Zadatak 421 (Bili, tehnička škola)

U pravokutnom trokutu je zbroj duljina kateta 11, a duljina hipotenuze 7. Površina tog trokuta iznosi:

A. 15 *B.* ne postoji *C.* 21 *D.* 25

Rješenje 421

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P=\frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Budući da je trokut pravokutan, a hipotenuza c = 7, vrijedi:

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+b^2=7^2 \Rightarrow a^2+b^2=49.$$

Iz sustava ne dobiju se realne vrijednosti za a, odnosno b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=11-a \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow a^2+(11-a)^2=49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+121-22\cdot a+a^2=49 \Rightarrow a^2+121-22\cdot a+a^2-49=0 \Rightarrow 2\cdot a^2-22\cdot a+72=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2-22\cdot a+72=0 \ /:2 \Rightarrow a^2-11\cdot a+36=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2-11\cdot a+36=0 \\ a=1 \ , \ b=-11 \ , \ c=36 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \ , \ b=-11 \ , \ c=36 \\ a_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-144}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{-23}}{2}.$$

To su kompleksne vrijednosti. Površina ne postoji.
Odgovor je pod B.

2.inačica

Budući da je trokut pravokutan, a hipotenuza c = 7, vrijedi:

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+b^2=7^2 \Rightarrow a^2+b^2=49.$$

Iz sustava dobiju se

$$\left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=11 \ /^2 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+b)^2=11^2 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=121 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2+2\cdot a\cdot b=121 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 49+2\cdot a\cdot b=121 \Rightarrow 2\cdot a\cdot b=121-49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a\cdot b=72 \Rightarrow 2\cdot a\cdot b=72 \;/\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2\cdot a\cdot b}{4}=18 \Rightarrow \frac{2\cdot a\cdot b}{4}=18 \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[P=\frac{a\cdot b}{2}\right] \Rightarrow P=18.$$

Među ponuđenim odgovorima nema tog broja. Dakle, površina ne postoji.
Odgovor je pod B.

Vježba 421

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 422 (Ante, srednja škola)

Unutarnji kut pri vrhu B trokuta ABC iznosi β = 30º. Stranica $\overline{AC}$ tog trokuta vidi se iz središta tom trokutu upisane kružnice pod kutom od:

$$A.\,150^\circ \qquad B.\,90^\circ \qquad C.\,100^\circ \qquad D.\,105^\circ$$

Rješenje 422

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.
Sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte tom trokutu upisane kružnice. Kružnica koja dira sve tri stranice trokuta zove se kružnica upisana trokutu ABC.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

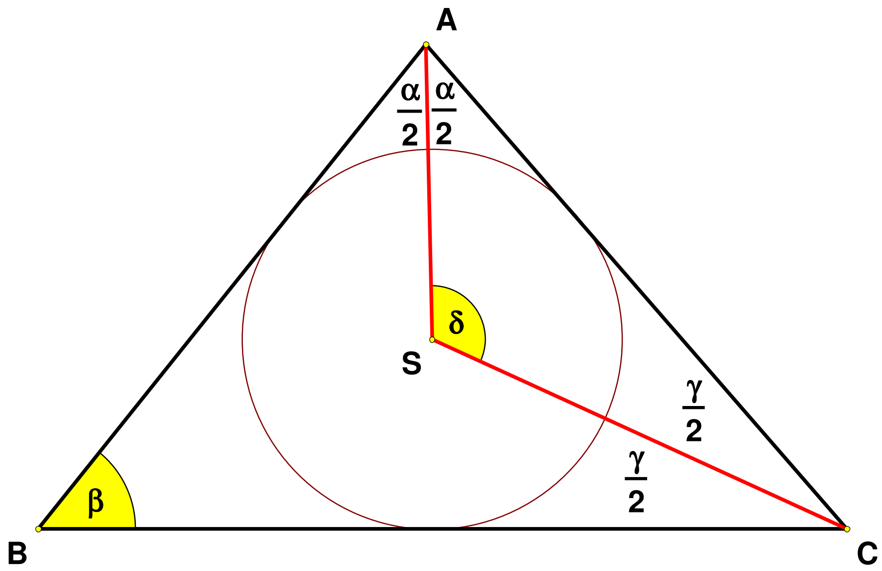
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;\; n\neq 0\;,\;\; n\neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta je 360°.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ.$$

Puni kut je kut s mjerom od 360º.

1.inačica



Sa slike vidi se:

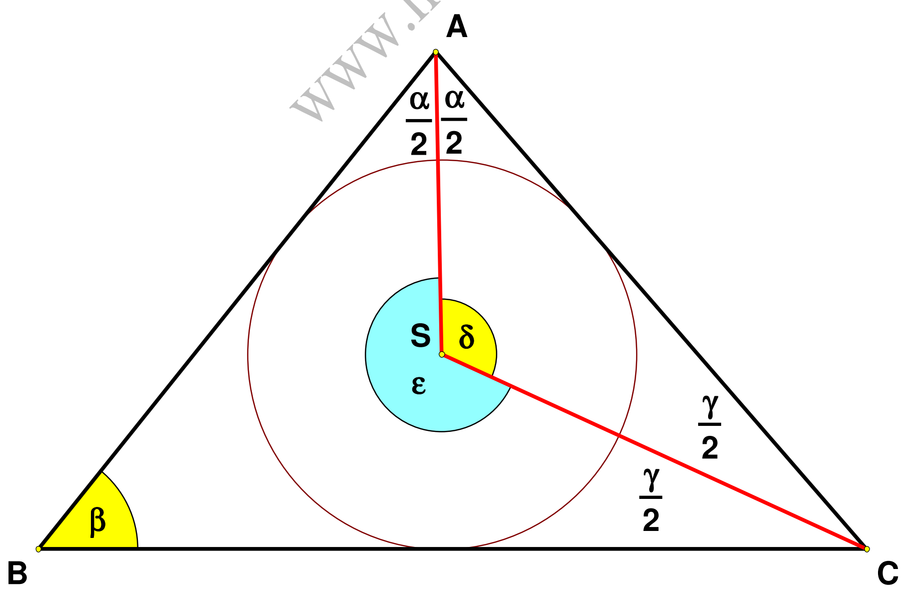
$$\angle ABC=\beta=30^\circ\ ,\ \angle CAS=\frac{\alpha}{2}\ ,\ \angle SCA=\frac{\gamma}{2}\ ,\ \angle ASC=\delta$$

Uočimo trokut ASC. Za njegove unutarnje kutove vrijedi:

$$\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta+\frac{\alpha+\gamma}{2}=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta+\frac{180^\circ-\beta}{2}=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta+\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=180^\circ\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta+\frac{150^\circ}{2}=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta+\frac{150^\circ}{2}=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta+75^\circ=180^\circ\ \Rightarrow\ \delta=180^\circ-75^\circ\ \Rightarrow\ \delta=105^\circ.$$

Odgovor je pod D.



