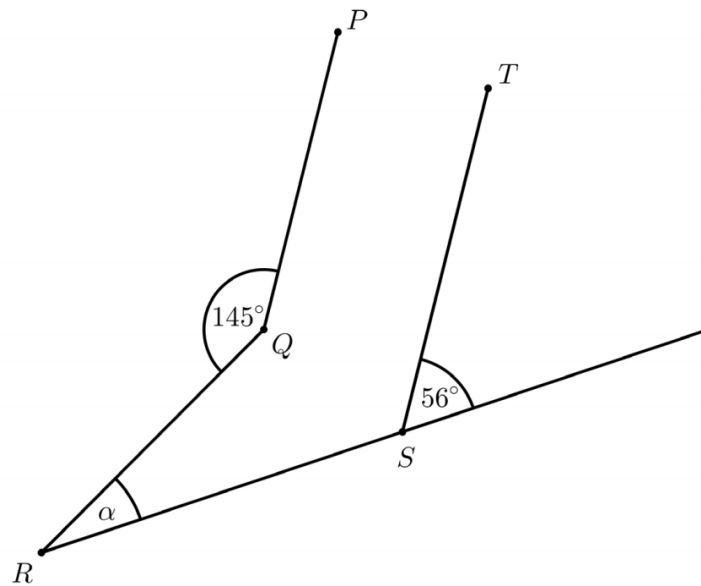


Zadatak 441 (Ines, maturantica)

Kolika je mjera kuta α prikazanoga na skici ako su dužine \overline{PQ} i \overline{ST} paralelne?



- A. 19° B. 21° C. 34° D. 56°

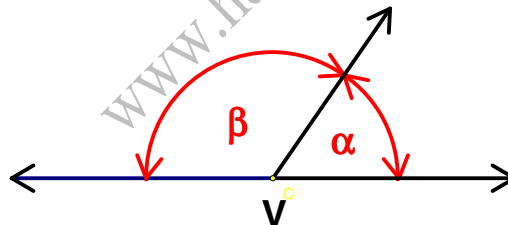
Rješenje 441

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Zbroj kutova u trokutu je 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

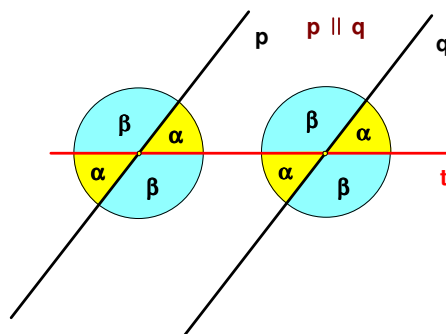
Kutovi koji imaju jedan krak zajednički, a unija drugih dvaju krakova je pravac zovu se **sukuti**.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Dva su kuta **suplementarni** kutovi ako je zbroj njihovih veličina 180° .

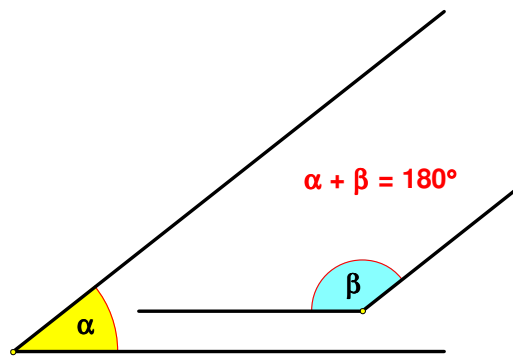
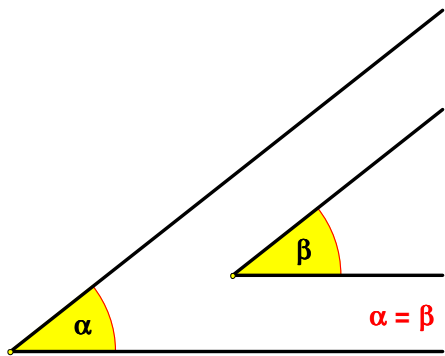
Presječnica (transverzala) para paralelnih pravaca je svaki pravac koji siječe dva međusobno paralelna pravca.



