{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+c)^{2}}{2}=\frac{1}{4}\cdot(a+c)^{2}.$$

Vježba 015

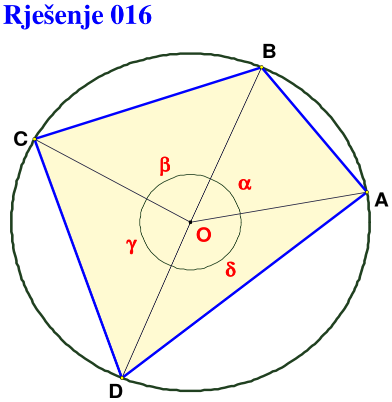
U jednakokračnom trapezu s duljinama osnovica 5 i 3 dijagonale se sijeku pod pravim kutom. Kolika je površina trapeza?

Rezultat: 16.

Zadatak 016 (Ivana, hotelijerska škola)

Kružnica je točkama A, B, C, D podijeljena u omjeru 1 : 3 : 4 : 7, a polumjer kružnice iznosi 8. Kolika je površina četverokuta ABCD?

Rješenje 016



$$r=|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=8$$

$$l_{AB}:l_{BC}:l_{CD}:l_{DA}=1:3:4:7\ \Rightarrow\ \begin{cases} l_{AB}=t\ ,\ l_{BC}=3t \\ l_{CD}=4t\ ,\ l_{DA}=7t \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} O=2\cdot r\cdot\pi \\ O=l_{AB}+l_{BC}+l_{CD}+l_{DA} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{cases} O=16\pi \\ O=15t \end{cases}\ \Rightarrow\ 15t=16\pi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{16\pi}{15}.$$

Iz duljina lukova računamo pripadne središnje kutove:

$$l_{AB}=t\ \Rightarrow\ l_{AB}=\frac{16\pi}{15}\ \Rightarrow\ l_{AB}=\frac{r\cdot\pi\cdot\alpha}{180^{0}}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{180^{0}\cdot l_{AB}}{r\cdot\pi}=\frac{180^{0}\cdot\frac{16\pi}{15}}{8\cdot\pi}=24^{0}.$$

$$l_{BC} = 3t \Rightarrow l_{BC} = \frac{16\pi}{5} \Rightarrow l_{BC} = \frac{r \cdot \pi \cdot \beta}{180^0} \Rightarrow \beta = \frac{180^0 \cdot l_{BC}}{r \cdot \pi} = \frac{180^0 \cdot \frac{16\pi}{5}}{8 \cdot \pi} = 72^0.$$

$$l_{CD} = 4t \Rightarrow l_{CD} = \frac{64\pi}{5} \Rightarrow l_{CD} = \frac{r \cdot \pi \cdot \gamma}{180^0} \Rightarrow \gamma = \frac{180^0 \cdot l_{CD}}{r \cdot \pi} = \frac{180^0 \cdot \frac{64\pi}{15}}{8 \cdot \pi} = 96^0.$$

$$l_{DA} = 7t \Rightarrow l_{DA} = \frac{112\pi}{15} \Rightarrow l_{DA} = \frac{r \cdot \pi \cdot \delta}{180^0} \Rightarrow \delta = \frac{180^0 \cdot l_{DA}}{r \cdot \pi} = \frac{180^0 \cdot \frac{112\pi}{15}}{8 \cdot \pi} = 168^0.$$

Površina četverokuta ABCD iznosi:

$$P_{ABCD} = P_{OAB} + P_{OBC} + P_{OCD} + P_{ODA} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\beta + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\gamma + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\delta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta) = \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot \left(\sin 24^0 + \sin 72^0 + \sin 96^0 + \sin 168^0\right) =$$

$$= 32 \cdot \left(\sin 24^0 + \sin 72^0 + \sin 96^0 + \sin 168^0\right) = 81.93.$$

Vježba 016

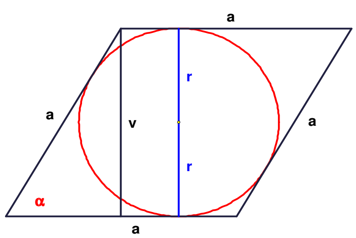
Kružnica je točkama A, B, C, D podijeljena u omjeru 3 : 4 : 1 : 7, a polumjer kružnice iznosi 8. Kolika je površina četverokuta ABCD?

Rezultat: 81.93.

Zadatak 017 (Ante, tehnička škola)

Polumjer kružnice upisane u romb je 3 cm. Opseg romba je 40 cm. Koliki je šiljasti kut?