2.inačica

Uočimo trokut ABC. Za njegove unutarnje kutove vrijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\ \Rightarrow\ \alpha+\gamma=180^\circ-\beta.$$

Za kutove četverokuta ABCSA je:

$$\beta+\frac{\gamma}{2}+\varepsilon+\frac{\alpha}{2}=360^\circ\ \Rightarrow\ \beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}+\varepsilon=360^\circ\ \Rightarrow\ \beta+\frac{180^\circ-\beta}{2}+\varepsilon=360^\circ\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30^\circ + \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} + \varepsilon = 360^\circ \Rightarrow 30^\circ + \frac{150^\circ}{2} + \varepsilon = 360^\circ \Rightarrow 30^\circ + \frac{150^\circ}{2} + \varepsilon = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30^\circ + 75^\circ + \varepsilon = 360^\circ \Rightarrow \varepsilon = 360^\circ - 30^\circ - 75^\circ \Rightarrow \varepsilon = 255^\circ.$$

Kut δ iznosi:

$$\delta + \varepsilon = 360^\circ \Rightarrow \delta = 360^\circ - \varepsilon \Rightarrow \delta = 360^\circ - 255^\circ \Rightarrow \delta = 105^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 422

Unutarnji kut pri vrhu B trokuta ABC iznosi β = 40º. Stranica $\overline{AC}$ tog trokuta vidi se iz središta tom trokutu upisane kružnice pod kutom od:

$$A.\ 140^\circ \qquad B.\ 100^\circ \qquad C.\ 110^\circ \qquad D.\ 120^\circ$$

Rezultat: C.

Zadatak 423 (Iva, gimnazija)

U pravokutnom trokutu simetrala kuta α dijeli suprotnu katetu na dva segmenta. Omjer duljine većeg od njih prema duljini manjeg jest:

$$A.\ ctg\frac{\alpha}{2} : 1 \qquad B.\ 1 : \cos\alpha \qquad C.\ 2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} : 1 \qquad D.\ 1 : \cos\frac{\alpha}{2}$$

Rješenje 423

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad tg\ x = \frac{2 \cdot tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

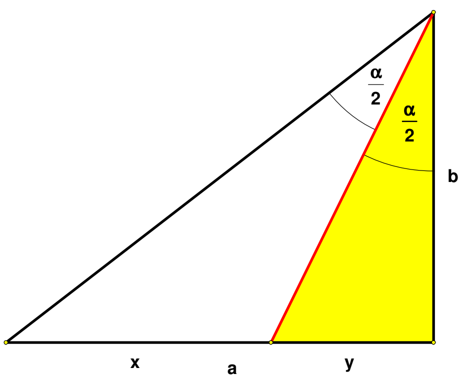
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

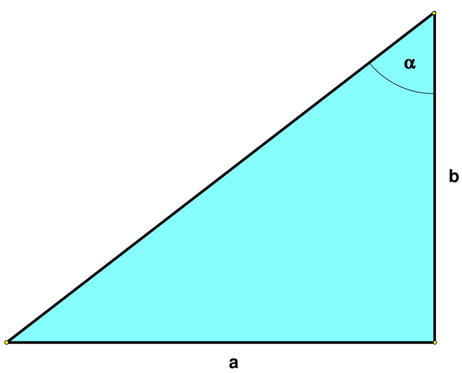
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$





Neka simetrala kuta α dijeli stranicu a na segmente x i y.

$$x+y=a.$$

Sa slika vidi se:

- $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{y}{b}\Rightarrow\frac{y}{b}=tg\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{y}{b}=tg\frac{\alpha}{2}\ /\cdot b\Rightarrow y=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}$
- $tg\,\alpha=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=tg\,\alpha\Rightarrow\frac{x+y}{b}=tg\,\alpha\Rightarrow\frac{x+y}{b}=tg\,\alpha\ /\cdot b\Rightarrow x+y=b\cdot tg\,\alpha.$

Promatramo sustav jednadžba i izračunamo x.

$$\left.\begin{matrix} y=b\cdot tg\frac{\alpha}{2} \\ x+y=b\cdot tg\,\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{bmatrix}\Rightarrow x+b\cdot tg\frac{\alpha}{2}=b\cdot tg\,\alpha\Rightarrow x=b\cdot tg\,\alpha-b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=b\cdot\left(tg\,\alpha-tg\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=b\cdot\left(\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}-tg\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{2}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{2}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2-\left(1-tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2-1+tg^2\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\frac{1}{1}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1}{1}-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Gledamo omjer!

$$\frac{x}{y}=\frac{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{\cos\alpha}\Rightarrow x:y=1\,.\cos\alpha.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 423

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 424 (Marko, tehnička škola)

Stranice trokuta odnose se kao 2 : 3 : 4. Ako je površina toga trokuta $3\cdot\sqrt{15}$, onda je opseg trokuta

$A.\ 20 \qquad B.\ 18 \qquad C.\ 36 \qquad D.\ 16$

Rješenje 424

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad \frac{a}{b}-c=\frac{a-b\cdot c}{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poluopseg trokuta je:

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Opseg trokuta je:

$$O=2\cdot s.$$

Ploština trokuta ΔABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \ , \ s=\frac{a+b+c}{2} - \text{poluopseg trokuta}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost omjera.

Ako postoji n jednostavnih omjera, takvih da je

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= k_1 \\ a_2 : a_3 &= k_2 \\ a_3 : a_4 &= k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} : a_n &= k_{n-1} \end{aligned}$$

produženi omjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots : a_{n-1} : a_n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Iz razmjera slijedi:

$$a:b:c=2:3:4 \ \Rightarrow \ \left.\begin{aligned} a&=2\cdot k \\ b&=3\cdot k \\ c&=4\cdot k \end{aligned}\right\}, \ \text{k je koeficijent proporcionalnosti}.$$

Poluopseg s iznosi:

$$s=\frac{a+b+c}{2} \ \Rightarrow \ s=\frac{2\cdot k+3\cdot k+4\cdot k}{2} \ \Rightarrow \ s=\frac{9\cdot k}{2}.$$