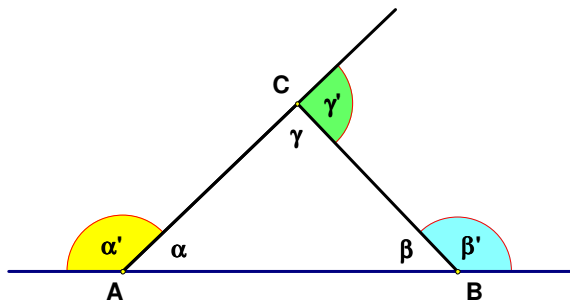
Na slici su prikazani paralelni pravci p i q te pravac t koji siječe pravce p i q. Kažemo da je pravac t presječnica para paralelnih pravaca p i q. Gledajte šiljaste i tupe kutove uz presječnicu!

Kutovi s paralelnim kracima

Kod kutova s paralelnim kracima moguća su dva slučaja.



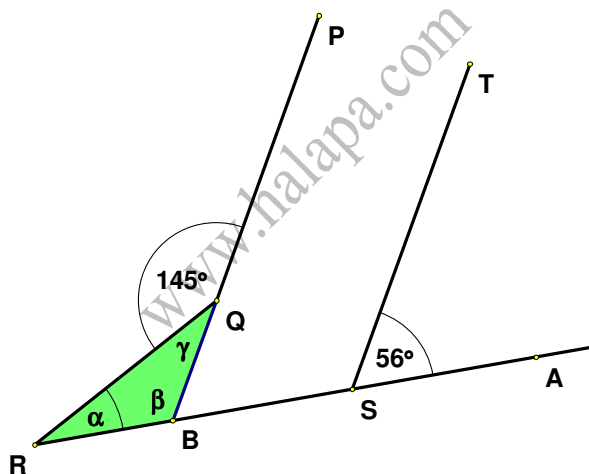
Vanjski kutovi trokuta



1.inačica

Vanjski kut trokuta (sukut unutarnjeg kuta) jednak je zbroju ostalih dvaju unutarnjih kutova.

$\alpha + \alpha' = 180^\circ$	$\alpha' = \beta + \gamma$
$\beta + \beta' = 180^\circ$	$\beta' = \alpha + \gamma$
$\gamma + \gamma' = 180^\circ$	$\gamma' = \alpha + \beta$



Neka se pravci PQ i RS sijeku u točki B, a točka A neka pripada pravcu RS. Uočimo trokut RBQ čiji su unutarnji kutovi α , β i γ . Sa slike vidi se:

$$\angle QRB = \alpha, \angle RBQ = \beta, \angle BQR = \gamma, \angle RQP = 145^\circ, \angle TSA = 56^\circ$$

Kutovi $\angle BQR$ i $\angle RQP$ sukuti su pa su suplementarni.

$$\angle BQR + \angle RQP = 180^\circ \Rightarrow \gamma + 145^\circ = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 145^\circ \Rightarrow \gamma = 35^\circ.$$

Kutovi $\angle PBA$ i $\angle TSA$ jesu kutovi sa paralelnim kracima pa su jednaki.

$$\angle PBA = \angle TSA \Rightarrow \angle PBA = 56^\circ.$$

Kutovi $\angle RBQ$ i $\angle PBA$ sukuti su pa su suplementarni.

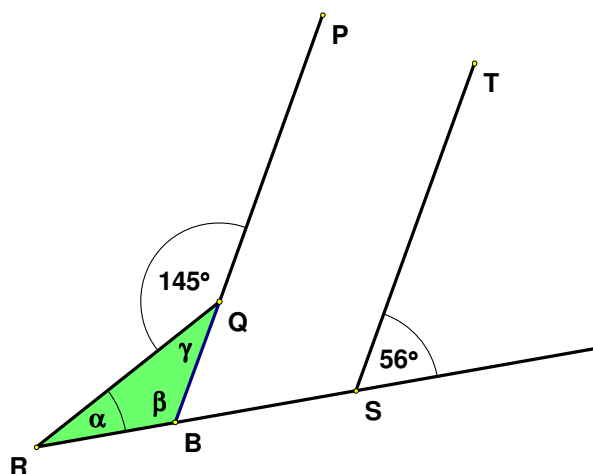
$$\angle RBQ + \angle PBA = 180^\circ \Rightarrow \beta + 56^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 56^\circ \Rightarrow \beta = 124^\circ.$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu 180° , slijedi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 124^\circ - 35^\circ \Rightarrow \alpha = 21^\circ.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica



Neka se pravci PQ i RS sijeku u točki B. Uočimo trokut RBQ čiji su unutarnji kutovi α , β i γ . Sa slike vidi se:

$$\angle QRB = \alpha, \angle RBQ = \beta, \angle BQR = \gamma, \angle RQP = 145^\circ$$

Prema pretpostavci pravci PQ i TS usporedni su, a pravac RS je njihova presječna (transverzala). Zato je

$$\angle PBS = 56^\circ.$$

Kutovi $\angle RBQ$ i $\angle PBS$ sukuti su pa su suplementarni.