Rješenje 017



Sa slike vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} O = 4 \cdot a \\ v = 2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a = 40 \\ v = 2 \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 10 \\ v = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{v}{a} = \arcsin\frac{6}{10} = \arcsin 0.6 = 36^0 52' 12''.$$

Vježba 017

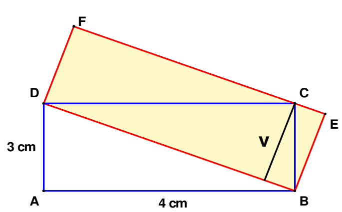
Polumjer kružnice upisane u romb je 3 cm. Opseg romba je 40 cm. Koliki je tupi kut?

Rezultat: $143^0 7' 48''$.

Zadatak 018 (Mario, tehnička škola)

Na slici su prikazana dva pravokutnika: ABCD i DBEF. Kolika je površina pravokutnika DBEF?

Rješenje 018



$$|DA| = 3, \ |AB| = 4$$

Duljinu dijagonale $\overline{BD}$ pravokutnika ABCD nađemo uporabom Pitagorina poučka:

$$|BD|^2 = |DA|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |BD| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Pravokutni trokuti ABD i DBC podudarni su pa vrijedi:

$$P_{DBC} = P_{ABD} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Budući da je v = | BE |, dobije se:

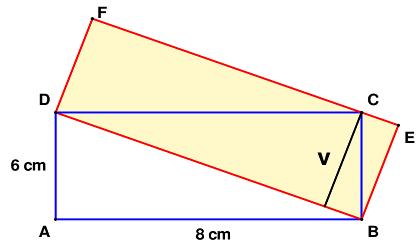
$$P_{DBC}=\frac{|DB|\cdot v}{2}\Rightarrow v=\frac{2\cdot P_{DBC}}{|DB|}=\frac{2\cdot 6}{5}=\frac{12}{5}=|BE|.$$

Površina pravokutnika DBEF je:

$$P_{DBEF}=|DB|\cdot|BE|=5\cdot\frac{12}{5}=12\ cm^2.$$

Vježba 018

Na slici su prikazana dva pravokutnika: ABCD i DBEF. Koliki je površina pravokutnika DBEF?

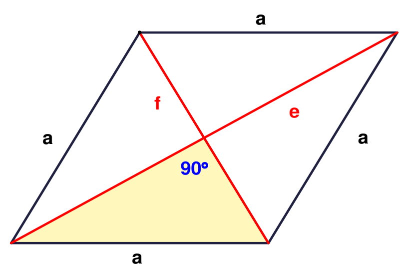


Rezultat: 48 cm^2.

Zadatak 019 (Rea, gimnazija)

U rombu stranica iznosi 13, a kraća dijagonala 10. Kolika je veća dijagonala?

Rješenje 019



Budući da se dijagonale romba raspolavljaju i međusobno su okomite, vrijedi:

$$\underbrace{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2=a^2}_{\text{Pitagorin poučak}}\Rightarrow\frac{e^2}{4}+\frac{f^2}{4}=a^2\ /\cdot 4\Rightarrow e^2+f^2=4\cdot a^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^2+f^2=4\cdot 13^2\Rightarrow 100+f^2=4\cdot 169\Rightarrow 100+f^2=676\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2=576\ /\sqrt{\ }\Rightarrow f=24.$$

Vježba 019

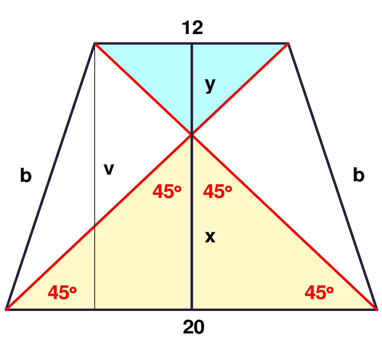
U rombu stranica iznosi 13, a veća dijagonala 24. Kolika je kraća dijagonala?

Rezultat: 10.

Zadatak 020 (4A, hotelijerska škola)

Osnovice jednakokračnog trapeza su 20 i 12. Ako se dijagonale sijeku pod pravim kutom, izračunajte površinu.

Rješenje 020



U jednakokračnom pravokutnom trokutu visina na hipotenuzu (osnovicu) jednaka je polovici duljine hipotenuze (osnovice) pa vrijedi:

$$x=\frac{1}{2}\cdot 20=10\ ,\ y=\frac{1}{2}\cdot 12=6\ ,\ v=x+y=10+6=16$$

Površina trokuta iznosi:

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v=\frac{20+12}{2}\cdot 16=16\cdot 16=256.$$

Vježba 020

Osnovice jednakokračnog trapeza su 40 i 24. Ako se dijagonale sijeku pod pravim kutom, izračunajte površinu.

Rezultat: 1024.