Budući da je površina zadana, imamo:

$$P=3\cdot\sqrt{15}\Rightarrow\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=3\cdot\sqrt{15}\Rightarrow\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=3\cdot\sqrt{15}\ /^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\right)^2=\left(3\cdot\sqrt{15}\right)^2\Rightarrow s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)=3^2\cdot\left(\sqrt{15}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)=9\cdot15\Rightarrow s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)=135\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{matrix}s=\frac{9\cdot k}{2}\\ a=2\cdot k\\ b=3\cdot k\\ c=4\cdot k\end{matrix}\right]\Rightarrow\frac{9\cdot k}{2}\cdot\left(\frac{9\cdot k}{2}-2\cdot k\right)\cdot\left(\frac{9\cdot k}{2}-3\cdot k\right)\cdot\left(\frac{9\cdot k}{2}-4\cdot k\right)=135\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9\cdot k}{2}\cdot\frac{5\cdot k}{2}\cdot\frac{3\cdot k}{2}\cdot\frac{k}{2}=135\Rightarrow\frac{135\cdot k^4}{16}=135\Rightarrow\frac{135\cdot k^4}{16}=135\ /\cdot\frac{16}{135}\Rightarrow k^4=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^4=16\ /\sqrt[4]{\ }\Rightarrow k=\sqrt[4]{16}\Rightarrow k=2.$$

Opseg trokuta je

$$O=2\cdot s\Rightarrow O=2\cdot\frac{9\cdot k}{2}\Rightarrow O=2\cdot\frac{9\cdot k}{2}\Rightarrow O=9\cdot k\Rightarrow O=9\cdot2\Rightarrow O=18.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 424

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 425 (Jelena, maturantica)

Duljina hipotenuze c i duljina katete a pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Kvadrat katete b tog trokuta jednak je:

$$A.\ (a+c)^2\qquad B.\ a+c\qquad C.\ a\cdot c\qquad D.\ c-a$$

Rješenje 425

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$\left.\begin{matrix}c=n+1\\ a=n\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[b^2=c^2-a^2\right]\Rightarrow b^2=(n+1)^2-n^2\Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2\Rightarrow b^2=2\cdot n+1\Rightarrow b^2=n+n+1\Rightarrow b^2=a+c.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 425

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 426 (Goran, gimnazija)

Unutar krakova kuta od 60° nalazi se točka T udaljena a, odnosno b jedinica od krakova kuta. Odredite udaljenost točke T do vrha kuta.

Rješenje 426

Ponovimo!

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

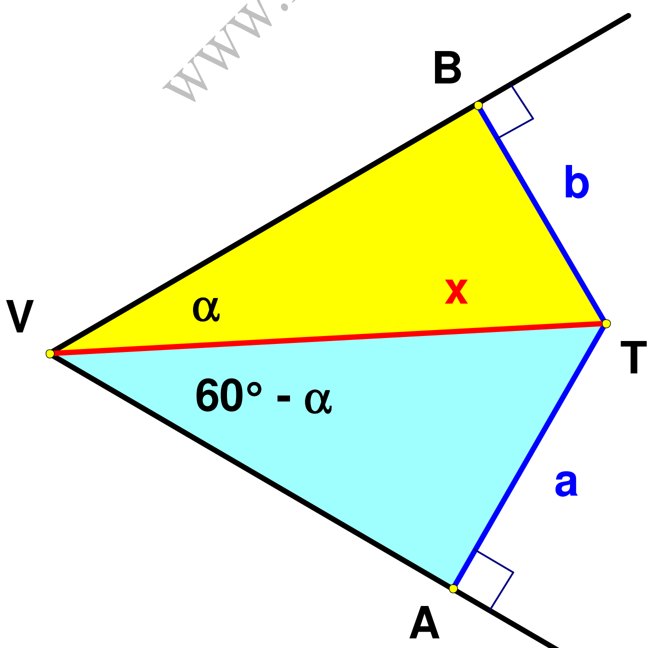
$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Sa slike vidi se:

$$|AT|=a \; , \; |BT|=b \; , \; |VT|=x \; , \; \angle BVA=60^\circ \; , \; \angle BVT=\alpha \; , \; \angle TVA=60^\circ-\alpha$$

Za pravokutne trokute ΔBVT i ΔTVA vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{b}{x} \\ \sin\left(60^\circ - \alpha\right) = \dfrac{a}{x} \end{array}\right\}.$$

Preoblikujemo drugu jednakost.

$$\sin\left(60^\circ-\alpha\right)=\frac{a}{x} \Rightarrow \sin 60^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha=\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{x}=\frac{a}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{b}{2\cdot x}=\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{a}{x}+\frac{b}{2\cdot x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{2\cdot a+b}{2\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{2\cdot a+b}{2\cdot x} \;/^{2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{2\cdot a+b}{2\cdot x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\cos^2\alpha=\frac{\left(2\cdot a+b\right)^2}{\left(2\cdot x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{4\cdot x^2} \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{4\cdot x^2} \;/\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2\alpha=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3\cdot x^2} \Rightarrow 1-\left(\frac{b}{x}\right)^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3\cdot x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{b^2}{x^2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3\cdot x^2} \Rightarrow 1-\frac{b^2}{x^2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3\cdot x^2} \;/\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-b^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3} \Rightarrow x^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3}+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2}{3}+\frac{b^2}{1} \Rightarrow x^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2+3\cdot b^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+4\cdot b^2}{3} \Rightarrow x^2=\frac{4\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3} \Rightarrow x^2=\frac{4\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{4\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}} \Rightarrow x=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3}} \Rightarrow x=2\cdot\sqrt{\frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3}}.$$

Vježba 426

Unutar krakova kuta od 90º nalazi se točka T udaljena a, odnosno b jedinica od krakova kuta. Odredite udaljenost točke T do vrha kuta.

Rezultat: $\sqrt{a^2+b^2}.$

Zadatak 427 (Miro, srednja škola)

Iz vrha pravokutnika ABCD, duljina stranica a i b, povučena je okomica duljine $|DM| = h$ na ravninu pravokutnika. Odredite udaljenost između točaka M i S, gdje je S sjecište dijagonala pravokutnika.

Rješenje 427

Ponovimo!

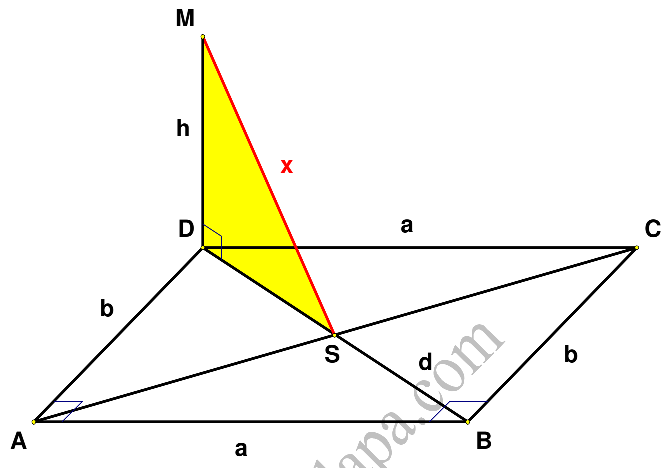
$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Dijagonale se raspolavljaju i jednake su duljine. Duljina dijagonale računa se po formuli:

$$d=\sqrt{a^2+b^2},$$

gdje su a i b duljine stranica.