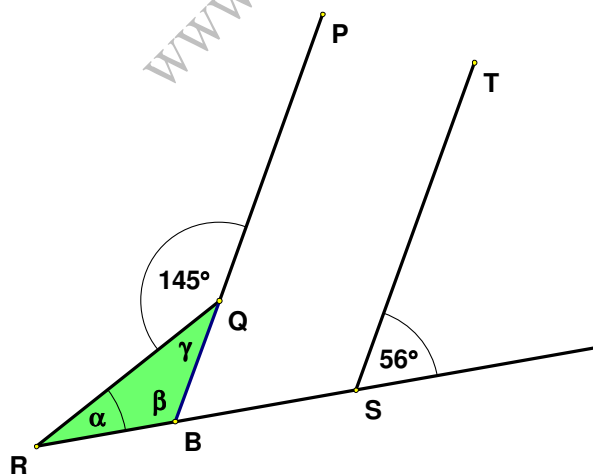
$$\angle RBQ + \angle PBS = 180^\circ \Rightarrow \beta + 56^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 56^\circ \Rightarrow \beta = 124^\circ.$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu 180° , slijedi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 124^\circ - 35^\circ \Rightarrow \alpha = 21^\circ.$$

Odgovor je pod B.

3. inačica



Neka se pravci PQ i RS sijeku u točki B, a točka A neka pripada pravcu RS. Uočimo trokut RBQ čiji su unutarnji kutovi α , β i γ . Sa slike vidi se:

$$\angle QRB = \alpha, \angle RBQ = \beta, \angle BQR = \gamma, \angle RQP = 145^\circ$$

Kutovi $\angle BQR$ i $\angle RQP$ sukuti su pa su suplementarni.

$$\angle BQR + \angle RQP = 180^\circ \Rightarrow \gamma + 145^\circ = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 145^\circ \Rightarrow \gamma = 35^\circ.$$

Prema pretpostavci pravci PQ i TS usporedni su, a pravac RS je njihova presječna (transverzala). Zato je

$$\angle PBS = 56^\circ.$$

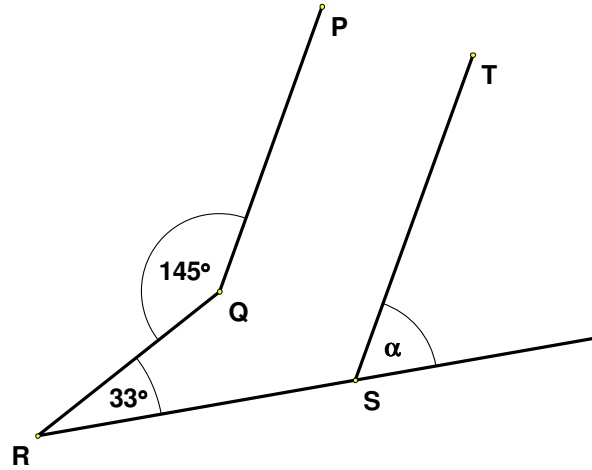
Vanjski kut $\angle PBS$ trokuta RBQ jednak je zbroju ostala dva unutarnja kuta.

$$\angle PBS = \alpha + \gamma \Rightarrow 56^\circ = \alpha + 35^\circ \Rightarrow \alpha + 35^\circ = 56^\circ \Rightarrow \alpha = 56^\circ - 35^\circ \Rightarrow \alpha = 21^\circ.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 441

Kolika je mjera kuta α prikazanoga na skici ako su dužine \overline{PQ} i \overline{ST} paralelne?

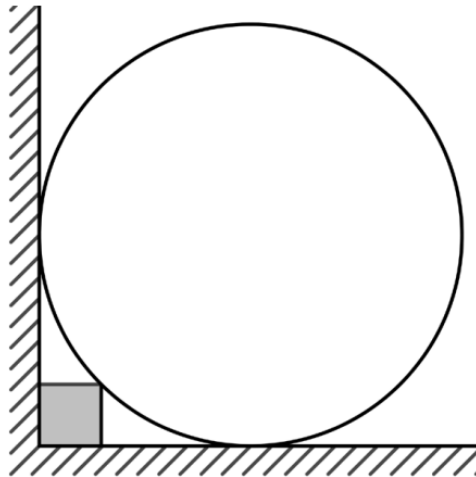


- A. 110° B. 42° C. 66° D. 68°

Rezultat: D.