Sa slike vidi se:

$$|AB|=|CD|=a\ ,\ |BC|=|DA|=b\ ,\ |DM|=h\ ,\ |BD|=|AC|=d=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ |MS|=x$$

$$|DS|=\frac{1}{2}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

Uočimo pravokutan trokut MDS i uporabimo Pitagorin poučak.

$$|MS|^2=|DM|^2+|DS|^2 \Rightarrow x^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \Rightarrow x^2=h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=h^2+\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow x^2=h^2+\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right)\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right)}.$$

Vježba 427

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 428 (Robert, maturant)

Svakim vrhom trokuta ABC nacrtan je pravac paralelan s nasuprotnom stranicom. Na nacrtanoj slici može se uočiti izvjestan broj paralelograma. Zbroj opsega svih tako nastalih paralelograma je 60 cm. Odredite opseg trokuta ABC.

Rješenje 428

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg

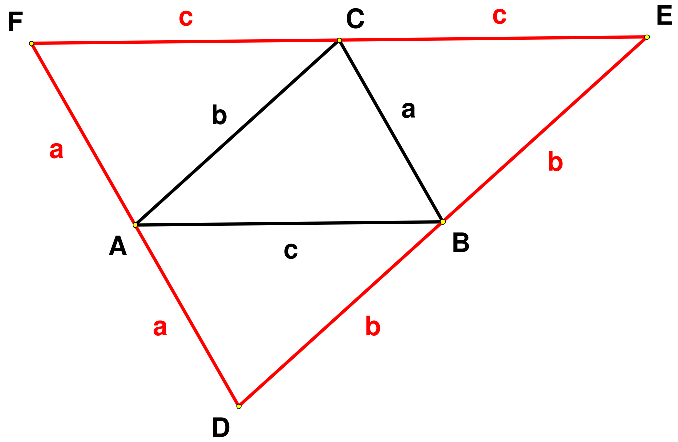
$$O=a+b+c.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Opseg paralelograma je zbroj duljina svih stranica paralelograma

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

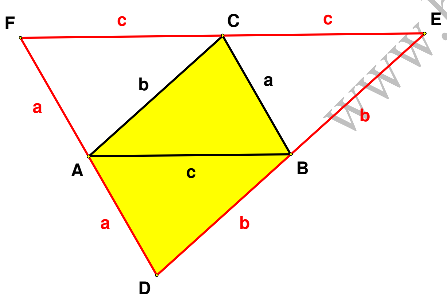


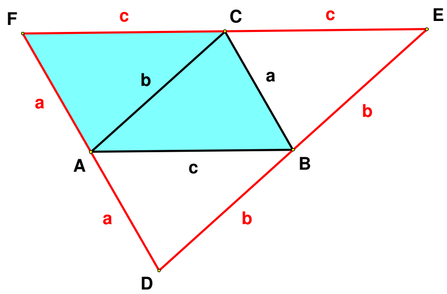
Sa slike vidi se:

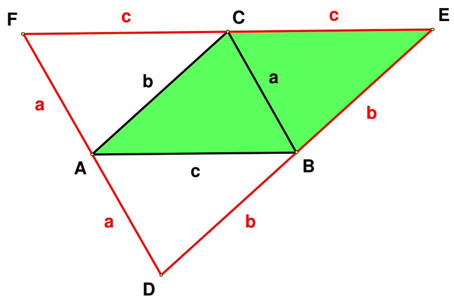
$$|AB| = |FC| = |CE| = c \ , \ |BC| = |DA| = |AF| = a \ , \ |CA| = |EB| = |BD| = b$$

Uočimo na slici tri paralelograma:

$$ADBC \ , \ ABCF \ , \ ABEC.$$







Zbroj opsega svih paralelograma je 60 cm.

$$(2 \cdot a + 2 \cdot b) + (2 \cdot c + 2 \cdot a) + (2 \cdot c + 2 \cdot b) = 60 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c + 2 \cdot a + 2 \cdot c + 2 \cdot b = 60 \ \Rightarrow \ 4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c = 60 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4 \cdot (a + b + c) = 60 \ \Rightarrow \ 4 \cdot (a + b + c) = 60 \ /: 4 \ \Rightarrow \ a + b + c = 15 \ cm.$$

Vježba 428

Svakim vrhom trokuta ABC nacrtan je pravac paralelan s nasuprotnom stranicom. Na nacrtanoj slici može se uočiti izvjestan broj paralelograma. Zbroj opsega svih tako nastalih paralelograma je 80 cm. Odredite opseg trokuta ABC.

Rezultat: 20 cm.

Zadatak 429 (Roby, maturant)

Ako kutovi α, β i γ nekog trokuta zadovoljavaju jednakost $\sin(\alpha)=\frac{\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{\cos(\beta)+\cos(\gamma)}$, tada kut α iznosi:

$$A.\ 30^{\circ} \qquad B.\ 45^{\circ} \qquad C.\ 60^{\circ} \qquad D.\ 90^{\circ}$$

Rješenje 429

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \sin\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\cos(\alpha) \quad , \quad \cos\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\sin(\alpha) \quad , \quad a^{1}=a.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \cos\left(90^{\circ}\right)=0 \quad , \quad \sin\left(45^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$\sin(\alpha)=2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu iznosi 180^{0}.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Formule pretvorbe zbroja u umnožak

$$\sin(x)+\sin(y)=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \quad , \quad \cos(x)+\cos(y)=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Preoblikujemo jednakost.

$$\sin(\alpha)=\frac{\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{\cos(\beta)+\cos(\gamma)} \Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{2\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{2\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \\ \beta+\gamma=180^\circ-\alpha\end{array}\right] \Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}}{\cos\frac{180^\circ-\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \sin(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \;/\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0 \\ 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=0\end{array}\right\}.$$

Prva jednadžba

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(90^\circ\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=90^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=90^\circ \;/\cdot 2 \Rightarrow \alpha=180^\circ.$$

Nema smisla!

Druga jednadžba

$$2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=0 \Rightarrow 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1 \Rightarrow 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1 \;/\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\;\text{nema smisla}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(45^\circ\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=45^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=45^\circ \;/\cdot 2 \Rightarrow \alpha=90^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 429

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 430 (Zoran, gimnazija)

Duljine dviju stranica raznostraničnog trokuta su 4 i 6, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2. Duljina treće stranice trokuta iznosi:

$$A.\ 8 \qquad B.\ 5 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 7$$

Rješenje 430

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-c=\frac{a-b\cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\left(\alpha\right).$$

$$\sin\left(2\cdot\alpha\right)=2\cdot\sin\left(\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha\right) \quad , \quad \cos\left(3\cdot\alpha\right)=4\cdot\cos^3\alpha-3\cdot\cos\left(\alpha\right).$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu iznosi 180^0.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \ \Leftrightarrow\ a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusov poučak).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \ \Rightarrow\ a\cdot d=b\cdot c.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Duljine dviju stranica raznostraničnog trokuta su a = 4 i b = 6, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2.

$$\alpha : \beta = 1 : 2 \;\Rightarrow\; \beta = 2 \cdot \alpha.$$

Za kut γ vrijedi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \;\Rightarrow\; \gamma = 180^\circ - \alpha - 2 \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \gamma = 180^\circ - 3 \cdot \alpha.$$

Uporabom sinusova poučka dobije se:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \;\Rightarrow\; \frac{4}{6} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2 \cdot \alpha)} \;\Rightarrow\; \frac{4}{6} = \frac{\sin(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} = \frac{\sin(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sin(\alpha) \neq 0\right] \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} = \frac{\sin(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \; / \cdot \frac{3 \cdot \cos(\alpha)}{2} \;\Rightarrow\; \cos(\alpha) = \frac{3}{4}.$$

Računamo cos (γ).

$$\cos(\gamma) = \cos\left(180^\circ - 3 \cdot \alpha\right) = -\cos(3 \cdot \alpha) = -\left(4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha)\right) =$$

$$= -\left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{4}\right) = -\left(4 \cdot \frac{27}{64} - \frac{9}{4}\right) = -\left(4 \cdot \frac{27}{64} - \frac{9}{4}\right) = -\left(\frac{27}{16} - \frac{9}{4}\right) = -\frac{27 - 36}{16} = -\frac{-9}{16} = \frac{9}{16}.$$

Duljina treće stranice c trokuta iznosi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \;\Rightarrow\; c^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{9}{16} \;\Rightarrow\; c^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{9}{16} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \frac{9}{16} \;\Rightarrow\; c^2 = 52 - 27 \;\Rightarrow\; c^2 = 25 \;\Rightarrow\; c^2 = 25 \; / \sqrt{} \;\Rightarrow\; c = \sqrt{25} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 5.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 430

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 431 (Sanja, gimnazija)

U trokutu su zadane stranice $a = \sqrt{2}$, b = 2 i kut α = 45°. Površina tog trokuta iznosi:

$$A.\ 1 \qquad B.\ \sqrt{2} \qquad C.\ 2 \cdot \sqrt{2} \qquad D.\ 2$$

Rješenje 431

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu iznosi 180^0.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.

Površina pravokutnog jednakokračnog trokuta duljine katete a.

$$P=\frac{1}{2}\cdot a^{2}.$$

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\ \Rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\ /\cdot\frac{b\cdot\sin(\beta)}{a}\ \Rightarrow\ \sin(\beta)=\frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} b=2 \\ a=\sqrt{2} \\ \alpha=45^{\circ}\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin(\beta)=\frac{2\cdot\sin(45^{\circ})}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \text{DEG}\ \Rightarrow\ \sin(\beta)=1\ \Rightarrow\ \beta=\sin^{-1}(1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \text{DEG}\ \Rightarrow\ \beta=90^{\circ}.$$

Kut γ iznosi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}\ \Rightarrow\ \gamma=180^{\circ}-\alpha-\beta\ \Rightarrow\ \gamma=180^{\circ}-45^{\circ}-90^{\circ}\ \Rightarrow\ \gamma=45^{\circ}.$$

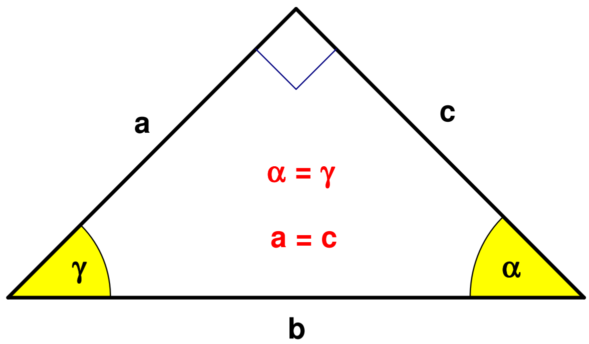
Trokut je pravokutan jednakokračan.

$$c=a=\sqrt{2}.$$

Površina trokuta iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a^{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot 2\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot 2\ \Rightarrow\ P=1.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 431

U trokutu su zadane stranice $a=2\cdot\sqrt{2}$, b = 4 i kut α = 45°. Površina tog trokuta iznosi:

A. 2 B. $3\cdot\sqrt{2}$ C. 4 D. 5

Rezultat: C.

Zadatak 432 (Željko, maturant)

Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 7 cm i 4 cm. Duljina hipotenuze trokuta iznosi:

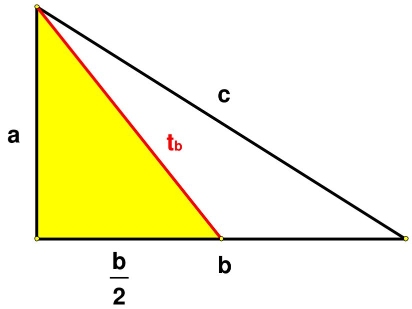
A. $10\ cm$ B. $5\cdot\sqrt{3}\ cm$ C. $5\cdot\sqrt{2}\ cm$ D. $2\cdot\sqrt{13}\ cm$

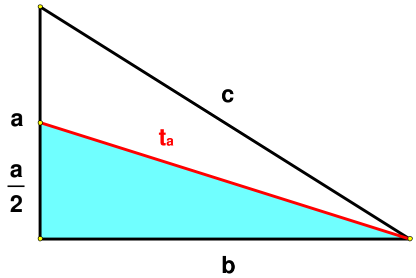
Rješenje 432

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.