Zadatak 442 (Matija, maturant)

Na podu je do zida postavljena cijev, a između cijevi i zida greda. Presjek cijevi je kružnica polumjera R , a presjek grede je kvadrat kao što je prikazano na skici. Kolika je duljina stranice toga kvadrata?



- A. $\frac{R}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)$ B. $\frac{R}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$ C. $\frac{R}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1)$ D. $\frac{R}{3} \cdot (2 - \sqrt{2})$

Rješenje 442

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \quad , \quad a \geq 0 \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.

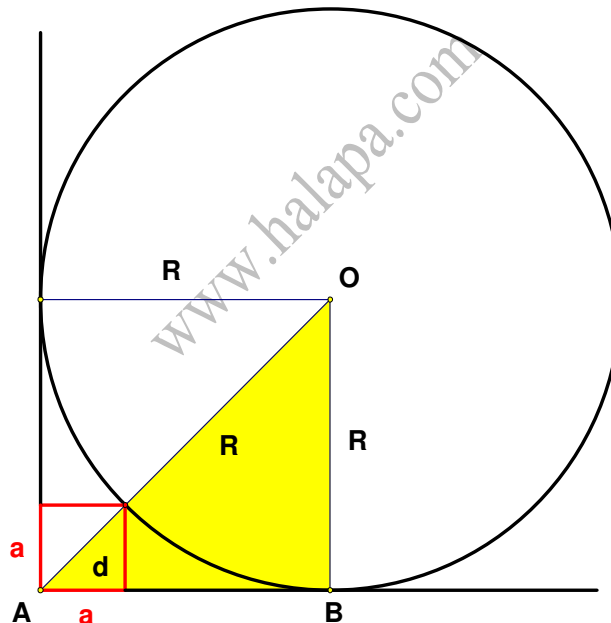
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.

Duljina dijagonale d kvadrata izračunava se po formuli

$$d = a \cdot \sqrt{2}.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r .



Sa slike vidi se:

$$d = a \cdot \sqrt{2} \quad , \quad |AO| = d + R \quad , \quad |AB| = |BO| = R$$

Promatrajmo pravokutan trokut ABO i uporabimo Pitagorin poučak.

$$\begin{aligned} |AO|^2 &= |AB|^2 + |BO|^2 \Rightarrow (d+R)^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow (d+R)^2 = 2 \cdot R^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (d+R)^2 &= 2 \cdot R^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow d+R = \sqrt{2 \cdot R^2} \Rightarrow d+R = \sqrt{2} \cdot \sqrt{R^2} \Rightarrow d+R = R \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow d &= R \cdot \sqrt{2} - R \Rightarrow d = R \cdot (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow [d = a \cdot \sqrt{2}] \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} = R \cdot (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cdot \sqrt{2} &= R \cdot (\sqrt{2} - 1) \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = R \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = R \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = R \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow a = R \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{R}{2} \cdot (2 - \sqrt{2}).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 442

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 443 (Božidar, srednja škola)

Duljine stranica trokuta (u cm) prirodni su brojevi. Duljina jedne stranice je 14 cm, a druge 1 cm. Koliki je opseg trokuta?

- A. 24 cm B. 26 cm C. 27 cm D. 29 cm

Rješenje 443

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg

$$O = a + b + c.$$

Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica.

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Pretpostavimo da je a = 14 cm, b = 1 cm. Zbog svojstva trokuta mora vrijediti:

$$\left. \begin{array}{l} a + b > c \\ b + c > a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14 + 1 > c \\ 1 + c > 14 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15 > c \\ c > 14 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c < 15 \\ c > 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 13 < c < 15 \Rightarrow c = 14 \text{ cm.}$$

Opseg trokuta je

$$O = a + b + c \Rightarrow O = 14 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 14 \text{ cm} \Rightarrow O = 29 \text{ cm.}$$

Odgovor je pod D.

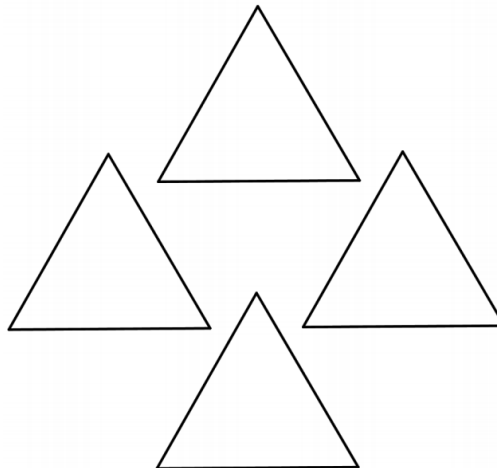
Vježba 443

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 444 (Kiki, maturantica)

Cvjetnjak se sastoji od četiriju dijelova u obliku jednakostraničnih trokuta kao što je prikazano na skici. Ukupna površina cvjetnjaka iznosi 5 m². Koliko je ukupno metara ograde potrebno za ograđivanje svih dijelova cvjetnjaka ako se svaki dio cvjetnjaka ograđuje zasebno?



A. 18.6 m B. 19.1 m C. 20.4 m D. 21.3 m

Rješenje 444

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Trokute dijelimo prema odnosu među duljinama stranica na:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{raznostranične} \\ \text{jednakokračne} \\ \text{jednakostranične.} \end{array} \right.$$

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i tri jednaka kuta ($\alpha = 60^\circ$). Površina jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice a iznosi:

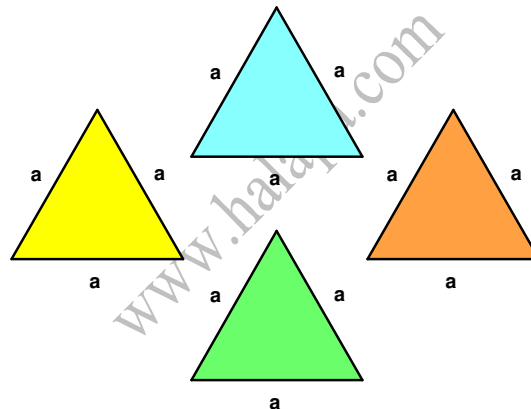
$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Opseg jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice a iznosi:

$$O = 3 \cdot a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Cvjetnjak se sastoji od četiriju jednakostraničnih trokuta duljine stranice a pa za ukupnu površinu vrijedi:

$$\begin{aligned} 4 \cdot P = 5 \text{ m}^2 &\Rightarrow 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 \text{ m}^2 \Rightarrow 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 \text{ m}^2 \Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{3} = 5 \text{ m}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{3} = 5 \text{ m}^2 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = \frac{5 \text{ m}^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = 2.8868 \text{ m}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 = 2.8868 \text{ m}^2 \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow a = \sqrt{2.8868 \text{ m}^2} \Rightarrow a = 1.6991 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ukupno metara ograde dobijemo zbrajanjem opsega četiriju trokuta.

$$O = 4 \cdot 3 \cdot a \Rightarrow O = 12 \cdot a \Rightarrow O = 12 \cdot 1.6991 \text{ m} \Rightarrow O = 20.4 \text{ m}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 444

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 445 (Jopa, maturantica)

Dva su broda iz luke isplovila u isto vrijeme. Prvi je krenuo na zapad, a drugi na jug. Nakon jednoga su sata plovidbe brodovi međusobno udaljeni 40 milja, a udaljenost jednoga broda od luke jednaka je $\frac{5}{6}$ udaljenosti drugoga broda od luke. Koliko je od luke udaljen brod koji je preplovio veću udaljenost?

- A. 23.6 milja B. 25.4 milje C. 30.7 milja D. 33.3 milje

Rješenje 445

Ponovimo!