Sa slika vidi se da uporabom Pitagorina poučka dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = t_b^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = t_a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_b = 4 \\ t_a = 7 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + \frac{b^2}{4} = 4^2 \\ \frac{a^2}{4} + b^2 = 7^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + \frac{b^2}{4} = 16 \\ \frac{a^2}{4} + b^2 = 49 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + \frac{b^2}{4} = 16 \;/\cdot 4 \\ \frac{a^2}{4} + b^2 = 49 \;/\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a^2 + b^2 = 64 \\ a^2 + 4 \cdot b^2 = 196 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 5 \cdot a^2 + 5 \cdot b^2 = 260 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot a^2 + 5 \cdot b^2 = 260 \;/:5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 52 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Pitagorin poučak} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right] \Rightarrow c^2 = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 52 \;/\sqrt{} \Rightarrow c = \sqrt{52} \Rightarrow c = \sqrt{4 \cdot 13} \Rightarrow c = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} \Rightarrow c = 2 \cdot \sqrt{13}\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 432

Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 14 cm i 8 cm. Duljina hipotenuze trokuta iznosi:

$$A.\ 20\ cm \qquad B.\ 10 \cdot \sqrt{3}\ cm \qquad C.\ 10 \cdot \sqrt{2}\ cm \qquad D.\ 4 \cdot \sqrt{13}\ cm$$

Rezultat: D.

Zadatak 433 (Željko, maturant)

U trokutu su zadane stranice b = 6 cm, c = 4 cm i težišnica iz vrha B, t_b = 5 cm. Površina trokuta iznosi:

$$A.\ 5 \cdot \sqrt{2}\ cm^2 \qquad B.\ 6\ cm^2 \qquad C.\ 4 \cdot \sqrt{3}\ cm^2 \qquad D.\ 12\ cm^2$$

Rješenje 433

Ponovimo!

$$\cos\left(90^{\circ}\right)=0.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)\ \Rightarrow\ \cos(\beta)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

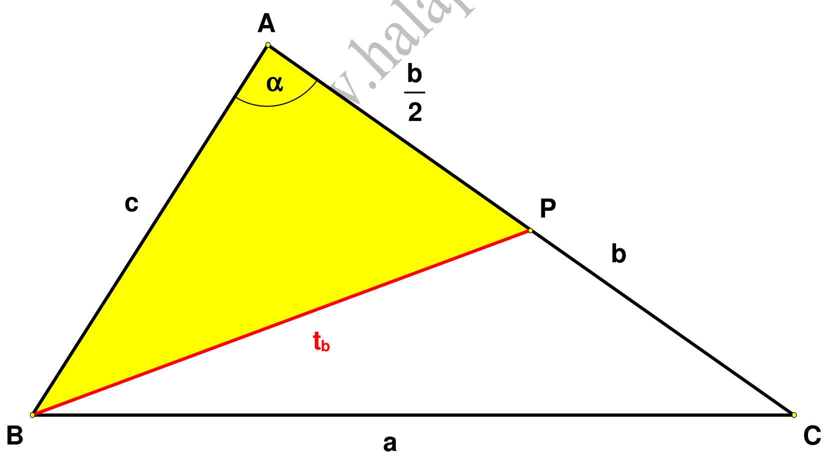
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\ \Rightarrow\ \cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P=\frac{a\cdot b}{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|AB\right|=c=4\ ,\ \left|AC\right|=b=6\ ,\ \left|BP\right|=t_b=5\ ,\ \left|AP\right|=\frac{1}{2}\cdot b=3\ ,\ \angle CAB=\alpha$$

Uočimo trokut PAB i izračunamo cos (α).

$$\cos(\alpha)=\frac{\left|AB\right|^2+\left|AP\right|^2-\left|BP\right|^2}{2\cdot\left|AB\right|\cdot\left|AP\right|}\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{4^2+3^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 3}\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{16+9-25}{24}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{0}{24}\ \Rightarrow\ \cos(\alpha)=0\ \Rightarrow\ \alpha=90^{\circ}.$$

Trokut ABC je pravokutan. Njegova površina iznosi:

$$P=\frac{b\cdot c}{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{6\cdot 4}{2}\ \Rightarrow\ P=12\ cm^2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 433

U trokutu su zadane stranice b = 12 cm, c = 8 cm i težišnica iz vrha B, t_b = 10 cm. Površina trokuta iznosi:

$$A.\ 20\cdot\sqrt{2}\ cm^2 \qquad B.\ 24\ cm^2 \qquad C.\ 16\cdot\sqrt{3}\ cm^2 \qquad D.\ 48\ cm^2$$

Rezultat: D.

Zadatak 434 (Bug2, maturant)

Zadane su dvije stranice a i b trokuta ABC, a kut među njima je 120°. Izrazite pomoću a i b duljinu odsječka simetrale tog kuta koji je unutar trokuta.

Rješenje 434

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokute dijelimo prema odnosu među duljinama stranica na:

$$\begin{cases}\text{raznostranične}\\ \text{jednakokračne}\\ \text{jednakostranične.}\end{cases}$$

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i tri jednaka kuta (α = 60°).
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

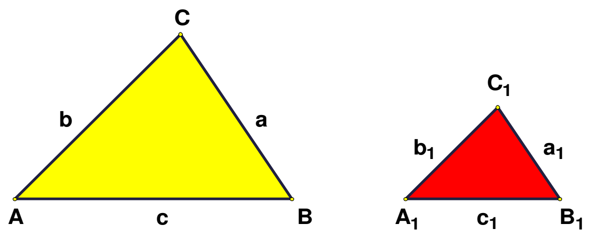
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d\ \Rightarrow\ a\cdot d = b\cdot c.$$

Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

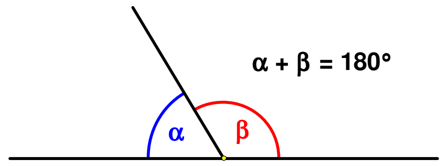
$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1\quad ,\quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

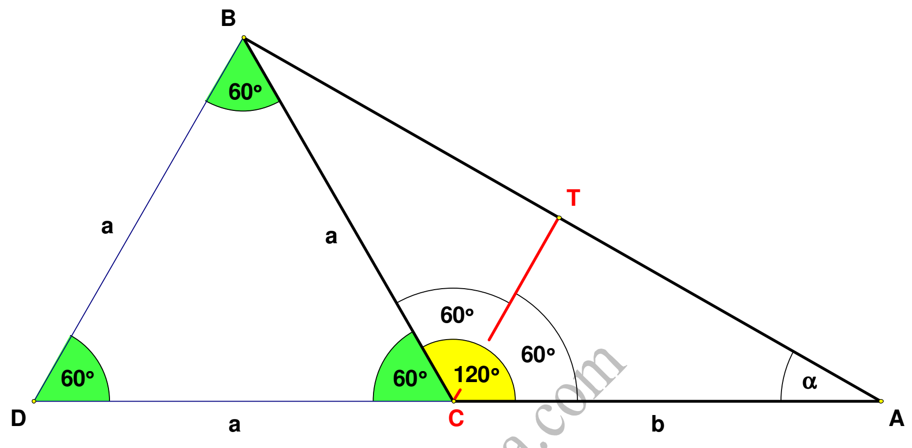
Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Sukut je kut koji sa zadanim kutom ima zajednički vrh i jedan krak, a drugi se krak s drugim krakom drugoga kuta nadopunjuje na pravac. Zbroj kuta i njegova sukuta iznosi π radijana, odnosno 180°.





Neka je $|CT|$ duljina traženog odsječka simetrale kuta od 120°. Na polupravcu AC odredimo točku D tako da je

$$|CB| = |CD| = a.$$

Primijetimo da je

$$\angle BCD = 60^\circ.$$

Sa slike vidi se:

$$|CA| = b \ , \ |CB| = |CD| = |BD| = a \ , \ |DA| = |DC| + |CA| = a + b \ , \ \angle CAB = \angle DAB = \alpha$$

$$\angle DCB = \angle CBD = \angle BDC = 60^\circ.$$

Trokut DCB je jednakostraničan.
Uočimo da su trokuti ΔABD i ΔATC slični jer vrijedi

$$\angle BDC = \angle TCA = 60^\circ.$$

Navedeni trokuti imaju zajednički kut u vrhu A pa su prema Prvom poučku sličnosti (K – K) međusobno slični. Iz njihove sličnosti dobije se razmjer:

$$|CT| : |DB| = |CA| : |DA| \ \Rightarrow \ |CT| \cdot |DA| = |DB| \cdot |CA| \ \Rightarrow \ |CT| \cdot (a+b) = a \cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |CT| \cdot (a+b) = a \cdot b \ / \cdot \frac{1}{a+b} \ \Rightarrow \ |CT| = \frac{a \cdot b}{a+b}.$$

Vježba 434

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 435 (Bug2, maturant)

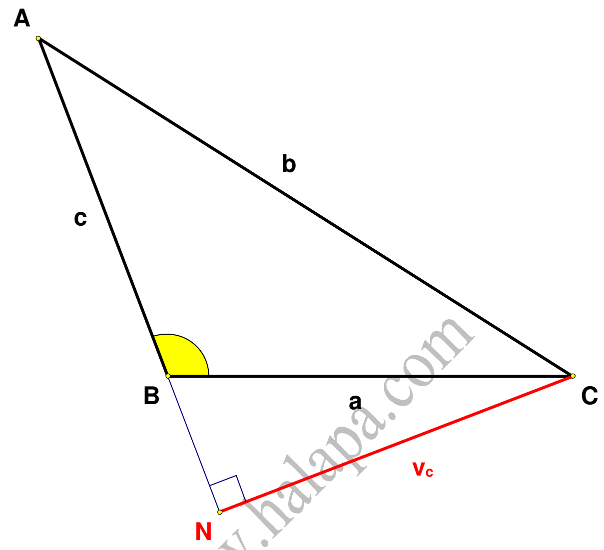
Duljine stranica trokuta iznose a = 25 cm i b = 30 cm, a visina spuštena na stranicu c ima duljinu v_c = 24 cm. Ako je kut nasuprot stranice b tup, onda duljina stranice c iznosi:

$$A.\ 25\ cm \qquad B.\ 18\ cm \qquad C.\ 11\ cm \qquad D.\ 9\ cm$$

Rješenje 435

Ponovimo!

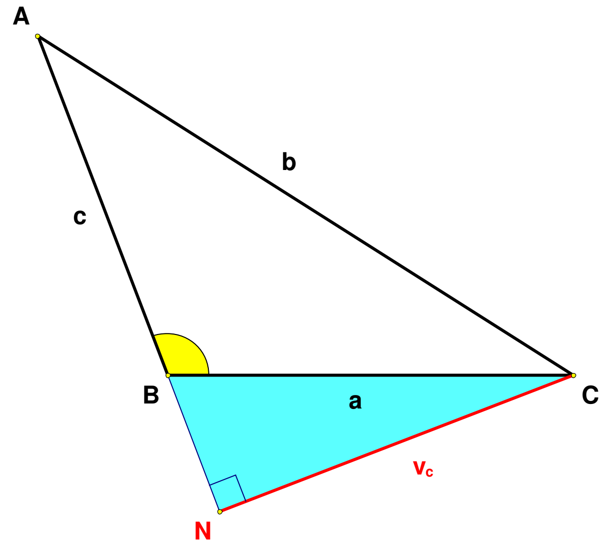
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AC| = b = 30\ ,\ |BC| = a = 25\ ,\ |CN| = v_c = 24\ ,\ |AB| = c$$

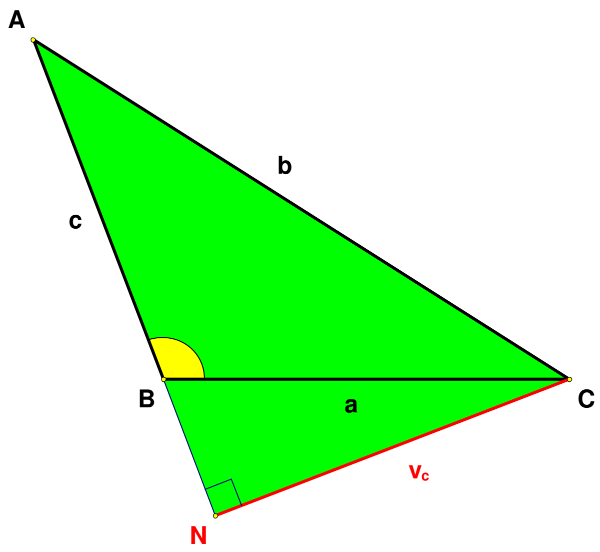
Neka je N ortogonalna projekcija točke C na pravac AB.



Uočimo pravokutan trokut BNC i uporabimo Pitagorin poučak.

$$|BN|^2 = |BC|^2 - |NC|^2 \Rightarrow |BN|^2 = 25^2 - 24^2 \Rightarrow |BN|^2 = 625 - 576 \Rightarrow |BC|^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC|^2 = 49 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |BC| = \sqrt{49} \Rightarrow |BC| = 7 \; cm.$$



Još jednom primijenimo Pitagorin poučak na pravokutan trokut ABC.

$$|AN|^2 = |AC|^2 - |CN|^2 \Rightarrow |AN|^2 = 30^2 - 24^2 \Rightarrow |AN|^2 = 900 - 576 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN|^2 = 324 \Rightarrow |AN|^2 = 324 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |AN| = \sqrt{324} \Rightarrow |AN| = 18 \; cm.$$

Duljina stranice c iznosi:

$$c = |AB| \Rightarrow c = |AN| - |BN| \Rightarrow c = 18 \; cm - 7 \; cm \Rightarrow c = 11 \; cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 435

Duljine stranica trokuta iznose a = 50 cm i b = 60 cm, a visina spuštena na stranicu c ima duljinu v_c = 48 cm. Ako je kut nasuprot stranice b tup, onda duljina stranice c iznosi:

$A. \; 50 \; cm \qquad B. \; 36 \; cm \qquad C. \; 22 \; cm \qquad D. \; 18 \; cm$

Rezultat: C.