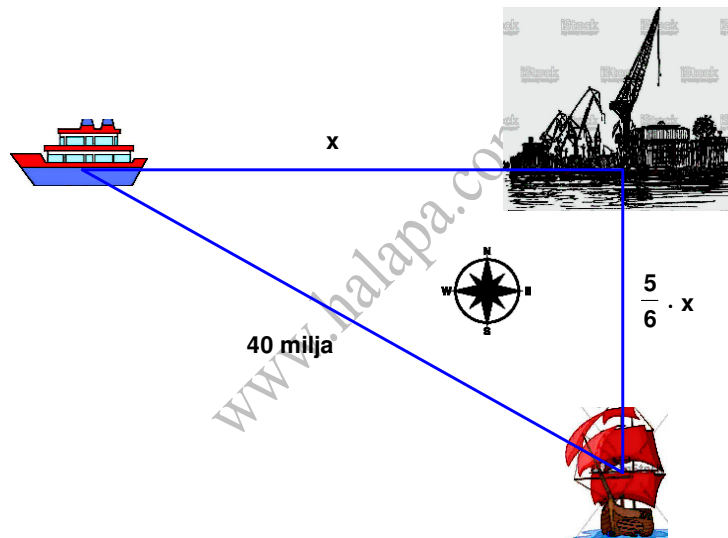
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Neka je x udaljenost broda koji je preplovio veću udaljenost od luke. Tada je $\frac{5}{6} \cdot x$ udaljenost drugog broda od luke. Uočimo pravokutan trokut i pomoću Pitagorina poučka izračunamo x .

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{5}{6} \cdot x\right)^2 &= 40^2 \Rightarrow x^2 + \frac{25}{36} \cdot x^2 = 1600 \Rightarrow x^2 + \frac{25}{36} \cdot x^2 = 1600 \cdot \frac{36}{36} \Rightarrow \\ \Rightarrow 36 \cdot x^2 + 25 \cdot x^2 &= 1600 \cdot 36 \Rightarrow 61 \cdot x^2 = 1600 \cdot 36 \Rightarrow 61 \cdot x^2 = 1600 \cdot 36 \quad /: 61 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{1600 \cdot 36}{61} \Rightarrow x^2 = \frac{1600 \cdot 36}{61} \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1600 \cdot 36}{61}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{1600 \cdot 36}}{\sqrt{61}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{\sqrt{1600} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{61}} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 6}{\sqrt{61}} \Rightarrow x = \frac{240}{\sqrt{61}} \Rightarrow x = 30.7 \text{ milja.}\end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

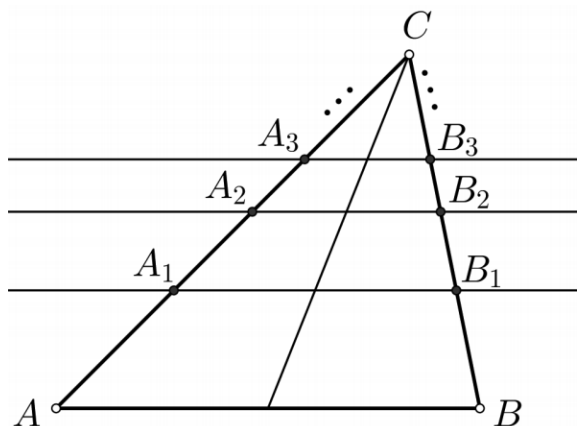
Vježba 445

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 446 (Jopa, maturantica)

Težištem trokuta ABC povučena je paralela sa stranicom \overline{AB} koja siječe stranice \overline{AC} i \overline{BC} u točkama A_1 i B_1 . Težištem trokuta A_1B_1C povučena je paralela sa stranicom \overline{AB} koja siječe stranice \overline{AC} i \overline{BC} u točkama A_2 i B_2 itd. kao što je prikazano na skici. Zbroj duljina svih beskonačno mnogo težišnica iz vrha C trokuta ABC, A_1B_1C , A_2B_2C itd. iznosi 501 cm. Izračunajte duljinu težišnice iz vrha C u trokutu ABC.



Rješenje 446

Ponovimo!

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

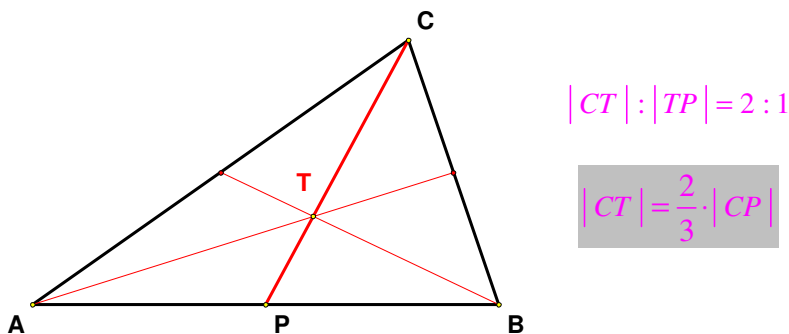
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.

Točka u kojoj se sve tri težišnice sijeku **težište** je trokuta, T.

Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući (gledano) od vrha trokuta.



Geometrijski red

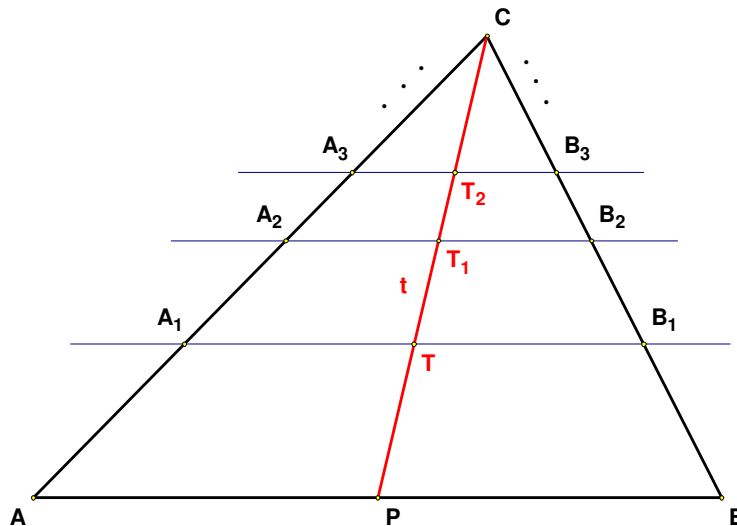
$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n + \dots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$



Neka je t duljina težišnice iz vrha C u trokutu ABC .

$$|CP| = t.$$

Točka T je težište trokuta ABC pa vrijedi

$$|CT| = \frac{2}{3} \cdot |CP| \Rightarrow |CT| = \frac{2}{3} \cdot t.$$

Točka T_1 je težište trokuta A_1B_1C pa vrijedi

$$|CT_1| = \frac{2}{3} \cdot |CT| \Rightarrow |CT_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t \Rightarrow |CT_1| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot t.$$

I tako dalje!

Zbroj duljina svih beskonačno mnogo težišnica iz vrha C trokuta ABC , A_1B_1C , A_2B_2C itd. iznosi 501 cm.

$$t + \frac{2}{3} \cdot t + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot t + \dots = 501 \Rightarrow t \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = 501 \Rightarrow \left[\text{u zagradi je geometrijski red} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 501 \Rightarrow t \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 501 \Rightarrow 3 \cdot t = 501 \Rightarrow 3 \cdot t = 501 \text{ } /: 3 \Rightarrow t = 167.$$

Duljina težišnice iz vrha C u trokutu ABC je 167 cm.

Vježba 446

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 447 (Tena1, maturantica)

Zadan je trokut duljina stranica 3.7 cm, 8.2 cm i 9 cm. Opseg njemu sličnoga trokuta iznosi 54.34 cm. Kolika je duljina najveće stranice sličnoga trokuta?

Rješenje 447

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Ako su a , b i c duljine stranica trokuta ABC , onda je formula za opseg

$$O = a + b + c.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.

Za opsege sličnih trokuta vrijedi:

$$\frac{O_1}{O} = k.$$

Opseg zadanog trokuta je

$$O = a + b + c \Rightarrow \begin{cases} a = 3.7 \text{ cm} \\ b = 8.2 \text{ cm} \\ c = 9 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow O = 3.7 \text{ cm} + 8.2 \text{ cm} + 9 \text{ cm} \Rightarrow O = 20.9 \text{ cm}.$$

Poznati su opsezi trokuta pa koeficijent sličnosti k iznosi:

$$k = \frac{O_1}{O} \Rightarrow \begin{cases} O_1 = 54.34 \text{ cm} \\ O = 20.9 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{54.34 \text{ cm}}{20.9 \text{ cm}} \Rightarrow k = 2.6.$$

U zadanome trokutu je najveća stranica c . Duljina najveće stranice u sličnom trokutu je

$$\frac{c_1}{c} = k \Rightarrow \frac{c_1}{9} = k \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow c_1 = k \cdot c \Rightarrow \begin{cases} c = 9 \text{ cm} \\ k = 2.6 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2.6 \cdot 9 \text{ cm} \Rightarrow c_1 = 23.4 \text{ cm}.$$



Može i ovako!

Ako dobro razumijemo problem možemo i ovako računati:

$$\frac{54.34}{3.7 + 8.2 + 9} \cdot 9 \text{ cm} = 23.4 \text{ cm}.$$

Vježba 447

Odmor!

Rezultat: ...