Zadatak 436 (Igor, maturant)

Trokut ima stranice duljina 10, 11 i 19. Ako se sve stranice povećaju za jednak iznos, onda one čine pravokutni trokut. Nađite to povećanje!

Rješenje 436

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Neka je x traženo povećanje. Tada vrijedi Pitagorin poučak.

$$(10+x)^2 + (11+x)^2 = (19+x)^2 \Rightarrow 100 + 20 \cdot x + x^2 + 121 + 22 \cdot x + x^2 = 361 + 38 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 20 \cdot x + x^2 + 121 + 22 \cdot x + x^2 = 361 + 38 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100+20\cdot x+121+22\cdot x+x^2=361+38\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100+20\cdot x+121+22\cdot x+x^2-361-38\cdot x=0 \Rightarrow x^2+4\cdot x-140=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=10 \\ x_2=-14 \text{ nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=10.$

Vježba 436

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 437 (Ines, gimnazija)

Jedan kut u trokutu jednak je $\frac{2}{3}$ drugog kuta i istodobno $\frac{4}{5}$ trećeg kuta. Koliki je najveći kut trokuta?

Rješenje 437

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}, \quad n\neq 0, \quad n\neq 1.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{matrix} \alpha=\frac{2}{3}\cdot\beta \\ \alpha=\frac{4}{5}\cdot\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{2}{3}\cdot\beta=\alpha \\ \frac{4}{5}\cdot\gamma=\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{2}{3}\cdot\beta=\alpha \;/\cdot\frac{3}{2} \\ \frac{4}{5}\cdot\gamma=\alpha \;/\cdot\frac{5}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \beta=\frac{3}{2}\cdot\alpha \\ \gamma=\frac{5}{4}\cdot\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\frac{3}{2}\cdot\alpha+\frac{5}{4}\cdot\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha+\frac{3}{2}\cdot\alpha+\frac{5}{4}\cdot\alpha=180^\circ \;/\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot\alpha+6\cdot\alpha+5\cdot\alpha=720^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\cdot\alpha=720^\circ \Rightarrow 15\cdot\alpha=720^\circ \;/:15 \Rightarrow \alpha=48^\circ.$$

Najveći kut je

$$\beta=\frac{3}{2}\cdot\alpha \Rightarrow \beta=\frac{3}{2}\cdot 48^\circ \Rightarrow \beta=72^\circ.$$

Vježba 437

Jedan kut u trokutu jednak je $\frac{2}{3}$ drugog kuta i istodobno $\frac{4}{5}$ trećeg kuta. Koliki je najmanji kut trokuta?

Rezultat: 48°.

Zadatak 438 (Ekipa3, maturanti)

U pravokutnom trokutu je P = 24 i c = 10. Koliko je a + b?

$A.\ 14 \qquad B.\ 16 \qquad C.\ 12 \qquad D.\ 8\cdot\sqrt{2}$

Rješenje 438

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a \cdot b}{2} \\ P = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = 24 \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = 24 \; / \cdot 4 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot b = 96.$$

Dalje slijedi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow \left[\, a^2 + b^2 = c^2 \,\right] \Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 10^2 + 96 \Rightarrow (a+b)^2 = 196 \Rightarrow (a+b)^2 = 196 \; / \sqrt{} \Rightarrow a+b = \sqrt{196} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = 14.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 438

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 439 (Ekipa3, maturanti)

Umnožak R · r u jednakostraničnom trokutu iznosi 24. Kolika je površina tog trokuta?

$$A.\ 12 \cdot \sqrt{3} \qquad B.\ 36 \cdot \sqrt{3} \qquad C.\ 36 \cdot \sqrt{2} \qquad D.\ 24 \cdot \sqrt{3}$$

Rješenje 439

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

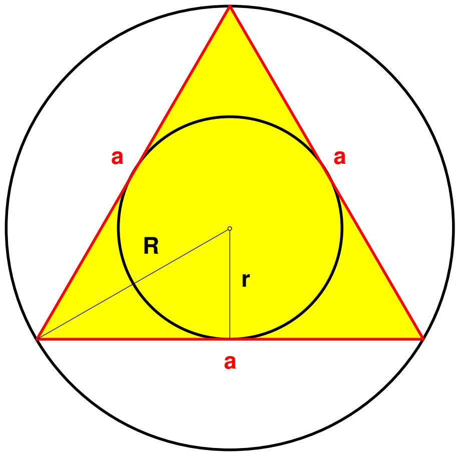
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokute dijelimo prema odnosu među duljinama stranica na:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{raznostranične} \\ \text{jednakokračne} \\ \text{jednakostranične.} \end{array}\right.$$

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i tri jednaka kuta (α = 60°).
Površina jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice a iznosi:

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

Polumjer opisane i upisane kružnice jednakostraničnom trokutu duljine stranice a.



$$R=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3} \quad , \quad r=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$R\cdot r=24 \;\Rightarrow\; \frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}=24 \;\Rightarrow\; \frac{a^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{18}=24 \;\Rightarrow\; \frac{a^2\cdot 3}{18}=24 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a^2\cdot 3}{18}=24 \;/\cdot 6 \;\Rightarrow\; a^2=144.$$

Površina trokuta je

$$P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; P=\frac{144\cdot\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; P=\frac{144\cdot\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; P=36\cdot\sqrt{3}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 439

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 440 (Ekipa3, maturanti)

Opseg i površina pravokutnog trokuta iznose 24. Koliko je a + b?

$A.\ 10 \qquad B.\ 14 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ 20$

Rješenje 440

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg

$$O=a+b+c.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$a^2+b^2=c^2.$$

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\cdot b}{2}=24\\ a+b+c=24\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{a\cdot b}{2}=24 \ /\cdot 4\\ a+b=24-c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ a+b=24-c \ /^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ (a+b)^2=(24-c)^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=576-48\cdot c+c^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left[a^2+b^2=c^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ c^2+2\cdot a\cdot b=576-48\cdot c+c^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ c^2+2\cdot a\cdot b=576-48\cdot c+c^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a\cdot b=96\\ 2\cdot a\cdot b=576-48\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow 96=576-48\cdot c \Rightarrow 48\cdot c=576-96 \Rightarrow 48\cdot c=480 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48\cdot c=480 \ /:48 \Rightarrow c=10.$$

Računamo a + b.

$$a+b+c=24 \Rightarrow a+b=24-c \Rightarrow a+b=24-10 \Rightarrow a+b=14.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 440

Odmor!

Rezultat: …